Е. А. Барабанов, *ведущий научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси,*
А. С. Войделевич, *аспирант Института математики Национальной академии наук Беларуси,*
И. И. Воронович, *доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета,*
М. В. Карпук, *научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси,*
В. И. Каскевич, *доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета,*
С. А. Мазаник, *заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета*

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 67-Й БЕЛОРУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Первый день

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. На нескольких карточках записали при этом одно натуральные числа, при этом одно и то же число могло быть записано на нескольких карточках, и на каждой карточке записаны хотя бы два различных числа. Две карточки назовём *соседними*, если наименьшее число на одной из них является наибольшим на другой.

Докажите, что если соседних карточек нет, то все записанные числа можно разбить на две группы так, что на каждой карточке будет хотя бы по одному числу из каждой группы.

2. Пусть $p = \overline{abc}$ — десятичная запись некоторого трёхзначного простого числа p.

Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет рациональных корней.

3. Найдите все возможные значения действительного числа a, для которого существуют такие попарно различные ненулевые действительные числа x, y и z, что справедливы равенства

$$x-\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=y-\frac{z}{x}-\frac{x}{z}=$$
$$=z-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=a.$$

4. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Катет CB делится точкой P в отношении $1 : 2$, считая от вершины C. Прямая, проходящая через вершину B, пересекает отрезки AC, AP и PM в точках X, Y и Z соответственно.

Докажите, что точка C принадлежит биссектрисе угла PZY тогда и только тогда, когда точка C принадлежит биссектрисе угла PYX.

IX класс

1. Натуральное число назовём *красивым*, если оно равно сумме квадратов трёх своих различных натуральных делителей. (К делителям числа причисляются также единица и само число.)

а) Докажите, что любое красивое число делится на 3.

б) Существует ли бесконечно много красивых чисел?

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки K и M — середины сторон AB и AC соответственно. Окружность, описанная около треугольника CKB, вторично пересекает прямую BM в точке N, отличной от точки M. Через точку N проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая окружность, описанную около треугольника ABC, в точках A_1 и C_1.

Докажите, что треугольник A_1BC_1 равносторонний.

3. Докажите что для любых положительных чисел x, y, z, t выполнено неравенство

$$\frac{xyzt}{(x+y)(z+t)} \le \frac{(x+z)^2(y+t)^2}{4(x+y+z+t)^2}.$$

4. Каждый из шести школьников записался в какие-то два из четырёх работающих в школе кружков, причём среди этих школьников нет выбравших одни и те же два кружка. Все кружки работают каждый день. В течение нескольких последовательных дней каждый из шести школьников посещал один из выбранных им кружков. Оказалось, что в любой из этих дней в каждый кружок приходили один или два из школьников, причём какие бы два из этих дней ни выбрать, найдётся школьник, посетивший в эти два дня разные кружки.

Найдите максимальное количество дней, при котором возможна ситуация, описанная в условии задачи.

X класс

1. Натуральное число назовём *красивым*, если оно равно сумме четвёртых степеней пяти своих различных натуральных делителей. (К делителям числа причисляются также единица и само число.)

а) Докажите, что всякое красивое число делится на 5.

б) Существует ли бесконечно много красивых чисел?

2. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются в точке U, а биссектрисы углов BAC и BDC — в точке V. Пусть точка S — середина отрезка UV.

Докажите, что прямые SD и AB перпендикулярны тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADC и BDC касаются друг друга.

3. Попарно различные ненулевые действительные числа x, y и z удовлетворяют равенствам $x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx$.

а) Найдите все возможные значения, которые может принимать выражение

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}.$$

б) Докажите, что

$$9xyz = -(x + y + z)^3.$$

4. В однокруговом турнире участвуют n игроков ($n \ge 3$.) У каждого игрока есть рейтинг — число от 1 до n, при этом игрок с более высоким рейтингом всегда побеждает игрока с более низким (например, игрок с рейтингом 1 выигрывает у любого другого). Чтобы турнир был интересным, было решено, что игру каждых двух участников судят все остальные. Каждый судья начисляет одно очко победителю, и за игру участник получает сумму начисленных ему очков. При этом каждому игроку в течение турнира разрешено сжульничать во время судейства (начислить очко проигравшему), но не более чем столько раз, каков его рейтинг.

При каком наибольшем n самый слабый игрок может занять в таком турнире первое место?

XI класс

1. Найдите все положительные действительные числа α, при которых существует бесконечная последовательность положительных чисел x_1, x_2, ..., таких, что

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}$$

при всех $n \geq 1$.

2. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезок AC в точках A и B_1 ($B_1 \neq$ A). Описанная окружность треугольника AMC пересекает отрезок AB в точках A и C_1 ($C_1 \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AC_1B_1. Докажите равенство $OB = OC$.

3. Пусть $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа 65^k при некотором $k \geq 2$. Докажите, что многочлен

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

не имеет рациональных корней.

4. Боря и Женя играют в следующую игру: они по очереди отмечают по одной точке окружности, при этом Боря ходит первым и красит свои точки в белый цвет, а Женя — в чёрный (никакую точку нельзя отметить дважды). После того как каждый из них отметит по n точек, каждая из остальных точек окружности автоматически окрашивается в цвет ближайшей к ней отмеченной точки, если такая есть; в противном случае она остаётся неокрашенной. Затем Боря и Женя вычисляют сумму длин дуг, окрашенных в белый и чёрный цвета соответственно. Выигрывает тот игрок, чья сумма окажется большей.

Для всех натуральных $n \geq 2$ определите, может ли кто-то из мальчиков гарантировать себе победу независимо от действий другого. Если да, то кто?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Покажем, как построить требуемое разбиение. Вначале выберем на каждой карточке наименьшее число и поместим его в I группу, тогда на каждой карточке найдётся хотя бы одно число из I группы.

Поместим все оставшиеся числа во II группу и покажем, что на каждой карточке найдётся хотя бы одно число из II группы. Действительно, поскольку по условию нет соседних карточек, то наибольшее число на одной карточке не может быть наименьшим ни на какой другой и, следовательно, принадлежит II группе.

2. *Первое решение.* Допустим, что трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет рациональный корень. Тогда его дискриминант является полным квадратом, т. е. $b^2 - 4ac = n^2$, где n — некоторое целое неотрицательное число, меньшее b. После домножения равенства $p = 100a + 10b + c$ на $4a$ получаем равенство

$$4ap = 400a^2 + 40ab + 4ac = 400a^2 + \\ + 40ab + b^2 - n^2,$$

в котором выделим квадрат суммы:

$$4ap = (20a + b)^2 - n^2 = \\ = (20a + b + n)(20a + b - n).$$

Два последних сомножителя имеют одинаковую чётность, и поскольку их произведение делится на 4, то оба они чётны. Поэтому

$$ap = \left(10a + \frac{b-n}{2}\right)\left(10a + \frac{b+n}{2}\right) —$$

разложение на натуральные множители числа, делящегося на простое число p, следовательно, хотя бы один из сомножителей не меньше p. Однако даже для большего из сомножителей верно неравенство

$$\left(10a+\frac{b+n}{2}\right)\le 10a+b\le 99<p.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Второе решение (аналогично решению задачи 3 для XI кл.). Предположим, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет рациональный корень. Так как коэффициенты-цифры трёхчлена неотрицательны и не все нули, то его корень должен быть отрицательным. Представим его в виде несократимой дроби $-\frac{k}{m}$, где k и m — взаимно простые натуральные числа. Как известно, k и m — делители цифр c и a соответственно, а значит, сами являются цифрами.

Условие задачи равносильно двум равенствам:

$$100a + 10b + c = p$$

и

$$\left(\frac{k}{m}\right)^2 a-\frac{k}{m}b+c=0.$$

Вычитая из первого равенство второе, получим

$$\left(10^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)a+\left(10+\frac{k}{m}\right)b=p.$$

Домножим обе части этого равенство на m^2 и вынесем в левой части множитель $10m + k$, получим

$$(10m + k)((10a + b)m - ak) = pm^2.$$

В последнем равенстве правая часть делится нацело на $10m + k$, но по условию p — трёхзначное простое число, следовательно, m^2 делится на $10m + k$. Так как m и k взаимно просты, то НОД$(10m + k, m) = 1$, значит, $10m + k = 1$, что, очевидно, неверно.

3. О т в е т: $a = 1$.

Пусть

$$A=x-\frac{y}{z}-\frac{z}{y},\ B=y-\frac{z}{x}-\frac{x}{z}$$

$$\text{и}\quad C=z-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}.$$

Из условия задачи следует, что

$$0=A-B=(x-y)+\frac{x-y}{z}-\frac{z(x-y)}{xy}=$$

$$=(x-y)\left(1+\frac{1}{z}-\frac{z}{xy}\right)=\frac{(x-y)(xyz+xy-z^2)}{xyz}.$$

Так как $x \ne y$, то $z^2 - xy - xyz = 0$. Аналогично, рассматривая разность $B - C$, получаем равенство $x^2 - yz - xyz = 0$. Следовательно,

$$0 = (z^2 - xy - xyz) - (x^2 - yz - xyz) =$$
$$= (z - x)(x + y + z).$$

Так как $x \ne z$, то $x + y + z = 0$. Разделив это равенство последовательно на x, y и z, получим цепочку равенств

$$1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1=0.$$

Следовательно,

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-3.$$

В силу того, что $3a = A + B + C$, получаем

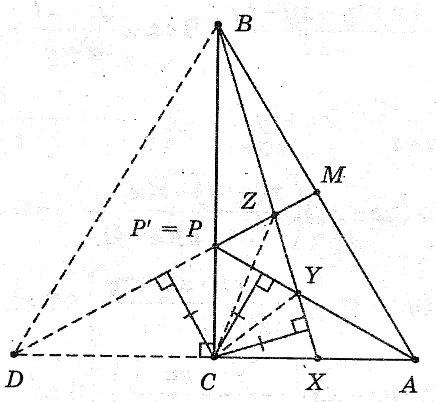
$$a=\frac{1}{3}\left(x+y+z-\frac{y}{z}-\frac{z}{y}-\frac{z}{x}-\frac{x}{z}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(0+3)=1.$$

Покажем, что найденное значение a действительно возможно. Несложно проверить, что числа $x = 4$, $z=-2+\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $y=-2-\frac{2}{\sqrt{5}}$ удовлетворяют условию задачи при $a = 1$.

4. Пусть D — точка, симметричная точке A относительно вершины C (см. рис.). В треугольнике ABD отрезок BC является высотой и медианой, следовательно, треугольник ABD равнобедренный. Аналогичным образом доказывается, что треугольник ADP является равнобедренным. Пусть P' — точка пересечения медиан DM и BC треугольника ABD. Так как медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от соответствующих вершин, то точки P и P' совпадают. Так как точка C принадлежит биссектрисе угла DPA, то она равноудалена от прямых DP и PA.

Если вершина C принадлежит биссектрисе угла PZY, то C равноудалена от прямых PZ и ZY, а значит, C равноудалена от прямых YP и YX, т. е. точка C принадлежит биссектрисе угла PYX. Обратное утверждение доказывается аналогично.



IX класс

1. Ответ: **б)** да, существует.

а) Пусть N — красивое число, т. е. $N=d_1^2+d_2^2+d_3^2$, где d_1 d_2, d_3 — различные делители числа N. Если какой-либо делитель числа N делится на 3, то и само число N делится на 3.

Предположим поэтому, что числа d_1, d_2, d_3 не кратны 3. Тогда их квадраты при делении на 3 дают остаток 1, т. е. $d_i^2=3k_i+1$, $k_i \in \mathbb{N}$, i = 1, 2, 3. Поэтому $N=d_1^2+d_2^2+d_3^2=3(k_1+k_2+k_3)+3$, а значит, N делится на 3.

б) Красивое число N существует. Например, в качестве такого числа можно взять число $N = 30$, а в качестве его делителей — числа $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 5$, при этом

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=1^2+2^2+5^2=1+4+25=30=N.$$

Рассмотрим число $N(p) = Np^2$, где p — некоторое натуральное число, большее 1. Если d_1, d_2, d_3 — различные делители числа N, то, очевидно, числа d_1p, d_2p, d_3p — различные делители числа $N(p)$, и, кроме того,

$$N(p)=Np^2=\left[N=d_1^2+d_2^2+d_3^2\right]=$$
$$=(d_1^2+d_2^2+d_3^2)p^2=(d_1p)^2+(d_2p)^2+(d_3p)^2.$$

Полученное равенство означает, что число $N(p)$ также является красивым. Поскольку в качестве числа p можно взять любое натуральное число, а натуральных чисел бесконечно много, то и чисел $N(p)$, обладающих указанным в условии свойством, будет бесконечно много.

Таким способом можно найти различные бесконечные серии красивых чисел, например, $N = 30p^2$, или $N = 126p^2$, или $N = 195p^2$, или $N = 870p^2$, поскольку

$$30 = 1^2 + 2^2 + 5^2,$$
$$126 = 3^2 + 6^2 + 9^2,$$
$$195 = 1^2 + 5^2 + 13^2,$$
$$870 = 2^2 + 5^2 + 29^2.$$

2. Так как четырёхугольник $KBCN$ вписан в окружность и NB — биссектриса угла KBC, то хорды KN и NC равны (рис. 1). Поскольку точка N лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, то $AN = NC$, значит, точка N — центр описанной окружности треугольника AKC.

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Опустим из точек N и O перпендикуляры на прямую AB (рис. 2). Так как центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, то перпендикуляр из точки O попадёт в точку K, середину стороны AB, а перпендикуляр из точки N — в точку T, середину отрезка AK.

Из теоремы Фалеса заключаем, что $BO : ON = BK : KT = 2 : 1$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике A_1BC_1 центр описанной окружности O совпадает с точкой пересечения медиан, и, значит, этот треугольник равносторонний.

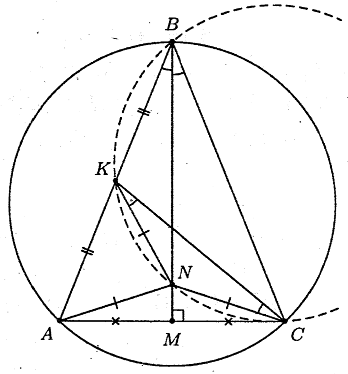


Рисунок 1

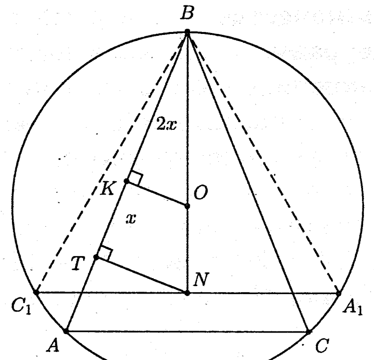


Рисунок 2

3. *Первое решение.* Требуемое неравенство

$$\frac{xyzt}{(x+y)(z+t)} \le \frac{(x+z)^2(y+t)^2}{4(x+y+z+t)^2} \qquad (1)$$

равносильно неравенствам

$$\frac{4xyzt}{(x+y)(z+t)} \le \frac{(x+z)^2(y+t)^2}{(x+y+z+t)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{\frac{xyzt}{(x+y)(z+t)}} \le \frac{(x+z)(y+t)}{(x+y+z+t)}.$$

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем

$$2\cdot\sqrt{\frac{xyzt}{(x+y)(z+t)}} \le \frac{xy}{x+y}+\frac{zt}{z+t}.$$

Поэтому для доказательства (1) достаточно доказать неравенство

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{zt}{z+t} \le \frac{(x+z)(y+t)}{(x+y+z+t)},$$

которое равносильно неравенству

$$(x+y+z+t)\left(\frac{xy}{x+y}+\frac{zt}{z+t}\right) \le (x+z)(y+t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy+\frac{xy(z+t)}{x+y}+zt+\frac{zt(x+y)}{z+t} \le$$

$$\le xy+xt+zy+zt \Leftrightarrow \frac{xy(z+t)}{x+y}-xt+$$

$$+\frac{zt(x+y)}{z+t}-zy \le 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{y(z+t)}{x+y}-t\right)+$$

$$+z\left(\frac{t(x+y)}{z+t}-y\right) \le 0 \Leftrightarrow x\frac{yz+yt-xt-yt}{x+y}+$$

$$+z\frac{tx+ty-zy-ty}{z+t} \le 0 \Leftrightarrow x\frac{yz-xt}{x+y}+$$

$$+z\frac{tx-zy}{z+t} \le 0 \Leftrightarrow (yz-xt)\left(\frac{x}{x+y}-\frac{z}{z+t}\right) \le$$

$$\le 0 \Leftrightarrow (yz-xt)\left(\frac{x(z+t)-z(x+y)}{(x+y)(z+t)}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (yz-xt)\left(\frac{xz+xt-zx-zy}{(x+y)(z+t)}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (yz-xz)\left(\frac{xt-zy}{(x+y)(z+t)}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(yz-xt)^2}{(x+y)(z+t)} \le 0.$$

Последнее неравенство очевидно выполнено, а следовательно, выполнено и требуемое неравенство (1).

Хотя для решения задачи это ненужно, отметим, что равенство достигается только при $x = z$, $y = t$.

Второе решение. Требуемое неравенство

$$\frac{xyzt}{(x+y)(z+t)} \le \frac{(x+z)^2(y+t)^2}{4(x+y+z+t)^2}$$

равносильно неравенству

$$\frac{(x+y)(z+t)}{xyzt} \geq \frac{4(x+y+z+t)^2}{(x+z)^2(y+t)^2}.$$

Далее

$$\frac{2(x+y+z+t)}{(x+z)(y+t)} = \frac{2}{x+z} + \frac{2}{y+t}.$$

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем

$$\frac{2}{x+z} \leq \frac{1}{\sqrt{xz}}, \quad \frac{2}{y+t} \leq \frac{1}{\sqrt{yt}},$$

откуда

$$\frac{4(x+y+z+t)^2}{(x+z)^2(y+t)^2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yt}}\right)^2. \qquad (2)$$

Кроме того,

$$\frac{(x+y)(z+t)}{xyzt} = \frac{xz+xt+yz+yt}{xyzt} \geq$$

$$\geq \left[xt+yz \geq 2\sqrt{xyzt}\right] \geq \frac{xz+2\sqrt{xzyt}+yt}{xyzt} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{xz}+\sqrt{yt}\right)^2}{\left(\sqrt{xyzt}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yt}}\right)^2. \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) получаем требуемое неравенство (1). Действительно,

$$\frac{(x+y)(z+t)}{xyzt} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yt}}\right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{4(x+y+z+t)^2}{(x+z)^2(y+t)^2}.$$

4. Ответ: 24 дня.

Заметим, что из четырёх кружков можно составить ровно $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ различных пар — столько же, сколько и школьников. Следовательно, для каждой пары кружков найдётся ровно один школьник, который записался именно в эти два кружка. Так как по условию каждый кружок посещали один или два школьника, а всего кружков четыре, то каждый день какие-то два кружка посещали два школьника и какие-то два кружка посещали по одному.

Рассмотрим какой-либо день. Пусть в этот день кружки A и B посетили по два школьника. Поскольку, как доказано, найдётся школьник, который записался именно в эти два кружка, то пусть, без нарушения общности, он посетил в этот день кружок A. Оставшиеся два кружка C и D посетили в этот день по одному школьнику. Опять же найдётся школьник, который записался именно в эти два кружка C и D, и пусть он посетил кружок C. Покажем, что этой информации достаточно, чтобы однозначно определить, кто из школьников и какой кружок посетил в этот день.

Поскольку в рассматриваемый день кружок C посетил только один школьник — тот, который записался в кружки C и D, то школьник, который записался в кружки A и C, посетил кружок A, а школьник, который записался в кружки B и C, — кружок B. Далее, так как кружок A посетили в этот день два школьника — и это школьники, один из которых записался в кружки A и B, а другой — в кружки A и C, то школьник, записавшийся в кружки A и D, посетил в этот день кружок D. Наконец, школьник, записавшийся в кружки B и D, посетил кружок B, так как кружок D посетил в этот день только один школьник — тот, который записался в кружки A и D.

Имеется ровно $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ способов выбрать пару (A, B) кружков — тех, которые посетили два школьника, и для каждой такой пары двумя способами можно назначить тот кружок, который посетил школьник, записавшийся в эти два кружка, а из оставшихся двух кружков C и D можно двумя способами выбрать тот кружок, который посетил школьник, записавшийся в кружки C и D. Следовательно, всего получаем $6 \times 2 \times 2 = 24$ различных дня.

X класс

1. Ответ: б) да, существует.

а) Пусть N — красивое число, т. е. $N = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4$, где d_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ —различные делители числа N. Если какой-либо делитель числа N делится на 5, то и N делится на 5.

Предположим поэтому, что числа d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 не кратны 5. Но четвёртая степень любого не делящегося на 5 числа при делении на 5 даёт остаток 1. Действительно, если $M = 5k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$), то $M^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) и $M^4 = (5m + 1)^2 = 25m^2 + 10m + 1$, т. е. M^4 при делении на 5 даёт в остатке 1; если $M = 5k \pm 2$ ($k \in \mathbb{N}$), то $M^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5m + 4$ ($m \in \mathbb{N}$) и $M^4 = (5m + 4)^2 = 25m^2 + 40m + 16$, т. е. M^4 при делении на 5 даёт в остатке 1. Следовательно, четвёртая степень любого из делителей d_i (которые по предположению не кратны 5) при делении на 5 даёт остаток 1, т. е. $d_i^4 = 5k_i + 1$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Но тогда

$$N = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4 = $$
$$= 5(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) + 5,$$

откуда следует, что N делится на 5.

б) Пусть существует красивое натуральное число N, т. е.

$$N = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4,$$

где d_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — различные делители числа N. Рассмотрим число $N(p) = Np^4$, где p — некоторое натуральное число, большее 1. Если d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 — различные делители числа N, то, очевидно, числа d_1p, d_2p, d_3p, d_4p, d_5p — различные делители числа $N(p)$ и, кроме того,

$$N(p) = Np^4 = \left[N = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4\right] =$$
$$= (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4)p^4 =$$
$$= (d_1p)^4 + (d_2p)^4 + (d_3p)^4 + (d_4p)^4 + (d_5p)^4.$$

Полученное равенство означает, что число $N(p)$ также является красивым. Поскольку в качестве числа p можно взять любое натуральное число, а натуральных чисел бесконечно много, то и красивых чисел $N(p)$ будет бесконечно много, если существует хотя бы одно красивое число N. Осталось заметить, что число $N = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 6^4 + 34^4$ является красивым. Действительно, очевидно, что N делится на 2. Делимость N на 3 следует из того факта, что числа 1^4, 2^4 и 34^4 дают остаток 1 при делении на 3. Поскольку N — чётное число, кратное 3, то N делится на 6. Кроме того,

$$N = 1^4 + 2^4 + 3^4 \cdot (1^4 + 2^4) + 34^4 =$$
$$= (1^4 + 2^4)(1^4 + 3^4) + 34^4 = 17 \cdot (1^4 + 3^4) +$$
$$+ 34^4,$$

откуда следует, что N делится на 34. Следовательно, данное N — красивое число.

Существование красивых чисел можно установить также следующим образом. Пусть n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 — некоторые различные натуральные числа и

$$N_0 = n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 + n_4^4 + n_5^4. \qquad (*)$$

Положим

$$N = N_0 n_1^4 n_2^4 n_3^4 n_4^4 n_5^4.$$

Очевидно, что числа $d_i = n_i n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, являются различными делителями числа N. Кроме того,

$$N = N_0 n_1^4 n_2^4 n_3^4 n_4^4 n_5^4 =$$
$$= (n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 + n_4^4 + n_5^4) n_1^4 n_2^4 n_3^4 n_4^4 n_5^4 =$$
$$= (n_1 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5)^4 + (n_2 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5)^4 +$$
$$+ (n_3 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5)^4 + (n_4 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5)^4 +$$
$$+ (n_5 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5)^4 = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4,$$

откуда следует, что построенное число N является красивым. Например, взяв числа $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 5$, $n_5 = 7$, получим

$$N = 3124 \cdot 16 \cdot 81 \cdot 625 \cdot 2401 =$$
$$= 6\,075\,586\,440\,000.$$

Заметим, что указанный способ построения требуемых чисел позволяет доказать, что таких чисел бесконечно много. Действительно, зафиксируем числа n_i, n_2, n_3, n_4, например, положим $n_i = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 5$, а в качестве числа n_5 будем брать любое натуральное число, большее 5. Тогда все числа

$$N(n_5) = (1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 + n_5^4) \cdot 1^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot n_5^4$$

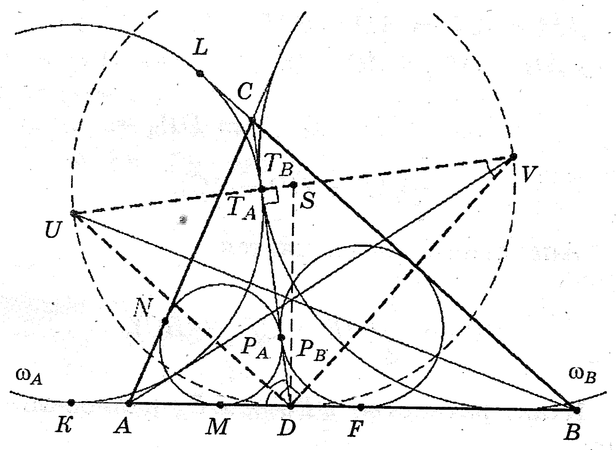
являются красивыми. Поскольку натуральных чисел, больших 5, бесконечно много, то и красивых чисел $N(n_5)$ бесконечно много.

2. Заметим, что вне зависимости от расположения точки D треугольник UDV прямоугольный, поскольку $\angle UDV =$

$$= \angle UDC + \angle VDC = \frac{1}{2}\angle ADC + \frac{1}{2}\angle BDC =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$ Значит, S — центр описанной окружности ΔUDV, а условие $SD \perp AB$ равносильно касанию этой окружности и прямой AB, что, в свою очередь, равносильно равенству углов $\angle ADU = \angle DVU$. Пусть прямые UV и CD пересекаются в точке T. Поскольку $\angle ADU = \angle CDU$, то условие $\angle ADU = \angle DVU$ равносильно $\angle UDT = \angle UVD$, т. е. подобию $\Delta UTD \sim \Delta UDV$, а оно равносильно равенству $\angle UTD = 90°$. Итак, $SD \perp AB$ равносильно $UV \perp CD$.

Далее заметим, что U и V — центры вневписанных окружностей для ΔBDC и ΔADC соответственно (обозначим их ω_A и ω_B соответственно). Обозначим точки касания окружностей ω_A и ω_B со стороной CD через T_A и T_B соответственно. Легко видеть, что условие $UV \perp CD$ равносильно тому, что $T_A = T_B = T$, что равносильно $DT_A = DT_B$.

Пусть окружность ω_A касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Используя равенство отрезков касательных к окружности ω_A, получим:



$$BK = BL \Leftrightarrow BD + KD = BC + CL \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow BD + DT_A = BC + CT_A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow BD + DT_A = BC + CD - DT_A =$$
$$= DT_A = \frac{1}{2}(BC + CD - BD).$$

Аналогично вычисляется

$$DT_B = \frac{1}{2}(AC + CD - AD).$$

Итак, равенство $DT_A = DT_B$ равносильно:

$$BC + CD - BD = AC + CD - AD \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD - BD = AC - BC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD - (AB - AD) = AC - BC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Осталось доказать, что вписанные окружности ΔADC и ΔBDC касаются тогда и только тогда, когда

$$AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Пусть вписанные окружности ΔADC и ΔBDC касаются стороны CD в точках P_A и P_B соответственно. Условие касания равносильно совпадению точек $P_A = P_B$ или равенству $DP_A = DP_B$.

Пусть вписанная окружность ΔADC касается стороны AD и AC в точках M и N соответственно. Из равенства отрезков касательных:

$$AM = AN \Leftrightarrow AD - DM = AC - CN \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD - DP_A = AC - CP_A \Leftrightarrow AD - DP_A =$$
$$= AC - (CD - DP_A) \Leftrightarrow DP_A =$$
$$= \frac{1}{2}(AD + CD - AC).$$

Аналогично вычисляется

$$DP_B = \frac{1}{2}(BD + CD - BC).$$

Итак, равенство $DP_B = DP_A$ равносильно:

$$AD + CD - AC = BD + CD - BC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD - AC = AB - AD - BC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC),$$

что и требовалось.

Замечание. Условие

$$AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$$

в точности означает, что D — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB.

3. О т в е т: **а)** -3.

а) Обозначим

$$a = x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx.$$

Тогда

$$x - y = \frac{a}{x},\ y - z = \frac{a}{y},\ z - x = \frac{a}{z}.$$

Складывая эти три равенства, находим

$$\frac{a(xy + yz + zx)}{xyz} = 0.$$

Отсюда или $a = 0$, или $xy + yz + zx = 0$. Убедимся, что $a \neq 0$. В противном случае имели бы, например, $x^2 = xy$, и тогда $x = y$ в противоречие с условием. Следовательно,

$$xy + yz + zx = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим равенство $x^2 - xy = y^2 - yz$ и домножим обе его части на $x + y$, получим $x(x - y)(x + y) = y^2(x + y) - yz(x + y)$. Учитывая, что в силу (1) $z(x + y) = -xy$, имеем $x^3 - xy^2 = xy^2 + y^3 + xy^2$. Совершенно аналогично получим $y^3 - yz^2 = yz^2 + z^3 + yz^2$ и $z^3 - zx^2 = zx^2 + x^3 + zx^2$. Складывая полученные три равенства, после небольших преобразований находим

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 = 0. \qquad (2)$$

Далее, домножая (1) на $x + y + z$, получаем

$$0 = (x + y + z)(xy + yz + zx) = 3xyz +$$
$$+ x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \overset{(2)}{=}$$
$$\overset{(2)}{=} 3xyz + x^2y + y^2z + z^2x.$$

Отсюда

$$x^2y + y^2z + z^2x = -3xyz.$$

Разделив на xyz, окончательно получим

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} = -3.$$

б) Из обеих частей данного в условии равенства $x^2 - xy = y^2 - yz$ вычтем $z^2 - yz$. Получим

$$x^2 - z^2 - xy + yz = y^2 - z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - z^2) - y(x - z) = y^2 - z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - z)(x + z - y) = -(z - y)(y + z).$$

Аналогично получаем ещё два равенства

$$(y - x)(y + x - z) = -(x - z)(z + x),$$
$$(z - y)(z + y - x) = -(y - x)(x + y).$$

Перемножив полученные три равенства, после сокращения на общий множитель

$$(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$$

получим

$$(x + z - y)(y + x - z)(z + y - x) =$$
$$= -(y + z)(z + x)(x + y). \qquad (3)$$

Обозначим $\sigma = x + y + z$. Тогда равенство (3) перепишется в виде

$$(\sigma - 2y)(\sigma - 2z)(\sigma - 2x) = \\ = -(y + z)(z + x)(x + y). \qquad (4)$$

Из равенства (1) пункта **а)** имеем

$$z(x + y) = -xy,\ x(y + z) = -yz, \\ y(z + x) = -zx.$$

Поэтому умножив и разделив правую часть (4) на $xyz \neq 0$, получим

$$(\sigma-2y)(\sigma-2z)(\sigma-2x) = \\ = -\frac{(y+z)\cdot x\cdot(z+x)\cdot y\cdot(x+y)\cdot z}{xyz} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sigma-2y)(\sigma-2z)(\sigma-2x) = \\ = -\frac{(-yz)(-zx)(-xy)}{xyz} = xyz. \qquad (5)$$

Раскроем скобки в левой части (5):

$$\sigma^3 - 2(x + y + z)\sigma^2 + 4(xy + yz + zx)\sigma - \\ - 8xyz = xyz, \qquad (6)$$

откуда, учитывая, что в силу (1) пункта **а)** $xy + yz + zx = 0$, а $\sigma = x + y + z$, имеем равенство $-(x + y + z)^3 = 9xyz$, что и требовалось доказать.

Заметим, что правая часть (6) может быть получена с использованием теоремы Виета, применённой к многочлену $(\sigma - 2y) \times \times (\sigma - 2z)(\sigma - 2x)$, корнями которого, очевидно, являются числа $2x$, $2y$, $2z$.

4. О т в е т: 7.

Заменим схему оценивания игроков на следующую: пусть ещё до турнира у каждого игрока есть ровно столько очков, сколько он получил бы, если бы ни один судья не жульничал. При этом если судья не собирается жульничать, то он не ставит никаких оценок, а если он жульничает, то начисляет за игру более слабому игроку 1 очко, а более сильному -1 очко. Легко видеть, что при этом итоговые баллы участников не изменятся.

Так, игрок с наивысшим рейтингом 1 начинает турнир с $(n - 1)(n - 2)$ очками, а игрок с наименьшим рейтингом n (назовём его аутсайдером) начинает турнир с 0 очков. Рассмотрим разность d очков лидера и аутсайдера, вначале она равна $(n - 1)(n - 2)$, а для того чтобы аутсайдер набрал суммарно больше очков, чем лидер, жульничества должны сделать разность d отрицательной, т. е. уменьшить хотя бы на $(n - 1)(n - 2) + 1$.

Всего жульничеств не более

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Каждое жульничество в матче между лидером и аутсайдером уменьшает разность d на 2, в игре, в которой играет только один из них — на 1, а в игре, в которой они не участвуют, разность d не изменяется. Получаем неравенство (S — количество жульничеств в игре лидера и аутсайдера)

$$(n-1)(n-2)+1 \le 2S + \\ +\frac{n(n+1)}{2} - S \le (n-2) + \frac{n(n+1)}{2},$$

что равносильно неравенству

$$n^2 - 9n + 10 \le 0.$$

Множеством решений последнего неравенства является отрезок

$$\left[\frac{9-\sqrt{41}}{2},\ \frac{9+\sqrt{41}}{2}\right],$$

при этом

$$\frac{9+\sqrt{41}}{2} < 8,$$

следовательно, $n \le 7$.

Для завершения решения задачи остаётся для $n = 7$ привести пример такого турнира. Приведём таблицу турнира, в клетках верхней строки и левого столбца которой указаны рейтинги игроков, а

	1	2	3	4	5	6	7	
1	■	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{6,\,7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{0}{2,\,3,\,4,\,5,\,6}$	19
2	$\frac{1}{7}$	■	$\frac{5}{}$	$\frac{5}{}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{0}{1,\,3,\,4,\,5,\,6}$	19
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{}$	■	$\frac{5}{}$	$\frac{5}{}$	$\frac{5}{}$	$\frac{1}{2,\,4,\,5,\,6}$	17
4	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{}$	$\frac{0}{}$	■	$\frac{5}{}$	$\frac{5}{}$	$\frac{2}{3,\,5,\,6}$	13
5	$\frac{2}{6,\,7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{}$	$\frac{0}{}$	■	$\frac{5}{}$	$\frac{3}{4,\,6}$	11
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{}$	$\frac{0}{}$	$\frac{0}{}$	■	$\frac{4}{5}$	6
7	$\frac{5}{2,\,3,\,4,\,5,\,6}$	$\frac{5}{1,\,3,\,4,\,5,\,6}$	$\frac{4}{2,\,4,\,5,\,6}$	$\frac{3}{3,\,5,\,6}$	$\frac{2}{4,\,6}$	$\frac{1}{5}$	■	20

в каждой её клетке, являющейся пересечением i-й строки и j-го столбца вверху стоит количество очков, заработанных игроком с рейтингом i в матче с игроком с рейтингом j, и снизу под чертой — судьи, которые жульничали в этом матче.

XI класс

1. Ответ: $\alpha > 1$.

Заметим, что при любом $\alpha > 1$ такая последовательность существует. Например, постоянная последовательность $x_n = \alpha - 1$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию, поскольку

$$\sqrt{\alpha(\alpha-1)-(\alpha-1)} = \alpha - 1.$$

Покажем, что при любом $0 < \alpha \le 1$ не существует бесконечной последовательности, удовлетворяющей условию задачи. Допустим, что такая последовательность существует. Тогда для любого натурального n имеем $\alpha x_{n+1} - x_n \ge 0$, откуда следуют неравенства $x_{n+1} \ge \frac{x_n}{\alpha} \ge x_n$. Стало быть, эта последовательность неубывающая. Далее,

$$x_{n+2}^2 = \alpha x_{n+1} - x_n \le \alpha x_{n+1}.$$

Тогда $x_{n+1}^2 \le x_{n+2}^2 \le x_{n+1}$, откуда $x_{n+1} \le 1$ при всех натуральных n.

Выпишем теперь вытекающие из условия неравенства (учитывая, что $\alpha x_i \le x_i$):

$$x_3^2 \le x_2 - x_1,$$
$$x_4^2 \le x_3 - x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{n+1}^2 \le x_n - x_{n-1},$$
$$x_{n+2}^2 \le x_{n+1} - x_n.$$

Складывая все эти неравенства, получаем

$$x_3^2 + x_4^2 + \ldots x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 \le x_{n+1} - x_1 \le x_{n+1}.$$

Тогда

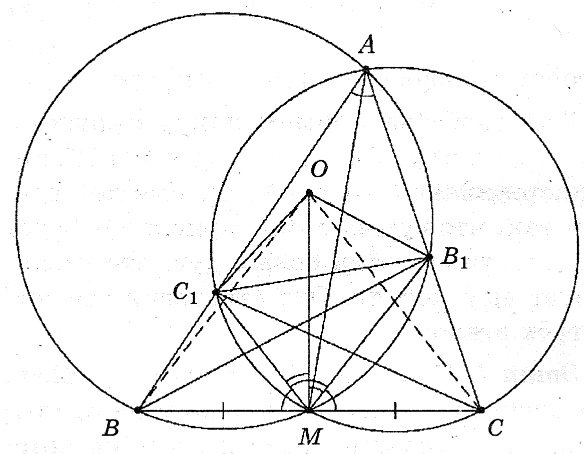
$$x_{n+1} \geq x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 \geq n x_3^2$$

для любого натурального n. Поскольку $x_3 > 0$, то, взяв n достаточно большим, получим $x_{n+1} \geq n x_3^2 > 1$ — противоречие.

2. Так как четырёхугольники BMB_1A и CMC_1A — вписанные, то (см. рис.) имеем равенства $\angle CMB_1 = \angle CAB = \angle BMC_1$. Следовательно, $\angle C_1MB_1 = 180° - 2\angle CAB$ и $\angle CAB < 90°$. Так как точка O — центр описанной окружности треугольника AC_1B_1, то $\angle B_1OC_1 = 2\angle CAB < 180°$, и точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой C_1B_1. Поэтому верно равенство $\angle C_1MB_1 + \angle B_1OC_1 = 180°$, а значит, OC_1MB_1 — вписанный четырёхугольник. Так как $OC_1 = OB_1$, то MO — биссектриса угла C_1MB_1. Следовательно,

$$\angle BMO = \angle BMC_1 + \angle C_1MO = \angle CMB_1 + \angle B_1MO = \angle CMO = 90°.$$

Так как точка M — середина отрезка BC, то $OB = OC$.



3. Допустим, что при некотором $k \geq 2$ существует рациональный корень многочлена $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$. Так как коэффициенты-цифры неотрицательны и не все нули, то этот корень должен быть отрицательным. Представим его в виде несократимой дроби $-\dfrac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Как известно, p и q — делители коэффициентов a_0 и a_n соответственно и, значит, являются цифрами.

Условие задачи запишется в виде двух равенств:

$$10^na_n + \ldots + 10a_1 + a_0 = 65^k \text{ и}$$

$$a_n\left(-\frac{p}{q}\right)^n + \ldots + a_1\left(-\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0. \quad (1)$$

Вычтем из первого равенства второе, получим равенство

$$\left(10^n - \left(-\frac{p}{q}\right)^n\right)a_n + \ldots + a_1\left(10 - \left(-\frac{p}{q}\right)\right) = 65^k. \quad (2)$$

Вынесем в левой части общий множитель

$$10 - \left(-\frac{p}{q}\right) = 10 + \frac{p}{q}$$

и домножим обе части полученного равенства на q^n. Тогда равенство (2) примет вид

$$(10q + p)(A_na_n + \ldots + A_2a_2 + A_1a_1) = 65^kq^k,$$

где каждый множитель

$$A_m = \frac{10 - \left(-\frac{p}{q}\right)^m}{10 - \left(-\frac{p}{q}\right)}q^{n-1} \text{ —}$$

целое число. Так как p и q — цифры, то число $10q + p$ должно быть двузначным делителем числа 65^kq^n, а поскольку числа p и q взаимно просты, то НОД$(10q + p, q) = 1$, и, значит, $10q + p$ делит 65^k. Учитывая, что $65 = 5 \cdot 13$, получаем три возможных значения числа $10q + p$ — оно может быть равно только либо 13, либо 25, либо 65. Рассмотрим каждую из этих возможностей по отдельности.

Число 65^2 равно 4225, а при всех $k > 2$, как нетрудно убедиться, число 65^k оканчивается на 625. Следовательно, a_2 равняется или 2, или 6, а $\overline{a_1a_0} = 25$, откуда сразу заключаем, что случай $10q + p = 13$ невозможен, так как p делит $a_0 = 5$. Поэтому $a_1 = 2$, $a_0 = p = 5$.

По теореме Безу многочлен

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

делится на многочлен $x + \frac{p}{q}$,следовательно, делится и на многочлен $qx + p$, запишем это в виде равенства

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (qx + p)(b_{n-1}x^{n-1} + \\ + \ldots + b_1 x + b_0),$$

где $b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ — рациональные коэффициенты. Покажем, что, они, более того, целые. Для этого в последнем равенстве раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Равенство свободных членов запишется в виде $a_0 = pb_0$, для степеней $m = 1, 2,\ldots, n-1$ получим равенства $a_m = pb_m + qb_{m-1}$, а равенство старших коэффициентом имеет вид $a_n = qb_{n-1}$. Выразим последовательно коэффициенты b_m при m от 0 до $n-1$:

$$b_m = \frac{a_m}{p} - a_{m-1}\frac{q}{p^2} + a_{m-2}\frac{q^2}{p^3} - \ldots + (-1)^m a_0 \frac{q^m}{p^{m+1}}.$$

Для того чтобы доказать, что все b_m целые, достаточно показать, что

$$a_m p^m - a_{m-1}qp^{m-1} + a_{a-2}q^2 p^{m-2} - \ldots + (-1)^m a_0 q^m$$

делится на p^{m+1}. Требуемая делимость получается, если домножить второе из равенств (1) на q^n и рассмотреть делимость на p^{m+1}.

Найдём, какие значения могут принимать целые числа $b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$. Так как $a_0 = pb_0$, а $p = 5$ и $a_0 = 5$, то $b_0 = 1$. Равенство $a_1 = pb_1 + qb_0$ имеет вид $2 = 5b_1 + q$, откуда $q = 2$, $b_1 = 0$ (случай $q = 6$, очевидно, не подходит). Рассмотрим следующее равенство $a_2 = pb_2 + qb_1$, оно равносильно $a_2 = 5b_2$, но, как уже отмечалось выше, a_2 равно 2 или 6, получаем противоречие, которое завершает доказательство.

Замечание. Утверждение, что коэффициенты $b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ целые, следует сразу из леммы Гаусса. Однако приведённое выше решение показывает, как можно решить задачу, используя только теорему Безу и простые алгебраические преобразования.

4. О т в е т: Женя может победить при всех $n \geq 2$.

Рассмотрим дуги окружности, заключённые между соседними из отмеченных точек. Назовём такую дугу *белой* или *чёрной*, если оба её конца белые или, соответственно, чёрные, а остальные дуги назовём *серыми*. Заметим, что все точки белой дуги будут окрашены в белый цвет, а все точки чёрной — в чёрный. Серые дуги будут состоять из двух половин, все точки одной из них окрашены в белый цвет, второй — в чёрный цвет, а середина серой дуги останется неокрашенной.

Пусть на окружности отмечены **б** белых и **ч** чёрных точек и получилось **Б** белых, **Ч** чёрных и **С** серых дуг. Тогда, подсчитывая количества концов дуг обоих цветов, получаем равенства 2Б + С = 2б и 2Ч + С = 2ч, откуда следует равенство

$$\text{Б} - \text{Ч} = \text{б} - \text{ч}, \qquad (1)$$

которое понадобится в дальнейшем.

Для удобства примем длину окружности за единицу. Опишем стратегию Жени, придерживаясь которой, он сможет сделать так, что сумма длин чёрных дуг будет больше суммы длин белых дуг, что гарантирует ему победу. Эта стратегия состоит из трёх этапов.

Этап 1. После первого хода Бори, Женя «мысленно» вписывает в окружность правильный n-угольник, одна из вершин которого совпадает с отмеченной Борей точкой. После этого на каждом своём ходу, пока это возможно, он отмечает вершины этого n-угольника в произвольном порядке.

Этап 2. Начиная с момента, когда все вершины n-угольника будут закрашены, и до своего последнего хода Женя выбирает белую дугу максимальной длины (или одну из них) и отмечает внутри произвольную точку. Покажем, что он всегда может сделать ход: из равенства (1) следует, что перед ходом Жени всегда есть хотя бы одна белая дуга, так как он сделал на один ход меньше Бори.

Последний ход. Прежде чем описывать последний ход Жени, рассмотрим свойства конфигурации точек, которая получится после последнего хода Бори.

1) Все чёрные дуги равны по длине $\frac{1}{n}$, так как все свои точки, не являющиеся вершинами n-угольника, Женя отмечал между соседними белыми, а они не могут быть соседними.

2) Хотя бы одна дуга, соединяющая две соседние вершины n-угольника, не содержит внутри отмеченных точек, поскольку всего отмечены $2n - 1$ точек, а вершин и дуг — $2n$. Назовём такую дугу *пустой.*

3) Все белые дуги имеют длину меньше $\frac{1}{n}$. Действительно, пусть Боря отметил k вершин n-угольника. После первого этапа все дуги имеют длину не больше $\frac{1}{n}$, причём равенство возможно только для дуг между соседними вершинами n-угольника.

На втором этапе Женя сделал k ходов, каждый раз отмечая точку внутри дуги максимальной длины, значит, он отметил точку в каждой из белых дуг длиной $\frac{1}{n}$, а все оставшиеся белые дуги имеют меньшую длину.

Таким образом, пустые дуги бывают только чёрные и серые. Если среди них есть хотя бы одна чёрная, то из равенства (1) следует, что найдутся хотя бы две белые дуги. Тогда Женя последним ходом отмечает точку внутри белой дуги. При этом количество белых и чёрных дуг станет равным, все белые дуги по длине меньше $\frac{1}{n}$, а длины всех чёрных дуг равны $\frac{1}{n}$, и Женя победил. Если все пустые дуги серые, то чёрных дуг нет и из равенства n (1) следует, что тогда есть ровно одна белая дуга. Длина d этой белой дуги меньше $\frac{1}{n}$.

Женя своим последним ходом отметит в пустой серой дуге такую чёрную точку, что длина появившейся чёрной дуги будет больше, чем d, и победит.