Министерство образования Республики Беларусь

« LXVIII »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Минск 2018

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 68-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Войделевич А.С. (8.3, 9.3, 10.1, 11.2)
Воронович И.И. (10.2, 11.1)
Городнин И.И. (8.4, 9.4)
Карпук М.В. (9.1, 10.3, 11.1, 11.3)
Каскевич В.И. (8.1)
Мазаник С.А. (8.2, 9.2)
Юран А.Ю. (10.4, 11.4)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич, И.И.Воронович, М.В.Карпук, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. На дороге между поселками A и B расположен посёлок M, в два раза ближе к B, чем к A. Однажды Михаил, проживающий в поселке M, пригласил в гости Андрея и Василия, проживающих в поселках A и B. Андрей и Василий не имеют транспорта и могут передвигаться только пешком с одинаковой и постоянной скоростью. У Михаила есть мопед, скорость которого в 9 раз больше скорости приятелей. Михаил может, выехав навстречу, подвести до поселка M сначала Андрея, а потом Василия, или наоборот, сначала Василя, а потом Андрея. Михаил подсчитал, что если его друзья выйдут одновременно в сторону посёлка M, а Михаил в тот же момент выедет сначала на встречу Андрею, то затраченное на весь путь время будет отличаться на $2,4$ минуты от времени, затраченного на весь путь, если он сначала выедет навстречу Василию.

Сколько времени нужно Андрею на путь пешком от A до M?

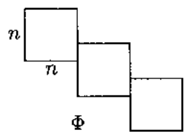
8.2. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) таких, что

$$9^m - 7^m = 2^n.$$

8.3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки B_1 и D_1 симметричны A относительно середин сторон BC и CD соответственно. Описанная окружность треугольника CB_1D_1 пересекает ω в точках C и G.

Докажите, что AG — диаметр окружности ω.

8.4. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру Φ, изображённую на рисунке. (Соседние квадраты соприкасаются по отрезку, длины 1 — стороне клетки.)



Ф

Найдите все $n > 1$, при которых фигуру Φ можно замостить плитками 1×3 и 3×1.

9 класс

9.1. Докажите, что множество всех натуральных делителей любого натурального числа, не являющегося полным квадратом, можно разбить на пары так, что в каждой паре одно число делится на другое.

9.2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ верно неравенство

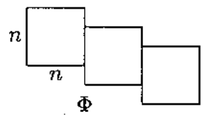
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{n!} \leqslant \frac{3}{2},$$

где через $k!$ обозначено произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

9.3. Биссектриса угла CAB треугольника ABC пересекает сторону CB в точке L. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на прямую AL, а E — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на прямую AB. Прямые CB и DE пересекаются в точке F.

Докажите, что AF — высота треугольника ABC.

9.4. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру Φ, изображённую на рисунке. (Соседние квадраты соприкасаются по отрезку длины $n - 1$.)



Ф

Найдите все $n > 1$, при которых фигуру Φ можно замостить плитками 1×3 и 3×1.

10 класс

10.1. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Описанная окружность треугольника CMD пересекает прямую AC в точках C и E. Описанная окружность треугольника AME пересекает прямую AB в точках A и F.

Докажите, что CF — высота треугольника ABC.

10.2. Существует ли функция f, определенная на множестве положительных действительных чисел и принимающая положительные значения, такая, что

$$f(x+y) \geqslant yf(x) + f(f(x))$$

для всех положительных x и y?

10.3. Для фиксированного натурального числа $n \geqslant 2$ определим последовательность $a_k = \text{НОК}(k, k+1, \ldots, k+(n-1))$.

Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$, для которых последовательность a_k с некоторого момента возрастает.

10.4. На клетчатой плоскости закрасили некоторые клетки так, что фигура A, образованная закрашенными клетками, удовлетворяет следующим двум условиям: 1) у любой клетки фигуры A ровно две соседние (имеющие с ней хотя бы одну общую сторону) принадлежат A; и 2) фигуру A можно разбить на равнобедренные трапеции площади 2 с вершинами в узлах сетки.

Докажите, что количество закрашенных клеток делится на 8.

11 класс

11.1. Найдите все действительные числа a, при которых найдётся функция f, определённая на множестве действительных чисел, принимающая в качестве своих значений все действительные числа ровно по одному разу и удовлетворяющая равенству $f(f(x)) = x^2 f(x) + ax^2$ при всех действительных x.

11.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Биссектриса угла AA_1C пересекает отрезки CC_1 и CA в точках E и D, соответственно. Биссектриса угла AA_1B пересекает отрезки BB_1 и BA в точках F и G, соответственно. Описанные окружности треугольников FA_1D и EA_1G пересекаются в точках A_1 и X.

Докажите, что $\angle BXC = 90°$.

11.3. Для всех пар (m, n) натуральных чисел, которые имеют одинаковое число $k > 1$ делителей введём операцию $\circ$. Выпишем все их делители в порядке возрастания: $1 = m_1 < \ldots < m_k = m$, $1 = n_1 < \ldots < n_k = n$ и положим $m \circ n = m_1 \cdot n_1 + \ldots + m_k \cdot n_k$.

Найдите все пары чисел (m, n), $m \geqslant n$, таких, что $m \circ n = 497$.

11.4. На плоскости нарисован клетчатый многоугольник A (т. е. с вершинами в узлах квадратной сетки и разбивающийся на клеточки). *Внутренними* назовём такие клетки этого многоугольника, у которых все 8 соседних клеток принадлежат A. Все остальные клетки A назовём *граничными*. Известно, что каждая граничная клетка имеет ровно две общие стороны с другими граничными клетками. Кроме того, множество граничных клеток можно разбить на равнобедренные трапеции площади 2 с вершинами в узлах сетки.

Докажите, что площадь многоугольника A при делении на 4 даёт остаток, равный 1.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ: 2 часа.

Пусть расстояние между поселками B и M равно S (км), тогда расстояние между A и M равно $2S$. Обозначим через v (км/ч) скорости Андрея и Василий, тогда скорость Михаила на мопеде равна $9v$.

Рассмотрим случай, при котором Михаил сначала подвозит Андрея. Так как расстояние между A и M равно $2S$, а скорость сближения Андрея и Василия равна $v + 9v = 10v$, то Андрей и Михаил встретятся через $\frac{2S}{10v} = \frac{S}{5v}$ (ч). Столько же времени уйдет на дорогу Михаила с Андреем на мопеде от места встречи то поселка M. За все это время, равное $2 \cdot \frac{S}{5v} = \frac{2S}{5v}$ Василий пройдет расстояние $v \cdot \frac{2S}{5v} = \frac{2S}{5}$. Поэтому, когда Михаил (с Андреем окажутся в поселке M, его и Василия будет разделять расстояние равное $S - \frac{2S}{5} = \frac{3S}{5}$. Следовательно, после выезда из M Михаил встретит и подберет Василия через $\frac{3S}{5} : 10v = \frac{3S}{50v}$. Столько же времени понадобится Михаилу (с Василием) на обратную дорогу до M. В результате, все трое друзей окажутся в поселке M через $\frac{2S}{5v} + 2 \cdot \frac{3S}{50v} = \frac{13S}{25v}$ (ч) после начала движения.

Аналогично подсчитаем такое же время в случае, при котором Михаил сначала подвозит Василия. Время Михаила на дорогу до встречи с Василием и обратно на дорогу с ним до поселка M равно $\frac{S}{5v}$. За это время Андрей пройдет расстояние $\frac{S}{5}$. Поэтому когда Михаил (с Василием прибудут) в поселок М, Андрей буде находиться на расстоянии $2S - \frac{S}{5} = \frac{9S}{5}$. Тогда Михаилу на дорогу от M до встречи с Андреем и обратно понадобится $2 \cdot \frac{9S}{5} : 10v = \frac{18S}{50v}$. В результате, в этом случае все трое друзей окажутся в поселке M через $\frac{S}{5v} + \frac{18S}{50v} = \frac{14S}{25v}$ (ч) после начала движения.

Согласно условию общее время на весь путь в первом случае отличается от аналогичного времени во втором случае на $2,4$ минуты, т. е. на $\frac{1}{25}$ часа. Поэтом имеем:

$$\frac{14S}{25v} - \frac{13S}{25v} = \frac{1}{25},$$

откуда $\frac{S}{v} = 1$. Это означает, что расстояние S Андрей и Василий преодолевают пешком за 1 час. Следовательно, Андрею на дорогу пешком от A до M нужно 2 часа.

8.2. Ответ: $(m, n) = (1, 1)$, $(m, n) = (2, 5)$.

Легко видеть, что пара $(m, n) = (1, 1)$ удовлетворяет условию. Для $m > 1$ воспользуемся формулой сокращённого умножения

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1}).$$

При $a = 9$, $b = 7$, первый множитель равен 2, а второй больше единицы. Поскольку все слагаемые во втором множителе являются нечётными числами и их количество равно

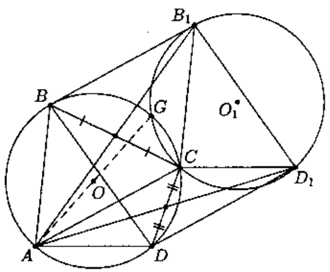
m, то для выполнения равенства из условия необходимо, чтобы m было чётным числом. Пусть $m = 2k$, тогда

$$9^{2k} - 7^{2k} = (9^k - 7^k)(9^k + 7^k) = 2^n.$$

Поэтому, $9^k - 7^k = 2^x$, $9^k + 7^k = 2^y$ где $x < y$ и $x + y = n$. Вычитая из второго равенства первое, получим $2 \cdot 7^k = 2^x(2^{y-x} - 1)$, откуда $x = 1$ и $7^k = 2^{y-1} - 1$. Значит, $7^k + 1$ должно делиться на 2^{y-1}. Однако при $y \geqslant 5$ остаток при делении числа $7^k + 1$ на 16, как легко видеть, равен или 2 или 8, т.е. $7^k + 1$ не делится на 16, и, следовательно, не существует таких натуральных k, при которых пара $(m, n) = (2k, n)$ удовлетворяла бы условию при $n = y + 1 \geqslant 5 + 1 = 6$.

Итак, $n \leqslant 5$ и тогда $y = n - x = n - 1 \leqslant 4$, откуда $7^k = 2^{y-1} - 1 \leqslant 7$, и, значит, $k \leqslant 1$. Легко видеть, что $m = 2k = 2 \cdot 1 = 2$ и $n = 5$ удовлетворяют условию. Таким образом, существует лишь две пары $(m, n) = (1, 1)$, $(m, n) = (2, 5)$, удовлетворяющие условию задачи.

8.3. Так как точка B_1 симметрична вершине A относительно середины стороны BC, то ABB_1C — параллелограмм, а значит, $BB_1 \parallel AC$ и $BB_1 = AC$. Аналогично доказывается, что $DD_1 \parallel AC$ и $DD_1 = AC$. Следовательно, треугольник CD_1B_1 получен из треугольника ADB параллельным переносом вдоль прямой AC на расстояние, равное длине отрезка AC. Пусть O — центр ω, а O_1 — центр описанной окружности треугольника CD_1B_1. Тогда $OO_1 \parallel AC$. Так как линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна общей хорде, то $OO_1 \perp CG$, а значит, $AC \perp CG$. Следовательно, $\angle ACG = 90°$, т.е. AG — диаметр окружности ω.



8.4. Ответ: $n = 3k$, $n = 3k + 1$.

Понятно, что любой прямоугольник, у которого одна из сторон делится на 3 можно замостить плитками. Следовательно, при $n = 3k$, каждый из трёх квадратов, а значит, и всю фигуру, можно замостить плитками.

Докажем, что Φ можно покрыть и при любом n вида $3k + 1$. Положим две горизонтальные плитки так, чтобы каждая из них закрывала две клетки в центральном квадрате и одну в крайнем. Тогда каждый из крайних квадратов разбивается на прямоугольники $(3k+1) \times 3k$ и $3k \times 1$, каждый из которых можно замостить плитками. Незанятая же часть центрального квадрата разбивается на прямоугольники размерами $3k \times 2$, $(3k+1) \times (3k-3)$ и $2 \times 3k$, каждый из которых можно замостить плитками.

Предположим, что при каком-то $n = 3k + 2$ фигуру Φ удалось замостить плитками. Так как каждый квадрат содержит $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ клеток, а два соседних квадрата могут иметь только одну общую (пересекающую их обоих) плитку, то плитки, целиком содержащиеся в верхнем квадрате покрывают его весь, за исключением одной только правой нижней клетки. Раскрасим клетки верхнего квадрата в три цвета как показано на рисунке. Нетрудно видеть, что каждая плитка накрывает по одной клетке каждого цвета. При этом, клеток цвета 2 на одну больше, чем клеток цвета 1. Значит, при $n = 3k + 2$ фигуру Φ замостить нельзя.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	

9 класс

9.1. Рассмотрим произвольное натуральное число n, которое не является полным квадратом. Среди простых делителей n найдётся такой делитель p, что $n = p^{2k+1}m$, где m не делится на p. Построим требуемое разбиение множества делителей числа n на пары. Пусть d — произвольный делитель числа n, а s — максимальная степень p, на которую делится d. Если s — чётное число, то поставим в пару d число pd, а если s — нечётное число, то — d/p. Нетрудно видеть, что указанное разбиение на пары удовлетворяет условию задачи.

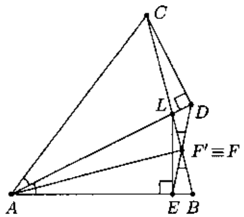
9.2. Преобразуем выражение, стоящее в левой части

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{n!} = \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{3 \cdot 4 \cdots n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

9.3. Пусть AF' — высота, проведенная из вершины A, в треугольнике ABC. Докажем, что точки D, F' и E лежат на одной прямой, тем самым покажем, что $F \equiv F'$ и AF — высота треугольника ABC. Так как $\angle CDA = \angle CF'A = 90°$, то четырёхугольник $CDF'A$ вписан, а значит, $\angle CF'D = \angle CAD$. Так как $\angle AF'L = \angle AEL = 90°$, то четырёхугольник $AEF'L$ — вписан, а значит, $\angle BEF' = \angle LAE$. Так как $\angle CAL = \angle LAB$, то $\angle CF'D = \angle BF'E$, т.е. D, F' и E лежат на одной прямой.



9.4. Ответ: $n = 3k$.

Понятно, что любой прямоугольник, у которого одна из сторон делится на 3 можно замостить плитками. Следовательно, при $n = 3k$ каждый из трёх квадратов, а значит, и всю фигуру, можно замостить плитками.

Предположим, что при каком-то $n = 3k + 1$ или $3k + 2$ фигуру Φ удалось замостить плитками. Для каждого из двух случаев приведём раскраску фигуры Φ в три цвета такую, что каждая плитка накрывает по одной клетке каждого цвета, но клеток различных цветов не поровну. Это будет означать, что замостить фигуру Φ так, как требуется в условии, нельзя. Раскрасим каждый из квадратов так, как показано на рисунке. Нетрудно видеть, что при $n = 3k + 1$ клеток первого цвета, а при $n = 3k + 2$ клеток второго цвета, будет на три больше, чем клеток каждого из остальных цветов.

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1

$n = 3k + 1$

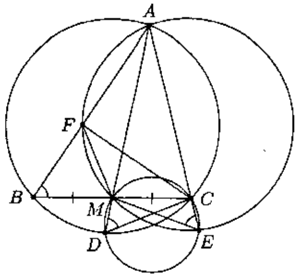
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

$n = 3k + 2$

10 класс

10.1. Докажем равенства $FM = BM = MC$, из которых следует, что $\angle CFB = 90°$. Так как четырёхугольник $ABDC$ вписанный, то

$$\angle ABC = \angle ADC.$$



Точки M, D, E и C лежат на одной окружности, а значит,

$$\angle MDC = \angle MEC.$$

Из вписанного четырёхугольника $AFME$ находим

$$\angle BFM = \angle MEA = \angle FBM.$$

Следовательно, треугольник BFM равнобедренный и $BM = FM$.

10.2. Ответ: не существует.

Предположим, что такая функция существует. Положим $x = 1$ в неравенстве

$$f(x+y) \geqslant yf(x) + f(f(x)). \qquad (1)$$

Получим: $f(1+y) \geqslant ay + b$, где $a = f(1) > 0$, $b = f(f(1)) > 0$. Тогда

$$f(z) \geqslant az + b - a \qquad (2)$$

для любого $z > 1$. Из (2) следует, что $f(x) > 1$ при всех достаточно больших x (а именно, при $x \geqslant \frac{1-b+a}{a}$). Положив в (1) $x = y = \frac{z}{2}$, получим

$$f(z) \geqslant \frac{z}{2} \cdot f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(f\left(\frac{z}{2}\right)\right) > \frac{z}{2} \cdot f\left(\frac{z}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{z}{2}\left(a \cdot \frac{z}{2} + b - a\right) = \frac{a}{4} \cdot z^2 + \frac{b-a}{2} \cdot z.$$

Тогда

$$f(z) > \frac{a}{5} \cdot z^2 > z \qquad (3)$$

при всех достаточно больших z. Далее, имеем

$$f(x+y) \geqslant yf(x) + f(f(x)) > f(f(x)) > f(x)$$

при всех достаточно больших x. Следовательно, $f(x)$ – возрастающая (при достаточно больших x) функция. Поэтому их неравенства $f(x+y) > f(f(x))$ следует, что $x+y > f(x)$ для всех $y > 0$ и всех достаточно больших x. Наряду с (3) это дает $x+y > \frac{a}{5} \cdot x^2$ при всех достаточно больших x, что, очевидно, не верно. Полученное противоречие доказывет,что такой функции не существует.

10.3. Ответ: $n = 2$.

Заметим, что при $n = 2$ последовательность имеет вид $a_k = k(k+1)$, поскольку последовательные числа всегда взаимно просты. Ясно, что $k(k+1) < (k+1)(k+2)$ и последовательность является возрастающей с самого начала.

Первое решение. Докажем, что при $n \geqslant 3$ последовательность не является возрастающей ни с какого момента. Выберем $k = np$, где p — произвольное простое число, большее n. Среди чисел $np+1, np+2, \ldots, np+n-1$ ни одно не делится на p и хотя бы одно чётное. Число $n(p+1)$ также не делится на p, причём $p+1$ является чётным. Следовательно,

$$a_k = p \cdot \text{НОК}(n, np+1, np+2, \ldots, np+n-1),$$

$$a_{k+1} \leqslant \frac{p+1}{2} \cdot \text{НОК}(n, np+1, np+2, \ldots, np+n-1).$$

Значит, $a_k > a_{k+1}$ для неограниченно больших номеров k, и последовательность a_k не является возрастающей ни с какого момента.

Второе решение. Покажем, как ещё можно доказать, что при $n \geqslant 3$ последовательность не является возрастающей ни с какого момента. Пусть a_k возрастает начиная с k_0, тогда при всех $k \geqslant k_0$ верно неравенство $a_{k+1} \geqslant a_k$. Рассмотрим $k = m! - n$, где число $m > \max(n! + n, k_0)$.

Обозначим $\text{НОК}(k+1, \ldots, k+n-1)$ через N. Тогда неравенство $a_{k+1} \geqslant a_k$ перепишется в виде $\text{НОК}(N, m!) > \text{НОК}(m!-n, N)$. Воспользовавшись равенством $\text{НОК}(a,b) \cdot \text{НОД}(a,b) = a \cdot b$, справедливым для любых натуральных чисел a и b, получим:

$$\text{НОК}(N, m!) > \text{НОК}(m!-n, N) \iff \frac{N \cdot m!}{\text{НОД}(N, m!)} > \frac{(m!-n) \cdot N}{\text{НОД}(m!-n, N)},$$

или, после равносильных преобразований,

$$n \cdot \text{НОД}(N, m!) > m! \cdot (\text{НОД}(N, m!) - \text{НОД}(m!-n, N)) \qquad (1)$$

Для всех ℓ от 1 до $n-1$ верны равенства $\text{НОД}(m!, m!-\ell) = \text{НОД}(m!, \ell) = \ell$, следовательно, $(n-1)! \geqslant \text{НОД}(N, m!) \geqslant \text{НОК}(1, 2, \ldots, n-1)$. Кроме того, поскольку $m!$ делится на ℓ, то $\text{НОД}(m!-n, m!-n+\ell) = \text{НОД}(n, n-\ell)$ — делитель числа n. Значит, и число $\text{НОД}(m!-n, N)$ является делителем числа n, (простые делители входят в N в максимальной из степеней их вхождения в $m!-n+1, \ldots, m!-n+(n-1)$).

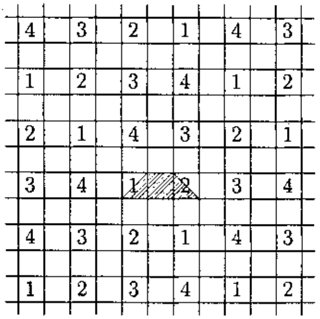
С учётом полученных оценок, из (1) следует неравенство

$$n \cdot (n-1)! > m! \cdot (\text{НОК}(1, 2, \ldots, n-1) - n). \qquad (2)$$

Так как $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n-1) \geqslant (n-2)(n-1)$, то при $n \geqslant 4$ правая часть неравенства (2) не меньше $m!$, откуда получаем, что $n! > m!$ — противоречие. В случае $n = 3$ выполняется равенство $\text{НОД}(N, m!) = \text{НОД}(m!-2, m!) = 2$, но, при этом, $\text{НОД}(m!-n, N) = \text{НОД}(m!-3, (m!-2)(m!-1)) = 1$ и неравенство (1) примет вид $6 > m!$, то тоже неверно.

10.4. Очевидно, что достаточно доказать утверждение задачи для *связных* фигур A (т. е., таких, что от любой клетки можно перейти к любой, проходя только в соседние клетки), так как любая несвязная фигура разбивается на несколько связных частей, у каждой из которых (как мы докажем) количество клеток делится на 8. Раскрасим некоторые из клеток плоскости в четыре цвета, как показано на рисунке.

Не ограничивая общности, можно считать, что какая-то из трапеций разбиения размещается так, как показано на этом рисунке (к такому расположению можно прийти при помощи сдвига, симметрии и поворота раскраски). Начнём обходить клетки фигуры A, начиная с этой трапеции так, что мы переходим по клеткам от закрашенной цветом 1 к закрашенной цветом 2 клетке (назовём такую трапецию трапецией $1 \to 2$). Нетрудно видеть, что при таком обходе виды трапеций чередуются в порядке: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$. Поскольку в какой-то момент мы закончим обход в той клетке цвета 1, с которой начинали, то количество пройденных трапеций делится на 4, а значит, общее количество клеток фигуры A делится на 8.



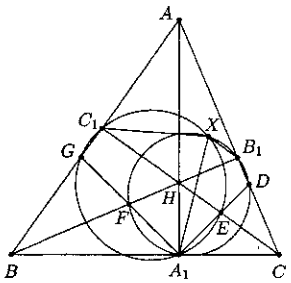
11 класс

11.1. Ответ: $a = 0$.

Для x такого, что $f(x) = -a$, равенство из условия примет вид $f(-a) = 0$. Для $x = -a$ равенство из условия примет вид $f(0) = a^3$. Для $x = 0$ равенство из условия примет вид $f(a^3) = 0$. Значит, согласно условию, $a^3 = -a$, что равносильно $a(a^2+1) = 0$, т.е. $a = 0$.

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ подойдёт функция $f(x) = x|x|$.

11.2. Так как $\angle BB_1C = \angle CC_1B = 90°$, то для того, чтобы доказать утверждение задачи, достаточно показать, что точки B, C_1, X и B_1 лежат на одной окружности. Так как A_1D и A_1G — биссектрисы углов $\angle AA_1C$ и $\angle AA_1B$, соответственно, то $\angle GA_1D = 90°$. Так как $\angle FB_1D = \angle FA_1D = 90°$, то точка B_1 принадлежит описанной окружности треугольника FA_1D. Аналогичным образом доказывается, что точка C_1 принадлежит описанной окружности треугольников EA_1G. Из доказанного следует, что $\angle C_1XA_1 = \angle BGA_1 = 135° - \angle ABC$ и $\angle B_1XA_1 = \angle CDA_1 = 135° - \angle ACB$. Следовательно, $\angle C_1XB_1 = 270° - \angle ABC - \angle ACB = 90° + \angle BAC$. Так как $\angle B_1BA = 90° - \angle BAC$, то $\angle B_1BC_1 + \angle C_1XB_1 = 180°$, а значит, четырехугольник BC_1XB_1 вписан.



11.3. Ответ: $(20, 18)$.

Из определения $\circ$ ясно, что $m \circ n \geqslant 1 + n^2$, значит, $n \leqslant \sqrt{496} < 23$. Заметим, что наименьшее число, которое имеет хотя бы семь делителей — это 24, поэтому, достаточно рассмотреть значения k от 1 до 6.

Ровно два натуральных делителя имеют только простые числа, значит, при $k = 2$ числа m и n простые. Из равенства $m \circ n = 497$ следует, что $mn = 496$. Но $496 = 2^4 \cdot 31$ не является произведением двух простых чисел.

Ровно по три натуральных делителя имеют только квадраты простых чисел. Пусть $m = p^2$, $n = q^2$, тогда $m \cdot n = 1 + pq + (pq)^2 = 497$. Следовательно, $pq(pq+1) = 496 = 2^4 \cdot 31$, $p = 31$, $q = 2$, что не подходит.

Рассмотрим случай $k = 4$. Так как $1 < m_2 < m_3 < m$ — все натуральные делители числа m, то $m = m_2 m_3$, аналогично, $n_2 n_3 = n$. Разложим $m \circ n$ на множители:

$$m \circ n = 1 + m_1 n_1 + m_2 n_2 + (m_1 m_2)(n_1 n_2) = (1 + m_1 n_1)(1 + m_2 n_2).$$

Поскольку $497 = 7 \cdot 71$, то $m_1 n_1 = 6$ и $m_2 n_2 = 60$. Числа m_1 и n_1 простые, значит, одно из них 2, другое 3, а каждое из чисел m_2 и n_2 является либо простым, либо квадратом m_1 и, соответственно, n_1. Нетрудно видеть, что для $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ не подойдёт ни один из вариантов.

Ровно пять делителей имеют только четвёртые степени простых чисел. До 23 есть ровно одно такое число — $n = 2^4$. Заметим, что

$$2^4 \circ 2^4 = (4^5 - 1)/3 = 341 < 497, \quad \text{а} \quad 3^4 \circ 2^4 = (6^5 - 1)/5 = 1555 > 497.$$

При бóльших значениях m решений тем более не найдётся.

Ровно шесть делителей имеют только числа вида p^5 и pq^2, где p и q — простые числа. До 23 есть ровно три таких числа: 12, 18 и 20, рассмотрим их по отдельности.

Пусть $n = 12$. Среди делителей числа 12 ровно два нечётных ($n_1 = 1$ и $n_3 = 3$), а число 497 тоже нечётное, значит $m_2 = 2$ и $m_3 = 4$. Поэтому, m имеет вид 2^5 или $4p$, где простое p больше трёх. $m = 2^5$ невозможно, так как $12 \cdot 32 = 529$. В случае $m = 4p$ получаем уравнение $17 + 64p = 497$, которое не имеет натуральных решений.

Пусть $n = 18$. Поскольку, $18 \circ m > 18 \cdot m + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, то, $18 \leqslant m < 414/18 = 23$. Рассмотрев два варианта $m = 18$ и $m = 20$, получим решение единственное $(20, 18)$.

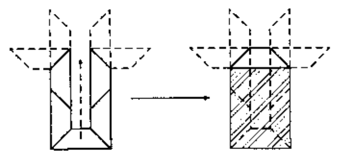
Предположим, что $n = 20$. Так как $20 \circ m > 20m + 10 + 5 + 4 + 2 + 1$, то $20 \leqslant m < 475/20 = 23.75$. Но $20 \circ 20 > 500$, следовательно, решений нет.

11.4. Ясно, что множество граничных клеток описанного в условии многоугольника разбивается на трапеции так, что можно перейти из любой из них в другую, переходя только лишь по боковым сторонам трапеций, не выходя за пределы его. Многоугольник с этим условием назовём *хорошим*. Докажем индукцией по $k \geqslant 2$ следующее утверждение: если площадь хорошего многоугольника $S \leqslant 4k + 1$, то $S \equiv 1 \pmod 4$.

База индукции, $k = 2$. Легко видеть, что в разбиении границы участвуют хотя бы 4 трапеции, при этом если их ровно 4, то многоугольник является квадратом 3×3. Если трапеций хотя бы 5, то площадь $S \geqslant 2 \cdot 5 > 2 \cdot 4 + 1$.

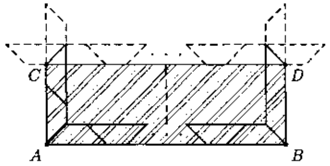
Шаг индукции. Пусть условие верно для $k = n - 1 \geqslant 2$. Покажем его справедливость для $k = n$, т.е. для любого хорошего многоугольника, площадь которого $S \in [4(n-1) + 2; 4n + 1]$.

Рассмотрим любую сторону AB хорошего многоугольника, оба примыкающие угла к которой равны $90°$. Такая всегда найдётся: например, самая нижняя горизонтальная сторона многоугольника.



Пусть $AB = 3$ и многоугольник не является квадратом 3×3. Тогда по две прилегающие к AB трапеции восстанавливаются однозначно и от многоугольника можно отрезать прямоугольник 3×4 и получить снова хороший. Понятно, что при таком отрезании остаток от деления S на 4 не изменится.

Теперь будем считать, что у многоугольника нет сторон длины 3. (Если сторона многоугольника равна 3, то оба её обрамляющих угла по $90°$, что легко увидеть). Будем считать, что $AB = l$. Тогда к соседним с ней сторонам прилегают хоть по 2 трапеции, иначе их длина равна 3.

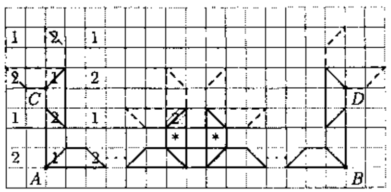


Если в построенном на AB в верхнюю сторону прямоугольнике $CABD$ размером $l \times 4$ нет клеток границы, кроме тех, что имеют общие точки с ломаной $CABD$, этот многоугольник можно отрезать и получить вновь хороший многоугольник, перенеся трапеции, прилегающие к AB на 4 клетки вверх (аналогично случаю $AB = 3$).

Допустим, в $CABD$ есть другие граничные клетки.

Раскрасим клетки плоскости (некоторые) в 2 цвета, как на рисунке. Тогда все граничные клетки вида ⧄ имеют цвет 1, вида ⧅ имеют цвет 2 (т. к. от каждой клетки первого типа клетка второго располагается через одну). Рассмотрим все граничные рамки внутри прямоугольника $CABD$ и выберем среди них нижнюю, не имеющую общих точек с ломаной. Тогда какая-то соседняя с ней слева или справа должна быть граничной, иначе граница не разобьётся на трапеции (если эта клетка окрашена, в ней содержится часть трапеции с горизонтальными основаниями, иначе клетка не нижняя, а если нет, то трапеция, содержащая эту клетку не может иметь вертикальные основания по тем же причинам).

Из двух соседних граничных клеток хотя бы одна пересечена диагональю трапеции. Не нарушая общности, будем считать, что она имеет вид ⧄, на рисунке она закрашена. Тогда она имеет цвет 1 и располагается на две клетки выше, чем клетка цвета 2 вида ⧅, прилегающая к AB, иначе она не сможет располагаться внутри $CABD$, что верно для любой его внутренней клетки цвета 1. Тогда ясно, что часть этой клетки содержит трапеция, располагающаяся справа от неё.



Теперь проведём разрезы, как показано на рисунке, тем самым разрезав многоугольник на 2 других и прямоугольник 3×1. Заметим, что те 2 многоугольника хорошие, т.к. их рамки совпадают с частями рамок начального плюс ещё по 1-й клетке (помеченной (*)), покрываемой трапецией. Их площадями $4a+1$ и $4b+1$ соответственно. Итого площадь многоугольника

$$(4a+1) + (4b+1) + 3 \equiv 1 \pmod 4,$$

что и было нужно.

68-я Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич, И.И.Воронович,
М.В.Карпук, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник