Министерство образования Республики Беларусь

« LXVIII »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Минск 2018

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 68-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Базылев Д.Ф. (8.5)
Барабанов Е.А. (9.6, 11.7)
Войделевич А.С. (11.6)
Воронович И.И. (9.5, 10.5, 11.5)
Жюри (10.7)
Карамзин В.П. (9.7)
Каскевич В.И. (8.7)
Карпук М.В. (10.8, 11.8)
Качан И.В. (10.6)
Мазаник С.А. (8.6)
Серенков Б.Ю. (9.8)
Чернов С.Ю. (8.8)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич, И.И.Воронович, М.В.Карпук, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Найдите наименьшее натуральное число n, у которого существуют три различных собственных делителя, сумма которых равна 1001.

(Собственный делитель числа n — это любой делитель n, отличный от 1 и n.)

8.6. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) сторона AB в два раза меньше стороны BC. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а диагональ AC в точке L. Биссектриса угла ADC пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке M. Прямая ML пересекает сторону AD в точке F.

Найдите отношение $AF : AD$.

8.7. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

Докажите, что произведение каких-то двух из этих чисел является квадратом некоторого натурального числа.

8.8. В социальной сети зарегистрированы 2018 человек, некоторые из которых являются друзьями. Известно, что у Бори наибольшее число друзей, а у Жени — наименьшее, причем общее число друзей у Бори и Жени не меньше k. По правилам, установленным администратором, обмениваться сообщениями могут только друзья. Аня и Маша также входят в данную социальную сеть, однако не являются друзьями.

При каком наименьшем k Аня гарантированно сможет передать привет Маше, возможно через других пользователей?

9 класс

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в параболу $y = x^2$. Известно, что $\angle BAD = 90°$. Кроме того, диагональ AC параллельна оси Ox и является биссектрисой угла BAD.

Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если длина диагонали BD равна p.

9.6. Докажите, что при всех натуральных n и m справедливо неравенство

$$\left|n\sqrt{n^2+1} - m\right| \geqslant \sqrt{2} - 1.$$

9.7. Внутри треугольника ABC отмечена точка O так, что длины отрезков OA, OB и OC равны соответственно 15, 12 и 20. Оказалось, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника ABC, являются вершинами равностороннего треугольника.

Определите величину угла ABC.

9.8. Дано натуральное число n. Таблицу $k \times n$ (k строк и n столбцов) заполненную нулями и единицами назовём хорошей, если выполняется следующее условие: для любого разбиения строк таблицы на две непустые группы найдётся такой непустой набор столбцов, что на пересечении любой строки из одной из этих групп с выбранными столбцами стоит чётное число единиц, а на пересечении любой строки из другой группы с выбранными столбцами стоит нечётное число единиц.

Найдите наибольшее натуральное число k, для которого существует хотя бы одна хорошая таблица $k \times n$.

10 класс

10.5. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение

$$3a^2 - b^2 = 2018^n$$

имеет решение в целых числах a и b.

10.6. Вершины выпуклого четырёхугольника $ABCD$ принадлежат параболе $y = x^2$. Известно, что вокруг $ABCD$ можно описать окружность, причём AC — её диаметр. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

Найдите длину проекции отрезка MN на ось Oy.

10.7. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) вписан квадрат $A_1B_1C_1D_1$ так, что точки A_1, B_1 лежат на катетах CB и CA соответственно, а точки C_1, D_1 — на гипотенузе AB. Окружности, описанные около треугольников B_1A_1C и BD_1A_1 пересекаются в точках A_1 и X, а окружности, описанные около треугольников B_1A_1C и AC_1B_1 пересекаются в точках B_1 и Y.

Докажите, что прямые A_1X и B_1Y пересекаются на гипотенузе AB.

10.8. На окружности отмечены вершины правильного n-угольника и центр окружности. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой отмеченной точки в любую другую.

Для каждого натурального $n \geqslant 3$ определите, кто победит при правильной игре.

11 класс

11.5. Окружность S_1 пересекает гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$ в четырёх точках A, B, C и D, а другая окружность S_2 пересекает эту же гиперболу в четырёх точках A, B, F и G. Известно, что радиусы окружностей S_1 и S_2 равны.

Докажите, что точки C, D, F и G являются вершинами параллелограмма.

11.6. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка X. Описанные окружности треугольников AXB и AXC повторно пересекают сторону BC в точках D и E, соответственно. Прямая DX пересекает сторону AC в точке K, а прямая EX пересекает сторону AB в точке L.

Докажите, что $LK \parallel BC$.

11.7. Рассмотрим выражение $M(n,m) = \left|n\sqrt{n^2+a} - bm\right|$, где $n, m \in \mathbb{N}$, а числа a и b фиксированы, причём a — нечётное число, рац. число b — рациональное число, такое, что в представлении его в виде несократимой дроби знаменатель нечётен.

Докажите, что существует

а) не более конечного числа пар (n,m), для которых $M(n,m) = 0$;

б) такая положительная постоянная C, что для тех пар (n,m), при которых $M(n,m) \neq 0$, выполняется неравенство $M(n,m) \geqslant C$.

11.8. На окружности отмечены вершины правильного n-угольника. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой вершины в любую другую.

Для каждого натурального $n \geqslant 3$ определите, кто победит при правильной игре.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: $n = 924$.

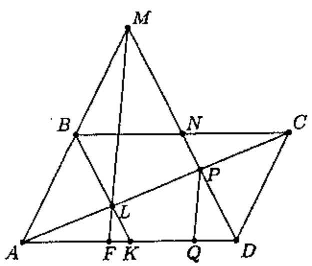
Пусть для определённости $d_1 < d_2 < d_3$ — данные делители числа n, расположенные в порядке возрастания. По условию $1 < d_1 < d_2 < d_3 < n$. Поскольку d_1, d_2, d_3 — делители n, то найдутся натуральные числа a, b, c, такие, что $d_1a = d_2b = d_3c = n$. Отсюда легко видим, что $1 < c < b < a < n$. Тогда $c \geqslant 2$, $b \geqslant 3$, $a \geqslant 4$. Так как по условию $d_1 + d_2 + d_3 = 1001$, имеем

$$1001 = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} = n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leqslant n\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{13n}{12},$$

или $12 \cdot 1001 \leqslant 13n$, т.е. $12 \cdot 77 \leqslant n$, $n \geqslant 924$. С другой стороны, значение $n = 924$ удовлетворяет условию задачи, так как у числа 924 есть собственные делители 462, 308 и 231, сумма которых $462 + 308 + 231$ действительно равна 1001.

8.6. Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

Пусть отрезок MD пересекает сторону AC в точке N, а диагональ AC — в точке P. Так как $BC \parallel AD$, то $\angle CBK = \angle BKA$ (внутренние накрест лежащие углы).



По условию $\angle ABK = \angle CBK$, поэтому $\angle ABK = \angle BKA$, и, следовательно треугольник ABK равнобедренный и $AB = AK$. Так как $2AB = AD$, то K — середина стороны AD. Аналогично N — середина стороны BC. Поскольку очевидно, что $BNDK$ — параллелограмм, то $ND = BK$ и NP и LK — средние линии в треугольниках BCL и APD соответственно. Поэтому $2NP = BL$, $2LK = PD$, откуда $NP + PD = ND = BK = BL + LK$, и, следовательно, $2NP = 2LK = PD$. Поскольку N — середина BC, то $BN = 0,5BC = 0,5AD$, и так как $BC \parallel ADM$ то BN — средняя линия треугольника AMD, и, значит, N — середина отрезка MD, т.е.

$$MN = ND = NP + PD = \frac{3}{2}PD \implies MP = MN + NP = \frac{3}{2}PD + \frac{1}{2}PD = 2PD. \quad (1)$$

Пусть Q — точка пересечения стороны AD с прямой, проходящей через точку P параллельно прямой MF. Тогда по теореме Фалеса $FQ : QD = MP : PD \overset{(1)}{=} 2 : 1$. Поскольку LK — средняя линия в треугольнике APD, то $AK = KD$. Поэтому

$$AF : AD = AF : (AF + FQ + QD) = FQ : (2FQ + QD) = FQ : (4QD + QD) =$$

$$= 2QD : 5QD = 2 : 5.$$

8.7. Заметим, что

$$(ab-c^2)(ca-b^2)(bc-a^2) = (a^2bc - ab^3 - ac^3 + b^2c^2)(bc-a^2) =$$
$$= a^2b^2c^2 - ab^4c - abc^4 + b^3c^3 - a^4bc + a^3b^3 + a^3c^3 - a^2b^2c^2 =$$
$$= a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 - a^4bc - a^4bc - abc^4 = a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 - abc(a^3+b^3+c^3).$$

Поэтому равенство

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3+b^3+c^3) \qquad (1)$$

из условия задачи равносильно равенству

$$(ab-c^2)(ca-b^2)(bc-a^2) = 0. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что $ab = c^2$, или $ca = b^2$, или $bc = a^2$, что и требовалось доказать.

8.8. Ответ: $k = 2016$.

Покажем, что $k \geqslant 2016$. Заметим, что у Бори и Маши вместе друзей больше, чем у Бори и Жени, так как у Жени наименьшее число друзей среди пользователей социальной сети. То есть у Бори и Маши вместе не менее 2017 друзей, а всего кроме Бори и Маши в социальной сети зарегистрировано 2016 человек. Следовательно, или Боря и Маша — друзья, или у Бори и Маши найдется общий друг, например, Павел. Аналогично или Боря и Аня друзья, или у Ани и Бори найдется общий друг, например, Игорь. Таким образом, Аня может передать привет Маше, прибегнув к помощи не более трех других пользователей сети.

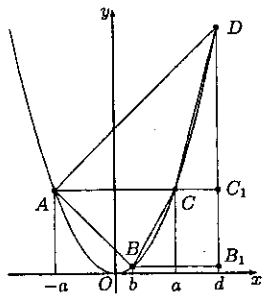
Теперь покажем, что $k \leqslant 2015$ недостаточно, чтобы существовала искомая цепочка пользователей. Пусть Боря дружит со всеми пользователями кроме Маши, Васи и Гены, а Маша, Вася и Гена дружат только между собой. Пусть Женя дружит только с Борей. А все остальные пользователи сети дружат между собой. Разобъём всех пользователей на две группы: в группу Γ_1 включим Машу, Васю и Гену, а в группу Γ_2 — всех остальных пользователей сети. Поскольку никто из группы Γ_1 не дружит ни с кем из группы Γ_2, то Маша, входящая в Γ_1, не сможет получить сообщение от Ани, входящей в группу Γ_2. При этом легко видеть, что у Бори и Жени вместе $2015 \geqslant k$ друзей, и что все пользователи имеют друзей меньше, чем у Бори, но больше, чем у Жени.

9 класс

9.5. Ответ: $S = \dfrac{p^2}{4} - 1$.

Заметим, во-первых, что, если точки (m, m^2) и (n, n^2) принадлежат параболе $y = x^2$, то уравнение прямой, проходящей через них, имеет вид $y = (m+n)x - mn$. Действительно, легко видно, что координаты каждой из точек удовлетворяют этому линейному уравнению, следовательно, вся прямая задаётся этим уравнением.

Обозначим координаты точек из условия: $A(-a, a^2)$, $C(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $D(d, d^2)$ (мы учли, что $AC \parallel Ox$ по условию, так что точки A и C симметричны относительно Oy).



Уравнение прямой AD имеет вид $y = (d-a)x + da$. С другой стороны, по условию $\angle DAC = 45°$, так что угловой коэффициент этой прямой равен 1, т. е. $d - a = 1$. Аналогично, уравнение прямой AB имеет вид $y = (b-a)x + ba$, а её угловой коэффициент равен -1, поэтому $b - a = -1$. На координатной плоскости отметим точки $B_1(d, b^2)$ и $C_1(d, c^2)$ (см. рис.). Из прямоугольного треугольника BB_1D получаем равенство $p^2 = (d-b)^2 + (d^2-b^2)^2$. Так как $d - b = 2$, а $d + b = 2a$, то $p^2 = 4 + 16a^2$, откуда $a^2 = \frac{1}{16}(p^2-4)$.

Искомая площадь равна $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$. У треугольников ABC и ADC (см. рис.) общее основание $AC = 2a$, а сумма длин высот равна $C_1B_1 + C_1D = DB_1 = 4a$. Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 2a \cdot 4a = \frac{1}{4}(p^2-4)$.

9.6. Обозначим $M(n,m) = \left|n\sqrt{n^2+1} - m\right|$. Воспользовавшись очевидным двойным неравенством

$$n^2 < n\sqrt{n^2+1} < n^2 + \frac{1}{2},$$

получаем

$$n^2 - m < n\sqrt{n^2+1} - m < n^2 - m + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если $m \neq n^2$, то $M(n,m) > 1/2$. Так как $1/2 > \sqrt{2} - 1$, то при $m \neq n^2$ нужное неравенство доказано.

Пусть $m = n^2$. Рассмотрим функцию $f(n) = M(n, n^2) = n\sqrt{n^2+1} - n^2$. Покажем, что она является является возрастающей при $n > 0$. Действительно, для любых чисел $a > b > 0$ разность $f(a) - f(b)$ преобразовывается как:

$$(a\sqrt{a^2+1} - a^2) - (b\sqrt{b^2+1} - b^2) = (a\sqrt{a^2+1} - b\sqrt{b^2+1}) - (a^2 - b^2) =$$

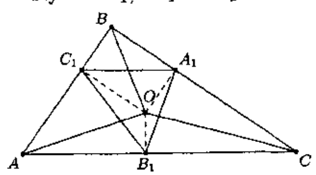
$$= \frac{a^2(a^2+1) - b^2(b^2+1)}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} - (a^2-b^2) = (a^2-b^2)\left(\frac{a^2+b^2+1}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} - 1\right). \qquad (1)$$

Как уже отмечалось, $a^2 + \frac{1}{2} > a\sqrt{a^2+1}$ и $b^2 + \frac{1}{2} > b\sqrt{b^2+1}$. Сложив эти неравенства, получим, что второй множитель последнего выражения в (1) положителен, а значит, $f(a) - f(b) > 0$.

Поэтому наименьшее значение функции $f(n)$ достигается при $n = 1$ и равно $\sqrt{2} - 1$.

9.7. $\angle B = 90°$.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны BC, CA и AB соответственно. Так как $\angle OA_1B = 90° = \angle OC_1B$, то четырёхугольник BA_1OC_1 вписан в окружность, диаметр которой — отрезок OB. Поэтому по теореме синусов для треугольника A_1BC_1 имеем $A_1C_1 = OB\sin\angle B$. Аналогично, $A_1B_1 = OC\sin\angle C$, $B_1C_1 = OA\sin\angle A$.



Поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ является равносторонним, получаем равенства

$$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{OC}{OB}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3},\quad \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A}=\frac{OA}{OB}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}. \qquad (1)$$

Кроме того, из теоремы синусов для треугольника ABC получаем $AB/\sin\angle C=BC/\sin\angle A=AC/\sin\angle B$. Поэтому

$$AB=AC\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}=\frac{3}{5}AC,\quad BC=AC\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}=\frac{4}{5}AC.$$

Нетрудно заметить, что $AB^2+BC^2=\dfrac{9}{25}AC^2+\dfrac{16}{25}AC^2=AC^2$, и, следовательно, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом B.

9.8. Ответ: $k=n+1$.

Всего существует $2^{k-1}-1$ разбиений строк на две группы и 2^n-1 способов выбрать некоторый набор столбцов. Так как для любого разбиения строк существует хотя бы один набор столбцов и набор столбцов однозначно определяет разбиение строк, то $2^{k-1}-1\leqslant 2^n-1$, и, следовательно, $k\leqslant n+1$. Докажем, что для любого n существует хорошая таблица $(n+1)\times n$.

Рассмотрим таблицу в которой в i-ой строке сначала стоит $i-1$ единица, а далее все нули (в частности, в первой строке стоят только нули). Заметим, что для любых двух подряд идущих строк a_i и a_i+1 чётность количества единиц в пересечении с набором столбцов у этих двух строк совпадает тогда и только тогда, когда в этом наборе столбцов нету i-го. Значит, наличие или отсутствие i-го столбца в наборе однозначно определяет в одну или разные группы попадут a_i и a_i+1. Пусть задано некоторое разбиение строк. Выберем те и только те столбцы, для которых строка с тем же номером находится в разных группах со следующей за ней строкой. Полученный набор столбцов удовлетворяет условию, следовательно, указанная таблица является хорошей.

10 класс

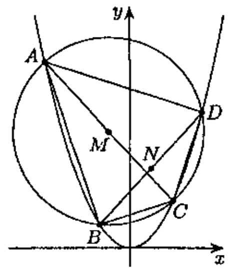
10.5. Ответ: все нечётные числа.

При $n=1$ существует решение $3\cdot 27^2-13^2=2018^1$. Для произвольного нечётного $n=2k+1$ из этого равенства получается равенство $3\cdot(27\cdot 2018^k)^2-(13\cdot 2018^k)^2=2018^{2k+1}$, означающее, что все нечётные n удовлетворяют условию задачи.

Если же число n чётное, то $2018^n\equiv 2^n\equiv 1 \pmod 3$. Но левая часть не может давать остаток 1 при делении на 3, так как квадраты натуральных чисел дают остатки только 0 и 1 при делении на 3. Значит, все чётные числа n не удовлетворяют условию задачи.

10.6. Ответ: 1.

Пусть абсциссы данных точек A, B, C, D равны a, b, c, d соответственно.



Так как AC — диаметр данной в условии окружности, то точка M — её центр. Если (p,q) — координаты точки M, то уравнение окружности имеет вид $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$, где R — радиус окружности. Пара координат $(x;y)$ любой из точек A, B, C, D является решением системы уравнений

$$\begin{cases}(x-p)^2+(y-q)^2=R^2,\\ y=x^2,\end{cases}$$

следовательно, абсциссы a, b, c, d этих точек являются решениями уравнения $(x-p)^2+(x^2-q)^2-R^2=0$, т. е. уравнения $x^4+(1-2q)x^2-2px+p^2+q^2-R^2=0$. В левой части последнего равенства стоит многочлен со старшим коэффициентом 1, корни которого равны a, b, c, d. Тогда

$$\begin{aligned}x^4+(1-2q)x^2-2px+p^2+q^2-R^2&=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\\ &=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+bc+cd+ac+ad+bd)x^2-\\ &\quad-(abc+bcd+cda+dab)x+abdc.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему равенств

$$a+b+c+d=0; \qquad (1)$$
$$ab+bc+cd+ad+ad+bd=1-2q; \qquad (2)$$
$$abc+bcd+cda+dab=2p; \qquad (3)$$
$$abcd=p^2+q^2-R^2. \qquad (4)$$

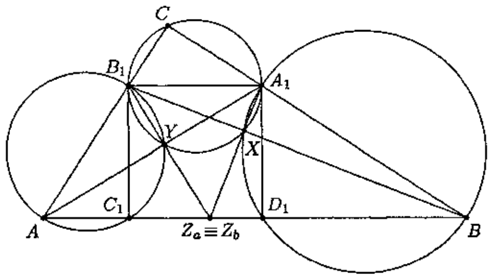
Так как M — середина отрезка AC, то $2p=a+c$, и, ввиду (1), $b+d=-2p$. Далее, из (3) имеем

$$2p=(abc+acd)+(dab+bcd)=ac(b+d)+bd(a+c)=2p(bd-ac),$$

откуда или $p=0$, или $bd-ac=1$. Если $p=0$, то $a=-c$ и $b=-d$, а значит, точки A и B симметричны соответственно точкам C и D относительно оси Oy. Поэтому четырёхугольник $ABCD$ является самопересекающимся, что противоречит условию задачи. Таким образом, $bd-ac=1$. Перепишем (1) в виде $a+c=-(b+d)$. Отсюда $(a+c)^2=(b+d)^2$, или $a^2+2ac+c^2=b^2+d^2+2bd$, или, учитывая, что $2bd=2ac+2$, имеем $a^2+c^2=b^2+d^2+2$, т.е. $\dfrac{a^2+c^2}{2}=\dfrac{b^2+d^2}{2}+1$, или $\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2+d^2}{2}=1$. Осталось заметить, что $\dfrac{a^2+c^2}{2}$ и $\dfrac{b^2+d^2}{2}$ — ординаты точек M и N, поэтому проекция отрезка MN на ось Oy равна 1.

10.7. Так как AB_1 и B_1A_1 являются диаметрами окружностей, описанных около треугольников AC_1B_1 и A_1CB_1, соответственно, то $\angle AYB_1=\angle A_1YB_1=90^\circ$. Следовательно, точка Y лежит на прямой AA_1 и $AA_1\perp B_1Y$. Аналогично, X лежит на прямой BB_1 и $BB_1\perp A_1X$.

Через Z_b и Z_a обозначим, соответственно, точки пересечения прямых B_1Y и A_1X с гипотенузой AB. Пусть $CB=a$, $AC=b$, $AB=c$ и $A_1B_1=x$. Найдя длины отрезков BZ_a и AZ_b, докажем равенство $AZ_b+Z_aB=AB$, из которого следует утверждение задачи.



Так как $\angle B_1XZ_a = \angle B_1C_1Z_a = 90°$, то четырёхугольник $B_1C_1Z_aX$ вписан. Из условия задачи следует, что четырёхугольник CA_1XB_1 также вписан, поэтому

$$BA_1 \cdot CB = BX \cdot BB_1 = BZ_a \cdot BC_1. \qquad (*)$$

Треугольник A_1BD_1 подобен треугольнику ABC, а значит, справедливы равенства

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{D_1B}{CB} = \frac{A_1D_1}{AC}.$$

Поэтому, $A_1B = \dfrac{cx}{b}$, $D_1B = \dfrac{ax}{b}$ и $BC_1 = x + \dfrac{ax}{b} = \dfrac{(a+b)x}{b}$. Из $(*)$ следует, что $BZ_a = \dfrac{ac}{a+b}$. Аналогичным образом доказывается равенство $AZ_b = \dfrac{bc}{a+b}$, а значит, $AZ_b + BZ_a = AB$.

10.8. Ответ: при нечётных n победит первый игрок, а при чётных — второй.

Пусть n чётно. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Рассмотрим первый ход первого игрока.

Случай ч1. Первый игрок первым ходом соединил некоторую точку с центром.

Второй игрок соединяет с центром диаметрально противоположную точку. После этого второму игроку для победы достаточно делать ходы симметрично относительного полученного диаметра. При этом, поскольку картина симметрична относительно диаметра, то после хода второго игрока всегда остаётся нечётное число компонент связности. Значит, своим ходом первый игрок не может добиться победы, объединив последние две компоненты связности.

Случай ч2. Первый игрок первым ходом соединил две соседние отмеченные точки.

Второй игрок каждый раз проводит отрезок, симметричный относительно центра окружности отрезку, проведённому первым игроком. Тогда после каждого хода второго игрока число компонент связности нечётно, причём они разбиваются на пары симметричных и ещё одну компоненту, симметричную самой себе. Такие ходы он делает до тех пор, пока у первого не появится возможность выиграть в один ход. Обозначим последний проведённый отрезок первым игроком через x, симметричный ему через x^*, а отрезок, проведя который первый выиграл бы, если бы второй провёл x^* — через z. Заметим, что можно не рассматривать случай, когда ход x соединяет точку на окружности с центром, так как, аналогично ч1. после хода x^* останется нечётное число компонент связности и ход z не может быть выигрышным.

Рассмотрим компоненты связности, которые есть перед проведением отрезка x. Очевидно, что отрезок x соединяет какие-то две различные из них, пусть A и B, а отрезок x^* соединяет симметричные им компоненты A^* и B^*. Рассмотрим центр окружности.

Предположим, что он входит в одну из компонент A или B. Не ограничивая общности, пусть в A. Тогда он также входит и в компоненту A^*, следовательно, эти компоненты совпадают. Это означает, то компонента $A = A^*$ центрально-симметричная и содержит центр окружности. Получаем, что после хода x^* количество компонент связности нечётно, как и перед ходом x. Следовательно, ход z не может быть победным и мы приходим к противоречию.

Предположим теперь, что центр не входит ни в одну из компонент A и B. Есть ещё как минимум одна компонента связности C, в которую входит центр окружности. Для того, чтобы ход z был победным необходимо, чтобы он соединял компоненту связности C с компонентой связности, которая получилась после ходов x и x^*. Так как после симметричных ходов x и x^* получилась общая компонента связности, не содержащая центр, то $B = A^*$, $A = B^*$ и ход x^* не добавил ни одной компоненты. Следовательно, для победы второму игроку достаточно провести отрезок z вместо x^*.

Пусть n нечётно. Докажем по индукции, что первый игрок всегда может выиграть, если первым ходом соединит произвольную точку с центром окружности. База индукции $n = 3$ очевидна.

Пусть мы уже доказали утверждение индукции для всех нечётных n от 3 до $2k-1$, докажем его для $n = 2k+1$. Занумеруем вершины n-угольника в порядке следования на окружности: $A_0, A_1, \ldots, A_{2k+1}$. Пусть, не ограничивая общности, первый игрок первым своим ходом соединит A_0 с центром окружности. Рассмотрим, какие точки мог соединить второй игрок:

Соединил две вершины, отличные от A_0. Пусть это A_{i-1} и A_i, где $2 \leqslant i \leqslant k+1$. Первый игрок соединяет A_i с A_{i+1}, после чего игра сводится к случаю $n = 2k-1$. А именно, можно считать вершины A_{i-1}, A_i, A_{i+1} одной вершиной, которая соединяется с одним соседом через A_{i-1}, с другим соседом через A_{i+1}, с центром через A_i, и, кроме того, у неё есть ещё два соединения с центром окружности, которые не играют никакой роли. Первый игрок проводит оставшееся соединение, если только что это сделал второй игрок — такая пара ходов не влияет на игру.

Соседнюю вершину соединил с A_0. Пусть это A_1. Первый игрок соединяет A_0 с A_{2k+1}, после чего игра сводится к случаю $n = 2k-1$. А именно, можно считать вершины A_{2k+1}, A_0, A_1 одной вершиной, аналогично предыдущему случаю. Единственное различие — первый игрок считает, что именно эту "тройную" вершину он соединил с центром первым ходом.

Вершину, смежную с A_0 соединил с центром. Пусть это A_1. Первый игрок соединяет A_{2k+1} с центром, после чего игра сводится к случаю $n = 2k-1$. А именно, можно считать вершины A_{2k+1}, A_0, A_1 одной вершиной, аналогично предыдущему случаю. Единственное различие — вместо дополнительной пары соединений с центром у точек A_1 и A_{2k+1} есть дополнительная пара соединений с A_0.

Вершину, не смежную с A_0 соединил с центром. Пусть эта вершина A_{2i}, если её номер нечётный, то пронумеруем вершины в противоположном направлении обхода окружности. Первый игрок соединит A_i с центром, после чего, задача сведётся к случаю $n = 2k - 2i + 1$ с небольшими оговорками. А именно, первый игрок будет считать, что все вершины от A_0 до A_{2i} одной вершиной, изначально соединённой с центром окружности. При этом, если второй игрок будет проводить отрезок внутри одного из секторов OA_0A_i и OA_iA_{2i}, то первый будет проводить симметричный ему отрезок относительно OA_i, где O — центр окружности.

В каждом из случаев ирга свелась к нечётной с меньшим числом вершин, следовательно, по предположению индукции, при нечётном $n \geqslant 3$ первый игрок может гарантировать себе победу.

11 класс

11.5. Пусть абсциссы точек A, B, C, D, F и G равны a, b, c, d, f и g, соответственно. Если $O_1(\alpha;\beta)$ — центр окружности S_1, то координаты точек A, B, C и D удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,\\ y=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$$

Исключая y, получаем уравнение

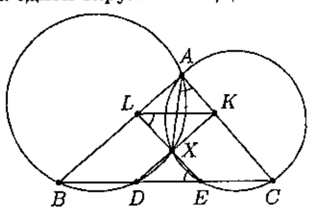
$$x^4-2\alpha x^3+(\alpha^2+\beta^2-R^2)x^2-2\beta x+1=0,$$

решениями которого являются числа a, b, c и d. Отсюда, в частности, $a+b+c+d=2\alpha$ и $abcd=1$. Аналогично, если $O_2(\lambda,\mu)$ — центр окружности S_2, то $a+b+f+g=2\lambda$ и $abfg=1$. Так как радиусы окружностей S_1 и S_2 равны, то AO_1BO_2 — ромб, и тогда середины отрезков AB и O_1O_2 совпадают, а значит, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\alpha+\lambda}{2}$, или $a+b=\alpha+\lambda$. Следовательно,

$$\begin{aligned}2\alpha+2\lambda&=(a+b+c+d)+(a+b+f+g)=\\&=2(a+b)+c+d+f+g=2\alpha+2\lambda+c+d+f+g,\end{aligned}$$

откуда $f+g=-(c+d)$. Кроме того, $cd=fg=(ab)^{-1}$. По-другому это можно записать как $f+g=(-c)+(-d)$ и $f\cdot g=(-c)\cdot(-d)$. Имеем пары чисел (f,g) и $(-c,-d)$, для которых равны суммы и равны произведения. Поэтому либо $f=-c$ и $g=-d$, либо $f=-d$ и $g=-c$. Если, скажем, $f=-c$ и $g=-d$, то пары точек F, C и G, D симметричны относительно начала координат, т. е. $FGCD$ — параллелограмм с центром в начале координат.

11.6. Докажем, что точки A, L, X и K лежат на одной окружности. Действительно, так как четырёхугольник $ABDX$ вписанный, то $\angle AXK=\angle ABC$. Аналогично доказывается равенство $\angle LXA=\angle BCA$. Следовательно, $\angle KAL+\angle LXK=\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=180°$, а значит, четырёхугольник $ALXK$ вписан. Поэтому, $\angle KLX=\angle KAX$. Так как точки A, X, E и C лежат на одной окружности, то $\angle DEX=\angle CAX$. Следовательно, $\angle KLX=\angle DEX$, т. е. $LK \parallel BC$.



11.7. Решение задачи п. а) почти очевидно, причём её утверждение справедливо для любых $b\in\mathbb{Q}$ и $a\in\mathbb{N}$. Действительно, если выполнено равенство $n\sqrt{n^2+a}=bm$, то, поскольку $b\in\mathbb{Q}$, число $\sqrt{n^2+a}$ должно быть рациональным, а значит, целым. Поэтому $n^2+a=k^2$ для некоторого натурального k. Но поскольку разности между соседними квадратами натуральных чисел возрастают к бесконечности, то может существовать только конечное число пар (n,k) натуральных n и k, для которых при заданном натуральном a выполняется равенство $n^2-k^2=a$.

Утверждение п. а) задачи мы получим также и при решении её п. б).

б) Пусть $b=p/q$ — несократимое представление дроби b и, согласно условию, a и q — нечётные числа. Обозначим через I_n множество натуральных чисел, принадлежащих отрезку $[qn^2, qn^2+aq/2]$, т. е., так как a и q — нечётные числа, то $I_n=\{qn^2+i : i = =\overline{0,(aq-1)/2}\}$. Пусть также $P=\{(n,m) : n\in\mathbb{N}, pm\in I_n\}$. Подставив в выражение для $M(n,m)$ значение $b=p/q$, получим $M(n,m)=q^{-1}\left|qn\sqrt{n^2+a}-pm\right|$.

Из очевидного двойного неравенства

$$n^2<n\sqrt{n^2+a}<n^2+a/2 \qquad (*)$$

следует, что $qn^2<qn\sqrt{n^2+a}<qn^2+(aq)/2$, а значит, если натуральное число mp не принадлежит множеству I_n, то $M(n,m)\geqslant q^{-1}(1-\{aq/2\})=1/(2q)$ (здесь $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, и поскольку aq нечётно, $\{aq/2\}=1/2$). Поэтому

$$\inf\{M(n,m) : (n,m)\notin P\}\geqslant 1/(2q), \qquad (**)$$

а нули функции $M(n,m)$ могут принадлежать только точкам множества P.

Оценим снизу величину $M(n,m)$ при $(n,m)\in P$ для всех достаточно больших n. Пусть $(n,m)\in P$, тогда $pm=qn^2+i$, где $i\in\{0,1,\ldots,(aq-1)/2\}$. Тогда при таких n и m получаем

$$M(n,m)=q^{-1}\left|qn\sqrt{n^2+a}-qn^2-i\right|=\frac{(q^2a-2qi)n^2-i^2}{q(qn\sqrt{n^2+a}+qn^2+i)}.$$

Поскольку у получившейся дроби числитель наименьший, а знаменатель наибольший при наибольшем возможном значении i, т. е. при $i=(aq-1)/2$, то, подставляя в них это значение i и учитывая правое неравенство $(*)$, получаем, что

$$M(n,m)\geqslant\frac{n^2-(aq-1)^2/4}{2q^2n^2+aq^2-q/2}\to\frac{1}{2q^2}\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

а значит, найдётся такое n_0, что $M(n,m)>1/(4q^2)$ при всех $n\geqslant n_0$ и $(n,m)\in P$. В частности, в силу неравенства $(**)$ это означает, что нули функции $M(n,m)$ могут принадлежать только конечному множеству $P_0=\{(n,m)\in P : n\geqslant n_0\}$. Значит, нулей у функции $M((n,m)$ конечное число. Выберем из ненулевых значений функции $M(n,m)$ на множестве P_0 наименьшее (обозначим его C_0). Тогда в качестве постоянной C можно взять $C=\min\{C_0, 1/(4q^2)\}$. Утверждение п. б) доказано.

Замечание. Несложно привести примеры, показывающие, что предположения п. **б)** задачи существенны для справедливости её утверждения.

11.8. Ответ: при нечётных n победит первый игрок, а при чётных — второй.

Пусть n чётно. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Вначале, аналогично решению ч1. задачи 10 класса, заметим, что можно считать, что первый игрок своим первым ходом соединил две соседние вершины P и Q. Второй игрок своим первым ходом соединяет одну из них с соседней вершиной R. После этого, второй игрок играет в игру для $n-2$ вершин, считая, что вершины P, Q и R "слиплись" в одну.

Осталось проверить, что при $n=4$ второй игрок выигрывает. Первый игрок, без ограничения общности, соединил вершины A_0A_1. Второй игрок своим первым ходом соединит A_2 с центром окружности. После этого останутся три связных компоненты A_0A_1, OA_2 и A_3. Первый игрок своим ходом обязательно свяжет какие-то две из них, после чего второй игрок выиграет.

Пусть n нечётно. Решение задачи аналогично решению задачи 10 класса, поскольку первый игрок сразу задействует центр окружности.

Замечание 1. Условие, наложенное на центр не играет никакой роли, т.к. в обоих случаях он в итоге соединён с вершиной. Однако, оно, усложняет решение с использованием симметрии.

Замечание 2. Чётный случай задачи 10 класса также можно сделать по индукции. Тем не менее, в приведённом решении дан конкретный алгоритм действий.

68-я Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич, И.И.Воронович,
М.В.Карпук, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник