Е. А. **Барабанов**, *ведущий научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси,*
А. С. Войделевич, *аспирант Института математики Национальной академии наук Беларуси,*
И. И. Воронович, *доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета,*
М. В. Карпук, *научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси,*
В. И. Каскевич, *доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета,*
С. А. Мазаник, *заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета*

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 67-Й БЕЛОРУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Второй день

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

5. а) Докажите, что все цифры от 0 до 9 можно разбить на три группы и составить из них три натуральных числа A, B и C (каждая цифра используется ровно один раз, число не может начинаться цифрой 0) так, чтобы выполнялось равенство $A + B = C$?

б) Укажите все возможные значения, которые может принимать сумма цифр числа C.

6. Внутри некоторого выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка M. Оказалось, что $AM = BM$, $CM = DM$ и $\angle AMB = \angle CMD = 60^\circ$. Точки K, L и N — середины отрезков BC, AM и DM соответственно.

Найдите величину угла LKN.

7. а) Докажите, что у выпуклого шестиугольника, противоположные стороны которого попарно параллельны, а все внутренние углы тупые, найдётся такая пара противоположных сторон, что некоторая перпендикулярная им прямая пересекает обе эти стороны.

б) Верно ли, что у такого шестиугольника найдутся две пары противоположных сторон, удовлетворяющих сформулированному в п. **а)** условию ?

8. В городе N центральная площадь имеет вид прямоугольника $(2n + 1) \times m$, составленного из плиток 1×1. Для освещения площади в углах плиток (в том числе и на границе площади) расставляют фонари так, что каждый фонарь освещает все плитки, в углу которых он стоит.

Найдите наименьшее количество фонарей, которое можно расставить так, чтобы фонари освещали всю площадь, даже если один из них перегорит.

IX класс

5. На координатной плоскости Oxy парабола $y = x^2 - 2bx + a + 1$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, а ось ординат — в точке C, отличной от начала координат. Оказалось, что точка с координатами $(a; b)$ является центром окружности описанной около треугольника ABC.

Укажите все возможные значения чисел a и b.

6. Точки K и M — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. На отрезках AM и BK во внешнюю сторону от треугольника ABC построены равносторонние треугольники AMN и BKL. Точка F — середина отрезка LN.

Найдите величину угла KFM.

7. а) Докажите, что у выпуклого $2n$-угольника, противоположные стороны которого попарно параллельны, найдётся такая пара противоположных сторон, что некоторая перпендикулярная им прямая пересекает обе эти стороны.

б) Существуют ли такие n, при которых у такого $2n$-угольника найдутся две пары противоположных сторон, удовлетворяющих сформулированному в п. **а)** условию?

8. В городе N центральная площадь имеет вид прямоугольника $n \times n$, составленного из плиток 1×1. Для освещения площади в углах плиток (в том числе и на границе площади) расставляют фонари так, что каждый фонарь освещает все плитки, в углу которых он стоит.

Найдите наименьшее количество фонарей, которое можно расставить так, чтобы фонари освещали всю площадь, даже если один из них перегорит.

X класс

5. Парабола $y = x^2 - \alpha$ пересекает правую ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ в точке A, а левую её ветвь — в точках B и C.

а) Какие значения может принимать число α, если треугольник ABC оказался прямоугольным?

б) При всех возможных α найдите площадь этого прямоугольного треугольника.

6. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$). Через J_a, J_b и J_c обозначены центры вписанных окружностей треугольников AC_1B_1, BA_1C_1 и CB_1A_1 соответственно.

Докажите, что точка пересечения высот треугольника $J_aJ_bJ_c$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

7. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$(x^2 - y^2)f(xy) = xf(x^2y) - yf(xy^2)$$

выполнено при любых действительных x и y.

8. В городе N центральная площадь имеет вид прямоугольника $2n \times 2m$, составленного из плиток 1×1. Для освещения площади в углах плиток (в том числе и на границе площади) расставляют фонари так, что каждый фонарь освещает все плитки, в углу которых он стоит.

Найдите наименьшее количество фонарей, которое можно расставить так, чтобы фонари освещали всю площадь, даже если один из них перегорит.

XI класс

5. Торт имеет форму треугольника со сторонами 19, 20 и 21 сантиметров. Его разрешается разрезать прямым разрезом на два куска и положить их на плоское круглое блюдо так, чтобы куски не налегали друг на друга и не выступали за край блюда.

Какой наименьший диаметр может иметь это блюдо?

6. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$). Через J_a, J_b и J_c обозначены центры вписанных окружностей треугольников AC_1B_1, BA_1C_1 и CB_1A_1 соответственно.

Докажите, что радиус описанной окружности треугольника $J_aJ_bJ_c$ равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

7. Найдите все функции $f(x)$, определённые для положительных x и принимающие положительные значения, для которых равенство

$$f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y))$$

выполнено при всех положительных x и y.

8. В городе N центральная площадь имеет вид прямоугольника $n \times m$, составленного из плиток 1×1. Для освещения площади в углах плиток (в том числе и на границе площади) расставляют фонари так, что каждый фонарь освещает все плитки, в углу которых он стоит.

Найдите наименьшее количество фонарей, которое можно расставить так, чтобы фонари освещали всю площадь, даже если один из них перегорит.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

5. Ответ: б) 9 или 18.

а) Например, $765 + 324 = 1089$.

б) Так как каждое целое число X сравнимо по модулю 9 с суммой его цифр, то

$$A + B + C \equiv S(A) + S(B) + S(C) = \\ = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0 = \\ = 45 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 9).$$

Тогда, так как по условию $A + B = C$, получаем $2C \equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$, откуда $C \equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$ и, значит, $S(C) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$, т. е. сумма цифр числа C кратна 9. Заметим, что $S(C) = S(A + B) \le S(A) + S(B)$. Действительно, если у чисел A и B суммы цифр во всех разрядах не превышают 9 и при сложении A и B не происходит переноса 1 в старшие разряды, то $S(A + B) = S(A) + S(B)$. В противном случае с каждым переносом 1 в старший разряд сумма цифр $S(A + B)$ становится на 9 меньше, чем $S(A) + S(B)$. Итак, $S(C) < S(A) + S(B)$, причём $S(A) + S(B) + S(C) = 45$. Следовательно, $S(C) \le 45 : 2 = 22{,}5$. Единственными натуральными числами, не превосходящими 22,5 и кратными 9, являются числа 9 и 18. Следующие примеры показывают, что $S(C)$ может принимать оба эти значения: $473 + 589 = 1062$ или $4987 + 26 = 5013$ (сумма цифр 9); $765 + 324 = 1089$ (сумма цифр 18).

6. Ответ: 60°.

Пусть точки E и F — середины отрезков BM и CM, соответственно. Так как

$$\angle AMB = \angle CMD = 60°, \text{ то}$$

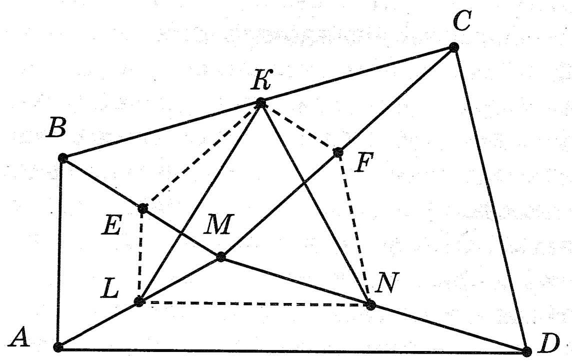
$$\angle BMC = 360° - \angle AMB - \angle CMD - \angle LMN = \\ = 360° - 60° - 60° - \angle LMN = \\ = 240° - \angle LMN.$$

Поскольку KF — средняя линия в треугольнике CBM, то $KF \parallel BM$, и, следовательно, $\angle KFC = \angle BMC$. Тогда

$$\angle KFM = 180° - \angle KFC = 180° - \angle BMC = \\ = 180° - (240° - \angle LMN) = \angle LMN - 60°.$$

Из условия следует, что треугольник CMD равносторонний, так как $CM = DM$ и $\angle CMD = 60°$.

Так как FN — средняя линия треугольника CMD, то треугольник FMN также равносторонний и $FM = NM = FN$, $\angle MFN = 60°$. Поэтому



$$\angle KFN = \angle KFM + \angle MFN = [\angle MFN = 60°] = \angle LMN - 60° + 60° = \angle LMN.$$

Аналогично доказывается, что $\angle KEL = \angle LMN$ и $EM = ML = EL$. Следовательно, $\Delta KEL = \Delta NFK = \Delta NML$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $KL = KN = LN$. Таким образом, треугольник KLN равносторонний и $\angle LKN = 60°$.

7. Ответ: **б)** нет, неверно.

а) Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, все внутренние углы которого тупые, а противоположные стороны параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$ — рис. 1). Рассмотрим его наибольшую сторону (какую-нибудь из таких сторон, если их несколько). Пусть это сторона AB. Так как шестиугольник $ABCDEF$ выпуклый, он целиком лежит в одной из полуплоскостей относительно прямой AB; эту полуплоскость обозначим через Π.

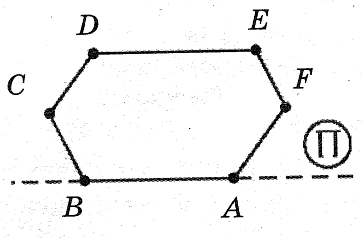


Рисунок 1

Допустим, что никакая прямая, пересекающая сторону AB и перпендикулярная ей, не пересекает сторону DE. Восставим из точек A и B в полуплоскость П перпендикуляры h_A и h_B соответственно (рис. 2). Тогда в силу нашего предположения в полуполосе P_0,

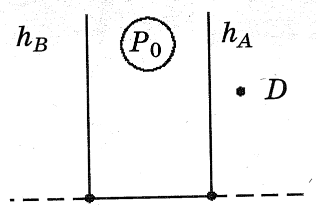


Рисунок 2

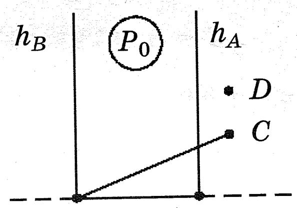


Рисунок 3

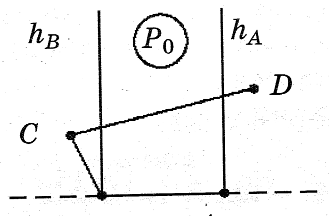


Рисунок 4

образованной лучами h_A, h_B и отрезком AB, нет точек стороны DE. В частности, точка D лежит либо справа от луча h_A, либо слева от луча h_B. Пусть, без нарушения общности, вершина D лежит справа от луча h_A (рис. 2). Тогда вершина C не может лежать ни справа от луча h_A, ни слева от луча h_B. В самом деле, в противном случае получаем соответственно $BC > BA$ (рис. 3) и $CD > BA$ (рис. 4), но каждое из этих неравенств противоречит выбору стороны AB как наибольшей стороны шестиугольника. Значит, вершина C лежит в полуполосе P_0, но тогда угол $\angle ABC$ не является тупым, что противоречит условию задачи. Следовательно, найдётся прямая, перпендикулярная сторонам AB и DE и пересекающая обе эти стороны.

б) Построим выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, все внутренние углы которого тупые, а противоположные стороны параллельны, такой, что у него существует только одна пара противоположных сторон, которые пересекает некоторая перпендикулярная им прямая.

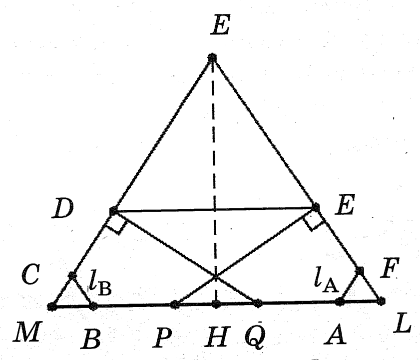


Рисунок 5

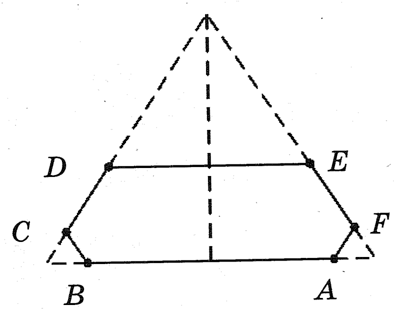


Рисунок 6

Рассмотрим равнобедренный ΔKLM с основанием LM и острым углом при вершине K (рис. 5). Пусть KH — высота ΔKLM. Возьмём какие-либо симметричные относительно точки H точку P на отрезке MH и точку Q на отрезке LH, не совпадающие с концами этих отрезков. Пусть точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону KL, а точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на сторону KM (рис. 5). Тогда $DE \parallel ML$. Далее возьмём на отрезке LQ какую-либо точку A, а на отрезке MP — какую-либо точку B. Проведём через точку A прямую l_A, параллельную прямой KM, а через точку B — прямую, параллельную прямой KL. Пусть F — точка пересечения прямых l_A и KL, а C — точка пересечения прямых l_B и KM (рис. 5). Тогда (рис. 6), как легко следует из построения, шестиугольник $ABCDEF$ — искомый.

По-другому доказать существование нужного шестиугольника можно было бы, например, так. Возьмём правильный шестиугольник $A'BCDE'F'$ (рис. 7). Затем, отложив на продолжениях отрезка DE' за точку E', отрезка CF' за точку F' и отрезка BA' за точку A' равные и достаточно длинные отрезки $E'E$, $F'F$ и $A'A$ соответственно (рис. 7), получим, как несложно видеть, нужный шестиугольник $ABCDEF$.

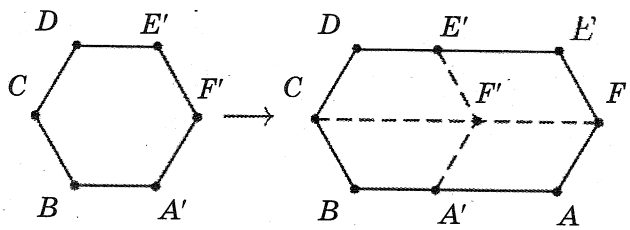


Рисунок 7

8. О т в е т: $2(n+1)\left[\frac{m+1}{2}\right]$, где через $[x]$ обозначена целая часть числа x.

Покрасим некоторые плитки городской площади в чёрный цвет (если $m = 2k+1$ нечётное число, то см. рис. 1, если $m = 2k$ — чётное число, то см. рис. 2).

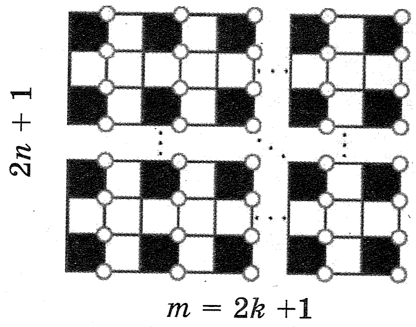


Рисунок 1

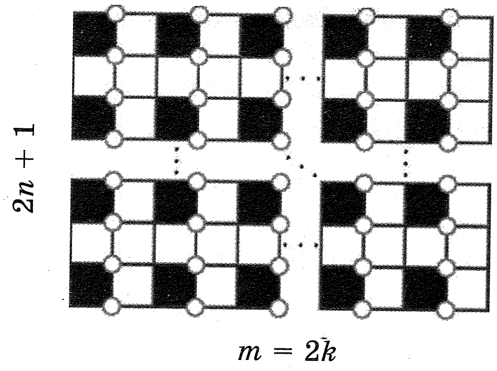


Рисунок 2

Из способа покраски следует, что любой установленный фонарь может освещать не более одной покрашенной плитки. Из условия задачи следует, что каждая плитка площади должна быть освещена не менее чем двумя фонарями, поэтому минимальное необходимое количество фонарей не менее чем $2l$, где l — число покрашенных клеток. Если длина площади m — нечётное число, т. е. $m = 2k + 1$, где $k \geq 0$ — целое число, то

$$l = (n+1)(k+1) = (n+1)\left[\frac{m+1}{2}\right],$$

если же

$$m = 2k, \text{ то } l = (n+1)k = (n+1)\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

С другой стороны, если расположить фонари как показано на рисунках (фонари обозначены незакрашенными кружками), то каждая плитка площади будет освещена двумя фонарями. Таким образом,

$$2l = 2(n+1)\left[\frac{m+1}{2}\right]$$

фонарей достаточно для освещения городской площади требуемым в условии задачи способом.

IX класс

5. Ответ: $a = b = 2$.

Пусть $A(\alpha;\ 0)$, $B(\beta;\ 0)$, $C(0;\ \gamma)$ и $M(a,\ b)$. Поскольку M — центр окружности Г, описанной около треугольника ABC, то M лежит на срединном перпендикуляре отрезка AB, поэтому проекция точки M на ось абсцисс — середина отрезка AB, т. е. $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Так как точки A и B лежат на параболе, то их абсциссы удовлетворяют уравнению $x^2 - 2bx + a + 1 = 0$, и тогда по теореме Виета $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$. Подставляя $x = 0$ в уравнение параболы, находим ординату γ точки $C : \gamma = a + 1$.

Пусть R — радиус окружности Г. Так как C лежит на этой окружности, то

$$R^2 = |MC|^2 = (a - 0)^2 + (b - \gamma)^2 = [a = b,\ \gamma = a + 1] = a^2 + 1.$$

Точки A и B также лежат на окружности Г, следовательно,

$$a^2 + 1 = R^2 = |MA|^2 = |MB|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a - \alpha)^2 + (b - 0)^2 =$$
$$= (a - \beta)^2 + (b - 0)^2 =$$
$$= (a - \alpha)^2 + a^2 = (a - \beta)^2 + a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a - \alpha)^2 = (a - \beta)^2 = 1.$$

Не нарушая общности, считаем $\beta > \alpha$, тогда $\alpha = a - 1$, $\beta = a + 1$. Числа $\alpha = a - 1$, и $\beta = a + 1$ – корни уравнения

$$x^2 - 2bx + a + 1 = 0,$$

поэтому по теореме Виета

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) = \alpha\beta =$$
$$= a + 1 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0.$$

Корнями полученного уравнения являются числа $a = -1$, $a = 2$.

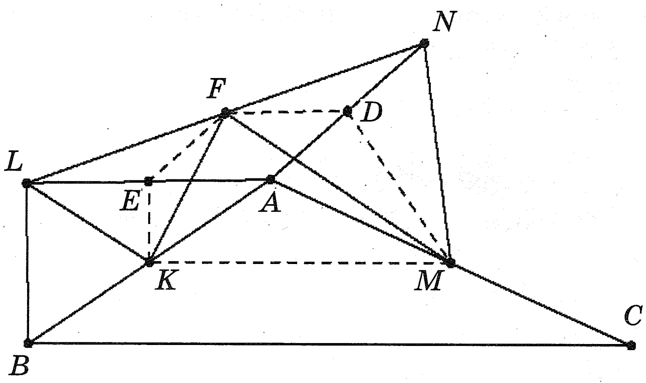
При $a = -1$ имеем $\gamma = 0$, но тогда $C(0;0)$, т. е. C совпадает с началом координат, что противоречит условию.

При $a = 2$ имеем $M(2;\ 2)$, уравнение параболы имеет вид $y = x^2 - 4x + 3$, уравнение окружности — $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Легко проверить, что все условия задачи в этом случае будут выполнены.

6. Ответ: 90°.

Пусть точки A, B и C находятся в одной полуплоскости относительно прямой LN. Пусть E и D — середины отрезков AL и AN соответственно (см. рис.). Так как треугольник BKL по условию равносторонний, а K — середина стороны AB, то $BK = KA = KL$, т. е. медиана LK треугольника BLA равна половине стороны AB, к которой она проведена. Значит, треугольник BLA прямоугольный с прямым углом BLA; кроме того, из условия следует, что $\angle KBL = 60°$. Тогда $\angle LAB = 30°$. Поскольку треугольник ANM равносторонний по условию, то $\angle NAM = 60°$. Следовательно,

$$\angle LAN = 360° - \angle LAK - \angle NAM - \angle KAM = 360° - 30° - 60° - \angle KAM = 270° - \angle KAM. \quad (1)$$



Так как FD и FE — средние линии треугольника LAN, то $FD \parallel LA$ и $FE \parallel NA$, а значит, четырёхугольник $EFDA$ — параллелограмм. Поэтому

$$\angle FDA = \angle FEA = 180° - \angle LAN \overset{(1)}{=} \angle KAM - 90°. \quad (2)$$

Так как D — середина стороны в равностороннем треугольнике ANM, то $\angle MDA = 90°$, и поэтому из (2) следует, что

$$\angle FDM = \angle FDA + \angle MDA = \angle KAM - 90° + 90° = \angle KAM. \quad (3)$$

Аналогично доказывается, что

$$\angle FEK = \angle KAM. \qquad (4)$$

Поскольку $EFDA$ — параллелограмм, как было доказано выше, то

$$FD = EA = [\angle KEA = 90°,$$
$$\angle EAK = 30°] = KA\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Кроме того, DM = $[\angle MDA = 90°$, $\angle MAD = 60°] = MA\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, имеем: $FD : DM = KA : MA$, поэтому, учитывая равенства (3), получаем, что треугольники FDM и KAM подобны, откуда следует, что

$$\angle MFD = \angle MKA, \angle FMD = \angle KMA.$$

Значит,

$$\angle KMF = \angle KMA + \angle AMF =$$
$$= \angle FMD + \angle AMF = \angle AMD = 30°.$$

Аналогично доказывается, что $\Delta KEF \sim \Delta KAM$, так как

$$KE : EF = KE : AD = \frac{1}{2}KA : \frac{1}{2}MA =$$
$$= KA : MA, \angle KEF = \angle KAM.$$

Поэтому $\angle EKF = \angle AKM$, и тогда

$$\angle FKM = \angle FKA + \angle AKM = \angle FKA +$$
$$+\angle EKF = \angle EKA = 60°.$$

Таким образом,

$$\angle KFM = 180° - \angle KMF - \angle FKM =$$
$$= 180° - 30° - 60° = 90°.$$

Случай, когда точки A и B, C находятся в разных полуплоскостях относительно прямой LN, рассматривается аналогично.

7. О т в е т: **б)** нет, не существуют.

а) Назовём диагональ выпуклого $2n$-угольника главной, если между вершинами, которые она соединяет, находится по $n - 1$ вершин (с одной и с другой стороны) $2n$-угольника.

Допустим, что существует выпуклый $2n$-угольник $A_0A_1 \ldots A_{2n-1}$, противоположные стороны которого параллельны ($A_iA_{i+1} \parallel A_{i+n}A_{i+n+1}$, $i = 0,\ldots n - 1$, а $A_{2n} = A_0$), такой, что ни для какой пары его противоположных сторон не существует перпендикулярной им прямой, пересекающей обе эти стороны. Возьмём какие-либо две параллельные стороны A_iA_{i+1} и $A_{i+n}A_{i+n+1}$ такого $2n$-угольника. Пусть O_i — точка пересечения прямых A_iA_{i+n} и $A_{i+1}A_{i+n+1}$. Рассмотрим треугольники $\Delta O_iA_iA_{i+1}$ и $\Delta O_iA_{i+n}A_{i+n+1}$ (рис. 1). Поскольку их углы, вершины которых — вершины $2n$-угольника, — это внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых A_iA_{i+1} и $A_{i+n}A_{i+n+1}$ и соответствующей секущей, то $\angle O_iA_iA_{i+1} = \angle O_iA_{i+n}A_{i+n+1}$ и $\angle O_iA_{i+1}A_i = \angle O_iA_{i+n+1}A_{i+n}$ (угловую меру этих углов обозначим через α и β соответственно). Если бы оба эти угла были не тупые, то существовала бы прямая, перпендикулярная сторонам A_iA_{i+1} и $A_{i+n}A_{i+n+1}$ и пересекающая их, — такой прямой являлась бы, например, прямая, проходящая через точку O_i перпендикулярно A_iA_{i+1}. Поэтому либо α, либо β больше 90°.

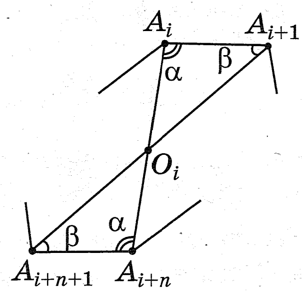


Рисунок 1

Каждая диагональ разбивает угол, из вершины которого она выходит, на два угла. Указанную пару углов назовём примыкающими к этой диагонали (ясно, что к каждой диагонали примыкает две пары углов). Проведём в $2n$-угольнике все главные диагонали и пронумеруем, двигаясь по ходу часовой стрелки, последовательно числами от 1 до $4n$ все $4n$ получившихся примыкающих к ним углов (рис. 2). Как доказано выше, либо угол 1, либо угол $4n$ тупой. Пусть, без нарушения общности, тупым является угол 1. Тогда угол 2 острый (внутренний угол выпуклого $2n$-угольника меньше развёрнутого), а значит, вследствие доказанного выше, угол 3 тупой и т. д. Получаем, что все углы с нечётными номерами тупые, а с нечётными — острые, т. е. в паре углов, примыкающих к любой главной диагонали, один угол тупой, а другой — острый. Рассмотрим тогда наибольшую из главных диагоналей $2n$-угольника (какую-нибудь, если их несколько). Пусть это диагональ A_iA_{n+i} (рис. 1) и пусть, без

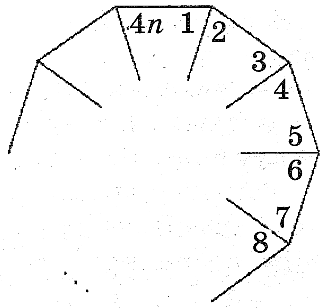


Рисунок 2

нарушения общности, углы $\angle O_iA_iA_{i+1} = \angle O_iA_{i+n}A_{i+n+1}$ тупые. Тогда поскольку в треугольнике против большего угла лежит и большая сторона, $A_{i+1}A_{n+i+1} > A_iA_{n+i}$, но это неравенство невозможно, так как главная диагональ A_iA_{n+i} наибольшая. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно, а значит, в любом выпуклом $2n$-угольнике, противоположные стороны которого попарно параллельны, найдётся такая пара противоположных сторон, что некоторая перпендикулярная им прямая пересекает обе эти стороны.

б) Рассмотрим правильный $2n$-угольник S с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-1}$. Как и прежде, считаем, что $A_{2n} = A_0$. Выберем вектор $\vec{v}$, для которого справедливы соотношения

$\angle(\vec{v}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) \neq 90°$ при $i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, и $\left|\angle(\vec{v}, \overrightarrow{A_{2n-1}A_0})\right| < \dfrac{180°}{n}$, где через $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ обозначен угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Для произвольного $\lambda > 0$ через S_λ обозначим выпуклый многоугольник с вершинами

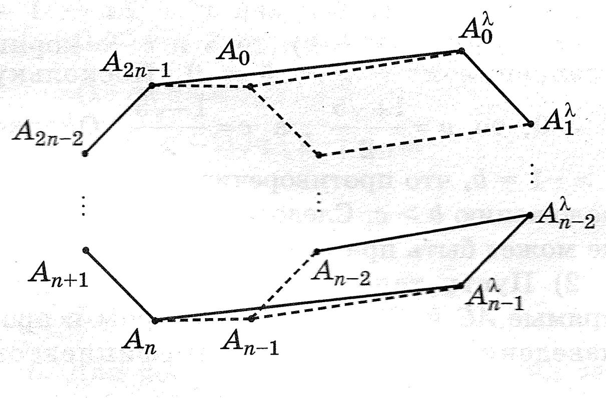


Рисунок 3

$$A_0^\lambda, A_1^\lambda, \ldots, A_{n-1}^\lambda, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{2n-1},$$

где $A_i^\lambda = A_i + \lambda\vec{v}$ при i от 0 до $n-1$ (выпуклость многоугольника S_λ следует из неравенств $\left|\angle(\vec{v}, \overrightarrow{A_{2n-1}A_0})\right| < \dfrac{180°}{n}$. При достаточно большом λ в многоугольнике S_λ единственной парой противоположных сторон, такой, что некоторая перпендикулярная им прямая пересекает обе эти стороны, является пара $(A_{2n-1}A_0^\lambda, A_{n-1}^\lambda A_n)$.

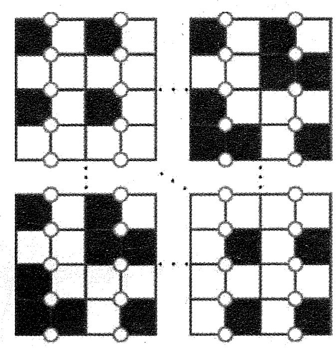
8. Ответ: $\begin{cases} 2k^2 + k, & \text{если } n = 2k; \\ 2(k+1)^2, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$

Если длина n стороны городской площади — нечётное число, т. е. $n = 2k + 1$, то, как следует из решения задачи 8 для VIII класса, минимальное количество фонарей, необходимое для освещения площади требуемым в условии задачи образом, не менее чем

$$2(k+1)\left[\frac{n+1}{1}\right] = 2(k+1)^2.$$

Пусть теперь $n = 2k$ — чётное число. Покрасим некоторые плитки площади в чёрный цвет (рис. 1). Рассмотрим плитки, образующие покрашенные уголки (рис. 2). Нетрудно видеть, что для освещения каждой из этих плиток не менее чем двумя фонарями суммарно необходимо не менее трёх фонарей. Из способа покраски следует, что произвольный установленный фонарь не может освещать две покрашенные плитки, не являющиеся соседними (соседними мы называем плитки, имеющие общую сторону или угол). Таким образом, минимальное необходимое коли-

$n = 2k$



$n = 2k$

Рисунок 1

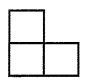


Рисунок 2

чество фонарей равно $3r + 2l$, где r — количество покрашенных уголков, а l — количество одиночных покрашенных плиток. Так как $r = k$ и $l = k^2 - k$, то необходимо не менее $3r + 2l = 2k^2 + k$ фонарей.

С другой стороны, если расположить фонари, как показано на рисунке (фонари обозначены незакрашенными кружками), то каждая плитка площади будет освещена двумя фонарями. Таким образом, $2k^2 + k$ фонарей достаточно для освещения городской площади требуемым в условии задачи способом.

X класс

5. Ответ: а) $\alpha = 2$, б) $S(ABC) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

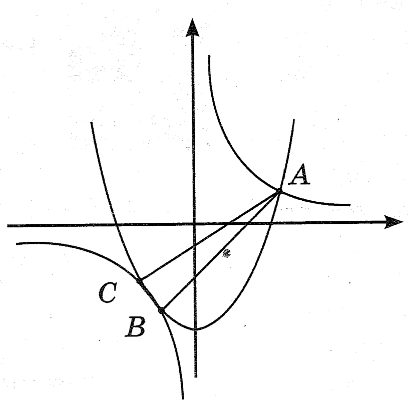
а) Пусть $A(a;\ \frac{1}{a})$, $B(b;\ \frac{1}{b})$, $C(c;\ \frac{1}{c})$ (см. рис.) Из условия следует, что $a > 0$ и $b < 0$, $c < 0$. Не нарушая общности, считаем $c < b$. Поскольку точки A, B, C — точки пересечения параболы и гиперболы, то их абсциссы удовлетворяют уравнению $x^2 - \alpha = \frac{1}{x}$ т. е., учитывая, что, очевидно, $x \neq 0$, уравнению

$$x^3 - \alpha x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Из теоремы Виета для кубического многочлена получаем

$$a + b + c = 0, \qquad (2)$$

$$abc = 1. \qquad (3)$$



Поскольку точка A лежит в первой четверти, а B и C — в третьей, то легко видеть, что угол BAC меньше прямого. Следовательно, в треугольнике ABC прямыми могут быть лишь углы ABC либо ACB.

Запишем уравнение прямой AB: для этого в уравнение прямой $y = kx + d$ подставим координаты точек A и B и найдём $k = \frac{-1}{ab}$, $d = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Таким образом, уравнение прямой AB имеет вид:

$$y = -\frac{1}{ab}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Совершенно аналогично записываем уравнения прямой AC:

$$y = -\frac{1}{ac}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

и прямой BC:

$$y = -\frac{1}{bc}x + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1) Предположим, что $\angle ABC = 90°$. Тогда прямые AB и BC перпендикулярны и произведение их угловых коэффициентов равно -1, т. е.

$$\left(-\frac{1}{ab}\right)\cdot\left(-\frac{1}{bc}\right) = -1$$

откуда $ab^2c = -1$. Из равенства (3) получаем $b = -1$. Тогда, подставляя это значение b в уравнение (1), находим $-1 + \alpha - 1 = 0$, откуда $\alpha = 2$. Таким образом, a и c — ещё два корня уравнения (1) при $\alpha = 2$, отличные от -1. Так как $x^3 - 2x - 1 = (x + 1)(x^2 - x - 1)$, то a и c — корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Поскольку $a > 0$, то $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Однако $c > -1 = b$, что противоречит нашему предположению $b > c$. Следовательно, угол ABC не может быть прямым.

2) Пусть теперь $\angle ACB = 90°$. Тогда прямые AC и BC перпендикулярны и произведение их угловых коэффициентов равно -1, т. е. $\left(-\frac{1}{ac}\right)\cdot\left(-\frac{1}{bc}\right) = -1$, откуда

$ab^2c = -1$. Из равенства (3) получаем $c = -1$.

Аналогично предыдущему случаю находим $\alpha = 2$ и $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Заметим, что в данном случае наше предположение $b > c$ выполнено.

Итак, единственным значением при котором треугольник ABC является прямоугольным, является $\alpha = 2$.

б) Так как треугольник ABC прямоугольный, то его площадь $S(ABC) = 0{,}5AC \cdot BC$. Поэтому для вычисления длин сторон достаточно подставить для координат точек A, B, C найденные значения a, b, c. Но можно поступить и по-другому:

$$AC^2 = (c-a)^2 + ((c^2-\alpha)-(a^2-\alpha))^2 =$$

$$=(c-a)^2+(c^2-a^2)^2=(c-a)^2(1+(c+a)^2)\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}(c-a)^2(1+b^2)=[c=-1]=(-1-a)^2(1+b^2)=$$

$$=(1+a)^2(1+b^2);$$

$$BC^2=(c-b)^2+((c^2-\alpha)-(b^2-\alpha))^2=$$

$$=(c-b)^2+(c^2-b^2)^2=(c-b)^2(1+(c+b)^2)\overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=}(c-b)^2(1+a^2)=[c=-1]=(-1-b)^2(1+a^2)=$$

$$=(1+b)^2(1+a^2).$$

Поскольку a и b — корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, то, во-первых, $a^2 = a + 1$, $b^2 = b + 1$ и, во-вторых, по теореме Виета $a + b = 1$, $ab = -1$. Поэтому

$$AC\cdot BC=|1+a||1+b|\sqrt{(2+a)(2+b)}=$$

$$=[a>0, b>c=-1]=(1+a)(1+b)\sqrt{(2+a)(2+b)}=$$

$$=(1+a+b+ab)\sqrt{4+2(a+b)+ab}=$$

$$=(1+1-1)\sqrt{4+2-1}=\sqrt{5}.$$

Окончательно,

$$S(ABC)=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

6. Для доказательства утверждения задачи установим справедливость следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC* ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$), тогда справедливы равенства

$$\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1 = \angle CAB,$$
$$\angle C_1B_1A = \angle CB_1A_1 = \angle ABC,$$
$$\angle AC_1B_1 = \angle A_1C_1B = \angle BCA.$$

Доказательство. Так как $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90°$, то AC_1A_1C — вписанный четырёхугольник, а значит,

$$\angle BA_1C_1 = 180° - \angle C_1A_1C =$$
$$= 180° - (180° - \angle CAB) = \angle CAB.$$

Оставшиеся равенства из утверждения леммы доказываются аналогично.

Лемма 2. *Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, тогда*

$$\angle AIC = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle BIA = 90° + \frac{1}{2}\angle BCA \text{ и}$$

$$\angle CIB = 90° + \frac{1}{2}\angle CAB.$$

Доказательство. Действительно, так как сумма углов в треугольнике равна 180°, то

$$\angle AIC = 180° - \angle IAC - \angle ICA =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BCA) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC.$$

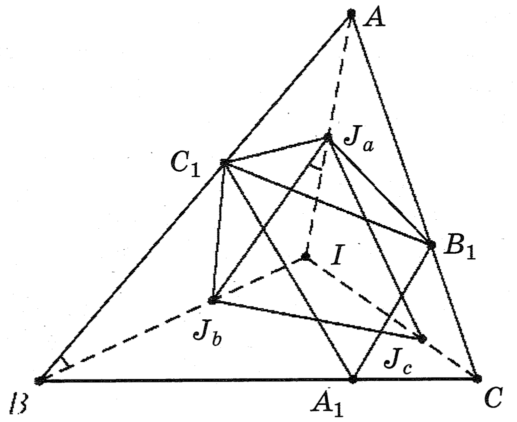
Равенства $\angle BIA = 90° + \frac{1}{2}\angle BCA$ и $\angle CIB = 90° + \frac{1}{2}\angle CAB$ доказываются аналогично. Лемма доказана.

Перейдём к решению задачи. Из леммы 1 следует, что треугольник AC_1B_1 подобен треугольнику A_1C_1B, при этом точка J_a соответствует точке J_b, а значит,

$$\frac{J_aC_1}{J_bC_1} = \frac{C_1B_1}{C_1B} \text{ и}$$

$$\angle J_aC_1B_1 = \angle J_bC_1B.$$

Следовательно, треугольник $J_aC_1J_b$ подобен треугольнику B_1C_1B согласно второму



признаку подобия треугольников. Действительно,

$$\angle J_aC_1J_b = \angle J_aC_1B_1 + \angle B_1C_1J_b = \\ = \angle J_bC_1B + \angle B_1C_1J_b = \angle B_1C_1B$$

и

$$\frac{J_aC_1}{C_1B_1} = \frac{J_bC_1}{C_1B}.$$

Из леммы 1 следует, что $\angle J_bJ_aC_1 = \angle BB_1C_1 = 90° - \angle ABC$. Так как биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I — центре вписанной окружности, то $J_a \in AI$, $J_b \in BI$ и $J_c \in CI$. Из леммы 2 следует, что $\angle C_1J_aA = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$. Следовательно,

$$\angle J_bJ_aI = 180° - \angle C_1J_aA - \angle J_bJ_aC_1 = \\ = \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Аналогичным образом доказываются равенства

$$\angle J_bJ_cI = \frac{1}{2}\angle ABC,\ \angle J_cJ_aI = \angle IJ_bJ_c = \\ = \frac{1}{2}\angle BCA \text{ и } \angle IJ_cJ_a = \angle J_aJ_bI = \frac{1}{2}\angle CAB.$$

Так как $\angle IJ_aJ_b + \angle J_aJ_bJ_c = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) = 90°$, то $J_aI \perp J_bJ_c$. Аналогично доказывается, что $J_bI \perp J_cJ_a$ и $J_cI \perp J_aJ_b$, т. е. I — точка пересечения высот треугольника $J_aJ_bJ_c$.

7. О т в е т: $f(x) = ax$, где a — любое действительное число.

Подставляя $y = 0$ в исходное равенство

$$(x^2 - y^2)f(xy) = xf(x^2y) - yf(xy^2), \quad (1)$$

получаем $x^2f(0) = xf(0)$ при всех x, откуда

$$f(0) = 0. \quad (2)$$

Подставляя $y = 1$ в равенство (1), получаем

$$(x^2 - 1)f(x) = xf(x^2) - f(x) \Rightarrow x^2f(x) = xf(x^2).$$

Сокращая на $x \neq 0$, получаем

$$f(x^2) = xf(x) \quad (3)$$

для всех $x \neq 0$, а с учётом (2) и при $x = 0$, т. е. для всех действительных x. Подставляя $-x$ в (3) вместо x, получаем

$$-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x),$$

т. е. искомая функция является нечётной.

Подставим $y = \frac{1}{x}$ в равенство (1). Тогда

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)f(1) = xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),$$

откуда

$$(x^4 - 1)f(1) = x^3f(x) - xf\left(\frac{1}{x}\right) \quad (4)$$

для любого $x \neq 0$.

Подставим в полученное равенство x^2 вместо x:

$$(x^8 - 1)f(1) = x^6f(x^2) - x^2f\left(\frac{1}{x^2}\right) \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} (x^8 - 1)f(1) = x^7f(x) - xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

Вычитая из этого равенства равенство (4), получаем

$$(x^8 - x^4)f(1) = (x^7 - x^3)f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4(x^4 - 1)f(1) = x^3(x^4 - 1)f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^4 - 1)(f(x) - xf(1)) = 0.$$

Сокращая на $x^4 - 1 \neq 0$, находим $f(x) = f(1)x$ при всех $x = \pm 1$. Впрочем, при $x = 1$ это равенство тоже, очевидно, верно; а в силу нечётности $f(x)$, оно верно и при $x = -1$. Положим $f(1) = a$. Тогда решение уравнения (1) имеет вид $f(x) = ax$, где a —

некоторое действительное число. Легко проверить, что все такие функции действительно удовлетворяют исходному уравнению.

8. О т в е т : $2nm + \min\{n, m\}$.

Без нарушения общности предположим, что $n \leq m$. Покрасим некоторые плитки городской площади в чёрный цвет (рис. 1). Рассмотрим плитки, образующие покрашенные уголки (рис. 2). Нетрудно видеть, что для освещения каждой из этих плиток не менее чем двумя фонарями, суммарно необходимо не менее трёх фонарей. Из способа покраски следует, что произвольный установленный фонарь не может освещать две покрашенные плитки, не являющиеся соседними (соседними мы называем плитки, имеющие общую сторону или угол). Таким образом, минимальное необходимое количество фонарей не менее чем $3r + 2l$, где r — количество покрашенных уголков, а l — количество одиночных покрашенных плиток. Так как $r = n$ и $l = nm - n$, то необходимо не менее $3r + 2l = 2nm + n = 2nm + \min\{n, m\}$ фонарей.

С другой стороны, если расположить фонари как показано на рисунке (фонари обозначены незакрашенными кружками), то каждая плитка площади будет освещена двумя фонарями. Таким образом, $2nm + \min\{n, m\}$ фонарей достаточно для освещения городской площади требуемым в условии задачи способом.

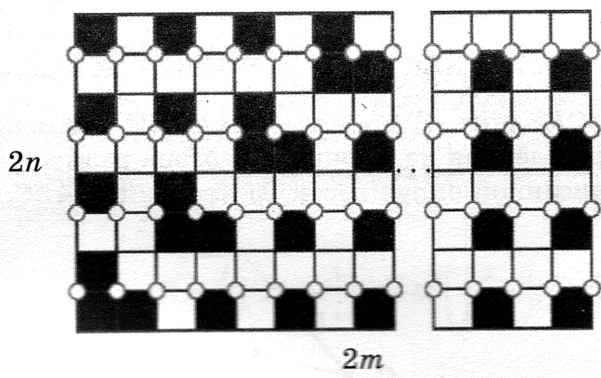


Рисунок 1

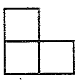


Рисунок 2

XI к л а с с

5. О т в е т: 19 сантиметров.

Нужно разрезать треугольник со сторонами 19, 20 и 21 прямой линией так, чтобы две образовавшиеся фигуры можно было бы без пересечений поместить в круге наименьшего диаметра. Заметим, что, как бы мы ни провели прямую, она не пересечёт одну из сторон данного треугольника, и тогда диаметр круга не может быть меньше этой стороны. Следовательно, кругом диаметра меньше 19 обойтись не удастся.

Докажем, что данный треугольник (назовём его ABC) можно разрезать прямой на две фигуры так, чтобы поместить их в круге диаметра 19. Для удобства дальнейших вычислений обозначим $BC = 19 = c - 1$, $AB = 20 = c$, $AC = 21 = c + 1$. Тогда полупериметр и площадь треугольника ABC будут соответственно равны

$$p = \frac{3}{2}c,$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}c \cdot \frac{1}{2}c \cdot \left(\frac{c}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{c}{2} + 1\right)} = \frac{c}{4}\sqrt{3(c^2 - 4)}.$$

Тогда наименьшая высота (она проведена к наибольшей стороне AC) равна

$$BB_1 = \frac{2S}{AC} = \frac{c\sqrt{3(c^2 - 4)}}{2(c + 1)}.$$

Построим на наименьшей стороне $BC = c - 1$ как на диаметре окружность.

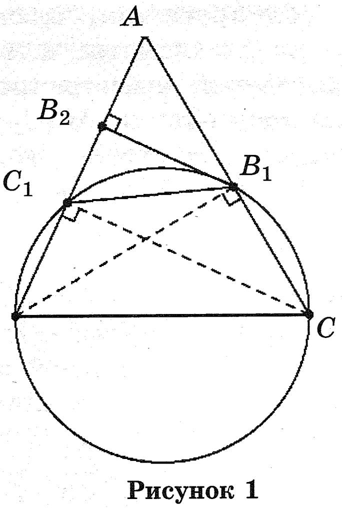


Рисунок 1

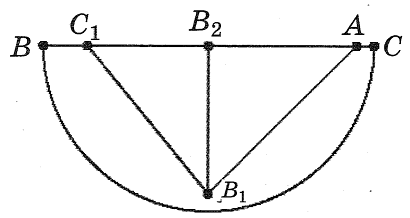


Рисунок 2

Она пересечёт стороны AC и AB данного треугольника в точках B_1 и C_1 соответственно, таких, что BB_1 и CC_1 — высоты треугольника.

Проведём разрез по прямой B_1C_1. Четырёхугольник BC_1B_1C уже помещён в данном круге (в верхнем его полукруге) диаметра 19 (рис. 1).

Осталось показать, что треугольник AB_1C_1 можно разместить в нижнем полукруге построенного круга. Заметим, что этот треугольник подобен исходному треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos A$, который легко находим из теоремы косинусов

$$(c-1)^2 = c^2 + (c+1)^2 - 2c(c+1)\cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{c+4}{2(c+1)}.$$

Проведём в треугольнике AB_1C_1 высоту B_1B_2 (меньшую из всех его высот); она равна

$$B_1B_2 = BB_1\cos A = \frac{c(c+4)\sqrt{3(c^2-4)}}{4(c+1)^2}.$$

Теперь расположим треугольник AB_1C_1 в нижнем полукруге так, чтобы сторона AC_1 лежала на его диаметре, а точка B_2 совпадала с серединой диаметра (рис. 2). Для того, чтобы треугольник AB_1C_1 помещался в полукруге, достаточно, чтобы отрезки B_2C_1, B_2A и B_2B_1 были меньше радиуса полукруга, т. е. меньше $\frac{c-1}{2}$. Заметим, что из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 следует, что $B_1C_1 < B_1A$ (так как $BC < BA$). Поэтому $B_2C_1 < B_2A$ (меньшей наклонной соответствует меньшая проекция). Далее, при $c = 20$ имеем $\cos A = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, так что угол A превышает 45°. Поэтому из прямоугольного треугольника AB_2B_1 имеем $B_2A < B_2B_1$. Таким образом, достаточно проверить лишь неравенство $B_2B_1 < \frac{c-1}{2}$, т. е.

$$\frac{c(c+4)\sqrt{3(c^2-4)}}{4(c+1)^2} < \frac{c-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c(c+4)\sqrt{3(c^2-4)} < 2(c+1)(c^2-1).$$

Заметим, что $c(c+4) < (c+1)(c+3)$ и $c^2-4 < c^2-1$, поэтому нужное неравенство

$$(c+1)(c+3)\sqrt{3(c^2-1)} < 2(c+1)(c^2-1) \Leftrightarrow$$

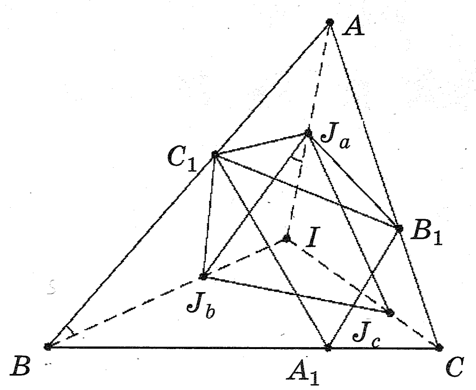
$$\Leftrightarrow (c+3)\sqrt{3} < 2\sqrt{c^2-1} \Leftrightarrow 3(c^2+6c+9) <$$

$$< 4(c^2-1) \Leftrightarrow c^2-18c-31 > 0.$$

Легко видеть, что последнее неравенство выполнено при $c = 20$.

Таким образом, наименьший возможный диаметр круга равен $c - 1 = 19$.

6. Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$. В решении задачи 6 для X класса установлено подобие треугольников $J_aC_1J_b$ и B_1C_1B. Следовательно, справедливо равенство $\frac{J_aJ_b}{BB_1} = \frac{C_1J_a}{C_1B_1} = \frac{CI}{BC}$. Поэтому $J_aJ_b = \frac{BB_1 \cdot CI}{BC}$. Так как BB_1 — высота в треугольнике ABC, то $\frac{BB_1}{BC} = \sin\gamma$, т. е. $J_aJ_b = CI \cdot \sin\gamma$. В треугольнике CBI высота, проведённая из вершины I, равна радиусу r вписанной окружности треугольника ABC.



Следовательно, $r = CI \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$. В решении задачи **6** для X класса установлены равенства:

$$\angle J_aJ_bI = \angle IJ_cJ_a = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle J_bJ_cI = \angle IJ_aJ_b = \frac{\beta}{2},$$

$$\angle J_cJ_aI = \angle IJ_bJ_c = \frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому $\angle J_bJ_cJ_a = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Из теоремы синусов следует, что $R = \dfrac{J_aJ_b}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$, где R — радиус описанной окружности треугольника $J_aJ_bJ_c$. Таким образом,

$$R = \frac{J_aJ_b}{2\cos\frac{\lambda}{2}} = \frac{CI\cdot\sin\gamma}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = CI\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = r.$$

7. О т в е т: $f(x) = ax$, $a > 0$.

Положив в исходном равенстве

$$f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y)) \qquad (1)$$

переменную y равной 1, получим

$$f(x + f(x)) = f(1 + f(1))x. \qquad (2)$$

Пусть $k = f(1 + f(1))$. Из условия задачи следует, что $k > 0$. В равенство (2) вместо x подставим $x + f(x)$, получим:

$$f(x + f(x) + f(x + f(x))) = k(x + f(x)).$$

Следовательно,

$$f((k + 1)x + f(x)) = k(x + f(x)).$$

Заменяя в последнем равенстве x на $\frac{x}{k+1}$, будем иметь

$$f\left(x+f\left(\frac{x}{k+1}\right)\right) = \frac{k}{k+1}x + kf\left(\frac{x}{k+1}\right). \qquad (3)$$

Из равенства (1) при $y = \frac{1}{k+1}$ следует, что

$$f\left(x+f\left(\frac{x}{k+1}\right)\right) = xf\left(1+f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right). \qquad (4)$$

Из равенств (3), (4) и того, что $k \neq 0$, вытекает, что $f(x) = ax$, где a — некоторая постоянная. Так как $f(x) > 0$ при $x > 0$, то $a > 0$.

Непосредственная проверка показывает, что для произвольного $a > 0$ функция $f(x) = ax$ действительно удовлетворяет условию задачи.

8. О т в е т: $\begin{cases} \dfrac{nm+\min\{n,m\}}{2}, & \text{если } n \text{ и } m \text{ чётные числа;} \\ 2\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\dfrac{m+1}{2}\right], & \text{если хотя бы одно из чисел } n \text{ или } m \text{ нечётно.} \end{cases}$

Пусть длины сторон городской площади — чётные числа, т. е. существуют такие натуральные числа k_1 и k_2, для которых выполнены равенства $n = 2k_1$ и $m = 2k_2$. Согласно решению задачи 8 для X класса наименьшее количество фонарей, которое можно расставить так, чтобы фонари освещали всю площадь, даже если один из них перегорит, равно

$$2k_1k_2 + \min\{k_1, k_2\} = \frac{nm + \min\{n,m\}}{2}.$$

Предположим теперь, что длина хотя бы одной стороны городской площади — нечётное число. Без потери общности будем считать, что $n = 2k + 1$ для некоторого целого неотрицательного числа k, т. е. ширина площади — нечётное число. Тогда, как следует из решения задачи 8 для VIII класса, минимальное количество фонарей, необходимое для освещения площади требуемым в условии задачи образом, равно

$$2(k+1)\left[\frac{m+1}{2}\right] = 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Замечание. Нетрудно видеть, что ответ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} 2\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\dfrac{m+1}{2}\right]+\dfrac{\min\{n,m\}}{2}, \text{ если } n \text{ и } m \text{ чётные числа;} \\ 2\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\dfrac{m+1}{2}\right], \text{ если хотя бы одно из чисел } n \text{ или } m \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Авторы задач: Е. А. Барабанов, С. И. Бородачёв, А. С. Войделевич, И. И. Воронович, Е. В. Жибрик, П. А. Иржавский, В. П. Карамзин, М. В. Карпук, В. И. Каскевич, И. В. Качан, Е. Г. Кукель, С. А. Мазаник, Б. Ю. Серенков, С. Ю. Чернов.

Рэдактар і карэктар *М. М. Шавыркіна.*
Камп'ютарны набор и вёрстка *Н. М. Шалухо.*

Выхад у свет 28.08.2017.
Фармат 60×84 $^1/_8$. Папера афсетная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 7,44.
Ул.-выд. арк. 7,44. Тыраж 927 экз. Заказ 116. Цана свабодная.

Паштовы адрас рэдакцыі часопіса «МАТЭМАТЫКА»:
вул. Будзённага, 21, 220079, г. Мінск.
Матэрыялы можна высылаць на адрас: пр-т Незалежнасці, 4, 220050, г. Мінск, Белдзяржуніверсітэт, факультэт прыкладной матэматыкі, пакой 333; тэл. 209-50-72.

Надрукавана ў друкарні Таварыства з абмежаванай
адказнасцю «СУГАРТ».
ЛП № 02330/427 ад 17.12.2012.
Вул. Валгаградская, 6, корп. 2, каб. 287, 220012, г. Мінск.