Алімпіяды, турніры, інтэлектуальныя спаборніцтвы

Е. А. Барабанов, ведущий научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси,
И. И. Воронович, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета,
В. И. Каскевич, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета,
С. А. Мазаник, заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного университета

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 66-Й БЕЛОРУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Первый день

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Школьники двух восьмых классов решили организовать совместный турнир по шашкам. В нём должно было участвовать несколько лучших шашистов из одного класса и несколько (не обязательно столько же) — из другого класса. Каждый участник турнира из одного класса должен был сыграть одну партию с каждым участником из другого класса. Но из-за болезни в турнире не смог участвовать один школьник из одного класса и один школьник из другого класса. В результате число сыгранных партий оказалось на 20 % меньше, чем предполагалось.

Сколько всего школьников из обоих классов (не считая заболевших) участвовало в этом турнире? Укажите все возможные значения.

2. Докажите, что если число α является корнем уравнения

$$x^3 - 12x + 8 = 0,$$

то число $2-\frac{4}{\alpha}$ также является корнем этого уравнения.

3. Дан треугольник ABC, его сторона AB в два раза больше стороны AC. С помощью циркуля и линейки постройте на стороне BC такую точку M, чтобы периметр трапеции $CMNA$ (точка N лежит на стороне AB) был равен сумме длин сторон AB и AC.

4. На доске записаны $n (n \geq 3)$ целых чисел. Каждую секунду набор записанных чисел заменяется на новый набор n чисел по следующему правилу. Вначале вычисляется среднее арифметическое s всех написанных чисел. После этого те из чисел, которые не меньше $s + 1$, уменьшаются на единицу, а те, которые не больше $s - 1$, увеличиваются на единицу. Числа, отличающиеся от s менее чем на 1, не изменяются. При этом все числа изменяются одновременно.

Докажите, что через некоторое время числа на доске изменяться не будут.

IX класс

1. Докажите, что

$$(xy - z^2)(yz - x^2)(zx - y^2) = xyz - 1,$$

если $x + y + z = xy + yz + zx = -1$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и N соответственно так, что $KB = KN$. Биссектриса угла ACB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках C и R. Перпендикуляр из точки R к прямой AB пересекает отрезок BN в точке D.

Докажите, что точки A, K, D и N лежат на одной окружности.

3. Диагональ выпуклого шестиугольника, которая разбивает его на два четырёхугольника, назовём *хорошей*, если в каждый из полученных четырёхугольников можно вписать окружность.

Какое максимальное число хороших диагоналей может иметь выпуклый шестиугольник?

4. На доске записаны три натуральных числа. За один ход каждое из них заменяется на сумму квадратов двух других чисел, делённую на само заменяемое число.

Какое максимальное значение может принимать сумма исходных чисел, если через 5 ходов сумма чисел, записанных на доске, стала равной 2016?

X класс

1. Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$, $a \le b$, удовлетворяющие равенству

$$a^3 + b^3 = 1911ab.$$

2. Любая диагональ выпуклого пятиугольника разбивает его на треугольник и четырёхугольник. Диагональ назовём *хорошей*, если в получившийся четырёхугольник можно вписать окружность.

Какое максимальное число хороших диагоналей может иметь выпуклый пятиугольник?

3. Бесконечную последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, положительных чисел назовём *лакунарной*, если существует такое число $q > 1$, что $\dfrac{a_n + 1}{a_n} \ge q$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и назовём *одинокой*, если найдётся такое число $r > 1$, что при всех положительных x интервал (x, rx) содержит не более одного члена этой последовательности.

а) Верно ли, что любая лакунарная последовательность является одинокой?

б) Верно ли, что любая одинокая последовательность является лакунарной?

4. На окружности отмечены точки — вершины правильного n-угольника, $n \ge 3$. В эти точки расставили целые числа так, что модуль разности между любыми двумя соседними числами не больше 1. После этого отметили середины дуг, стягиваемых сторонами n-угольника, и в каждой середине дуги записали полусумму чисел, стоящих на концах стороны, стягивающей эту дугу.

Найдите все n, для которых при этом обязательно найдутся диаметрально противоположные точки, в которых записаны одинаковые числа.

XI класс

1. Докажите, что существует не более конечного числа таких простых чисел p, что уравнение

$$a^3 + b^3 = 2016pab$$

имеет решение в натуральных числах a, b, не кратных p.

2. Любая диагональ, соединяющая две противоположные вершины выпуклого шестиугольника, разбивает его на два четырёхугольника.

Какое наибольшее число из шести четырёхугольников, которые можно получить таким образом, могут оказаться описанными?

3. Бесконечную последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, положительных чисел назовём *лаку-*

нарной, если существует такое число $q > 1$, что $\frac{a_n+1}{a_n} \geq q$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и назовём *редкой*, если найдётся такое натуральное число k, что при всех положительных x интервал $(x, 2x)$ содержит не более k членов этой последовательности.

а) Верно ли, что любая лакунарная последовательность является редкой?

б) Верно ли, что любая редкая возрастающая последовательность является лакунарной?

4. На доске записаны n $(n \geq 3)$ целых чисел. Каждую секунду набор записанных чисел заменяется на новый набор n чисел по следующему правилу. Вначале вычисляется среднее арифметическое s всех написанных чисел. После этого некоторые (возможно, все, а возможно, и ни одно) из чисел, которые больше $s + 1$, уменьшаются на единицу, а некоторые (возможно, все, а возможно, и ни одно) из чисел, которые меньше $s - 1$, увеличиваются на единицу. Остальные числа не изменяются. При этом все числа заменяются одновременно и хотя бы одно из тех чисел, которые отличаются от s более чем на 1, должно измениться.

Докажите, что через некоторое время числа на доске изменяться не будут.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Ответ: 17, 20 или 29 школьников.

Пусть в турнире должно было участвовать n школьников из одного класса и m школьников из другого класса. Тогда в турнире должно было состояться nm партий, а было сыграно $(n - 1)(m - 1)$ партий, что согласно условию составляет 80 % от nm. Поэтому выполняется равенство

$$(n - 1)(m - 1) = 0{,}8nm, \qquad (1)$$

которое после несложных равносильных преобразований примет вид

$$nm = 5(n + m - 1). \qquad (2)$$

Из равенства (2) видно, что один из множителей в левой части этого равенства делится на 5 (пусть для определённости это будет m). Тогда $m = 5k$, где k — некоторое натуральное число. Заменив в равенстве (2) переменную m на $5k$ и сократив обе части на 5, получим

$$nk = n + 5k - 1. \qquad (3)$$

Далее из (3) получаем:

$$n(k-1)=5k-1 \Leftrightarrow n=\frac{5k-1}{k-1} \Leftrightarrow n=5+\frac{4}{k-1}.$$

Поскольку n и $(k - 1)$ — натуральные числа, последнее равенство может быть верным, только если $(k - 1)$ является натуральным делителем числа 4. Существует ровно три таких делителя — это 1, 2 и 4. Соответственно получаем:

1) $k = 2$, и тогда $n = 9$, $m = 10$, $n + m = 19$;

2) $k = 3$, и тогда $n = 7$, $m = 15$, $n + m = 22$;

3) $k = 5$, и тогда $n = 6$, $m = 25$, $n + m = 31$.

Таким образом, учитывая, что два из возможных участников заболели, в турнире могло участвовать соответственно 17, 20 или 29 школьников.

Несколько по-другому решение задачи можно было получить, например, так. Несложно видеть, что равенство (1) равносильно равенству $(n - 5)(m - 5) = 20$. Значит, пара $(n - 5, m - 5)$ — это такая пара (d_1, d_2) делителей числа 20, произведение которых даёт само число. Таких пар (d_1, d_2) делителей ровно три: (1, 20), (2, 10) и (4, 5). Поэтому $(n - 5) + (m - 5) = d_1 + d_2$, или $n + m = 10 + d_1 + d_2$. Следовательно, либо $n + m = 10 + 1 + 20 = 31$, либо $n + m = 10 + 2 + 10 = 22$, либо $n + m = 10 + 4 + 5 = 19$.

Отметим, что проверку найденных значений m и n можно не проводить, поскольку рассуждения и при первом и при втором способах носили равносильный характер.

2. Подставим $2-\frac{4}{\alpha}$ в левую часть данного уравнения и преобразуем получившееся выражение равносильным образом:

$$\left(2-\frac{4}{\alpha}\right)^3-12\left(2-\frac{4}{\alpha}\right)+8=8\left(\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)^3-3\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)+1\right)=$$

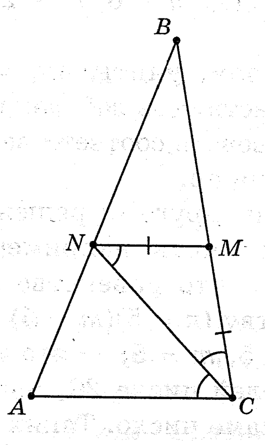
$$=8\left(1-\frac{6}{\alpha}+\frac{12}{\alpha^2}-\frac{8}{\alpha^3}-3+\frac{6}{\alpha}+1\right)=8\left(-1+\frac{12}{\alpha^2}-\frac{8}{\alpha^3}\right)=$$

$$=-\frac{8}{\alpha^3}(\alpha^3-12\alpha+8)=0.$$

Это и означает, что число $2-\frac{4}{\alpha}$ действительно является корнем данного в условии уравнения.

3. Ответ: точка M — точка пересечения прямой ℓ, параллельной стороне AC и проходящей через основание биссектрисы угла ACB треугольника ABC.

Пусть M — искомая точка и отрезок NM параллелен стороне AC (см. рис.).



Через $P(CMNA)$ обозначим периметр трапеции $CMNA$. По условию периметр $P(CMNA) = AN + NM + MC + CA$ равен сумме $AB + AC$ длин сторон AB и AC. Поэтому $AN + NM + MC = AB = AN + NB$, откуда

$$NM + MC = NB. \qquad (1)$$

Поскольку $MN \parallel AC$, то треугольники NBM и ABC подобны, и, следовательно, $NB : NM = AB : AC = 2$, т. е. $NB = 2NM$. Тогда из равенства (1) следует, что $MC = MN$, а значит, треугольник NMC равнобедренный. Поэтому углы при его основании NC равны, т. е. $\angle MNC = \angle MCN$. В силу параллельности прямых NM и AC имеем $\angle MNC = \angle NCA$ (внутренние накрест лежащие углы параллельных прямых NM и AC и секущей NC). Следовательно, $\angle MCN = \angle NCA$, т. е. NC необходимо является биссектрисой угла ACB данного треугольника.

Искомую точку M строим следующим образом. Построим биссектрису угла ACB (построение с помощью циркуля и линейки стандартное) треугольника ABC, и пусть точка N – её основание. Через точку N проведём прямую, параллельную AC (построение с помощью циркуля и линейки стандартное). Отметим точку её пересечения со стороной BC. Эта точка и есть искомая точка M. Действительно, легко проверить что периметр построенной трапеции равен сумме длин сторон AB и AC (достаточно провести приведённые выше рассуждения в обратном порядке).

4. Через S_i обозначим среднее арифметическое записанных на доске n чисел через i секунд, а через M_i и m_i — соответственно наибольшее и наименьшее из них. Докажем, что если $M_i - m_i \geq 2$, то $M_{i+1} - m_{i+1} < M_i - m_i$. В самом деле так как $M_i - m_i \geq 2$, то отрезок $[m_i, M_i]$, кроме своих концов, содержит ещё хотя бы одно натуральное число, а значит, хотя бы один из его концов отличается от числа $S_i \in (m_i, M_i)$ не менее чем на 1. Если ровно один из концов отличается от S_i не менее чем на 1, то $M_{i+1} - m_{i+1} = M_i - m_i - 1$, а если оба — то $M_{i+1} - m_{i+1} = M_i - m_i - 2$, откуда и следует сформулированное утверждение.

Поскольку, как доказано, разность между наибольшим и наименьшим из записанных на доске n чисел, если она не меньше 2, уменьшается с течением времени, то в какой-то момент эта разность станет равной 0 или 1. Покажем, что в каждом из этих двух случаев дальнейшего изменения записанных на доске чисел не происходит. Если разность $M_i - m_i = 0$, то все числа совпадают между собой, а значит, и с их средним арифметическим, а поэтому не изменяются. Если $M_i - m_i = 1$, то среди записанных n чисел только два различных: m_i и $M_i = m_i + 1$, а значит, среднее арифметическое S_i записанных n чисел — некоторое число между m_i и $m_i + 1$, и поэтому любое из записанных на доске чисел отличается от него менее чем на 1, а значит, не изменяется.

IX класс

1. Обозначим $xyz = a$. Тогда

$$(xy-z^2)(yz-x^2)(zx-y^2)=\left(\frac{a}{z}-z^2\right)\left(\frac{a}{x}-x^2\right)\left(\frac{a}{y}-y^2\right)=$$
$$=\frac{1}{a}(a-z^3)(a-x^3)(a-y^3)=\frac{1}{a}(a^3-(x^3+y^3+z^3)a^2+$$
$$+(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)a-x^3y^3z^3)=\left[x^3y^3z^3=a^3\right]=$$
$$=(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)-(x^3+y^3+z^3)a=A-Ba, \quad (1)$$

где обозначено

$$A = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$$
$$\text{и} \quad B = x^3 + y^3 + z^3.$$

Обозначим также $xy^2 + x^2y + yz^2 + y^2z + zx^2 + xz^2 = C$. Найдём значения выражений A, B, C. Во-первых,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 1 - 2 \cdot (-1) = 3.$$

Во-вторых,

$$B = x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - C = (-1) \cdot 3 - C = -3 - C. \quad (2)$$

Далее,

$$C = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz = -1 \cdot (-1) - 3a = 1 - 3a.$$

Поэтому из (2) имеем

$$B = -3 - (1 - 3a) = 3a - 4.$$

Тогда

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) = (-1)^2 - 2a \cdot (-1) = 2a + 1.$$

Поэтому

$$A = (xy + yz + zx)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - Cxyz = (-1) \cdot (2a + 1) - (1 - 3a)a = 3a^2 - 3a - 1.$$

Подставляя найденные значения A и B в (1), получим

$$A - Ba = 3a^2 - 3a - 1 - (3a - 4)a = a - 1 = xyz - 1,$$

что и требовалось доказать.

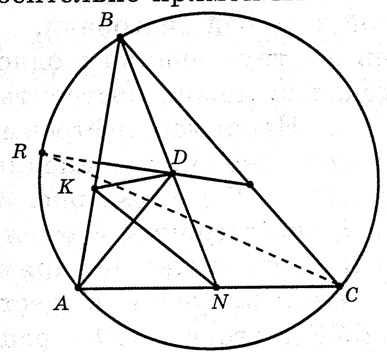
Замечание. Ключевые выражения A и B вычисляются быстрее, если использовать общую формулу

$$m^3 + n^3 + k^3 = 3mnk + (m + n + k)(m^2 + n^2 + k^2 - mn - nk - km) = (m + n + k)^3 - 3(m + n + k)(mn + nk + km) + 3mnk.$$

Заметим также, что результат сразу же следует из тождества

$$(xy - z^2)(yz - x^2)(zx - y^2) = (xy + yz + zx)^3 - xyz(x + y + z)^3.$$

2. Поскольку точка R — середина $\cup AB$, то диаметр описанной окружности окружности, проведённый через R, перпендикулярен хорде AB. Таким образом, RD — серединный перпендикуляр к отрезку AB, а значит, $AD = BD$ и $\angle ABD = \angle BAD$. Так как по условию $KB = KN$, то $\angle KBN = \angle KNB$. Следовательно, $\angle KAD = \angle BAD = \angle ABD = \angle KBN = \angle KNB = \angle KND$. Точки A, K, D и N лежат на одной окружности, так как углы KAD и KND опираются на один и тот же отрезок KD и лежат в одной полуплоскости относительно прямой KD.



3. Ответ: 1.

Покажем, что любые две пересекающиеся диагонали шестиугольника не могут обе быть хорошими. Предположим противное: пусть существуют две хороших пересекающихся диагонали; не нарушая общности, считаем, что таковыми являются диагонали AD и BE шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 1). Тогда в четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$ можно вписать окружности, и, следовательно, суммы длин противоположных сторон в этих четырёхугольниках будут равны. Поэтому

$$AB + CD = BC + AD,\ BC + DE = BE + CD.$$

Складывая эти равенства, получим

$$AB + DE = AD + BE. \qquad (1)$$

Пусть M — точка пересечения диагоналей AD и BE. Тогда

$$AD + BE = (AM + MD) + (BM + ME) = (AM + BM) + (DM + EM) > AB + DE$$

согласно неравенству треугольника, что противоречит равенству (1).

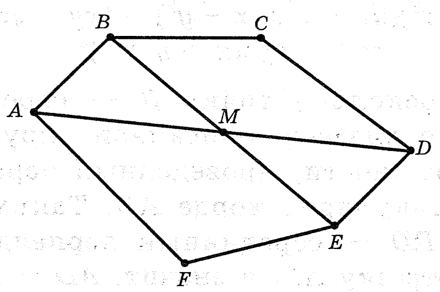


Рисунок 1

Поскольку в шестиугольнике диагональ, разбивающая его на два четырёхугольника, соединяет две его противоположные вершины, а любые две такие диагонали пересекаются, то, таким образом, в выпуклом шестиугольнике может быть не более одной хорошей диагонали.

Пример шестиугольника с одной хорошей диагональю можно построить разными способами. Например, построим окружность и опишем около неё трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) — см. рис. 2. Пусть точки E и F симметричны соответственно точкам C и B относительно прямой AD. Очевидно, что в полученном шестиугольнике $ABCDEF$ диагональ AD хорошая.

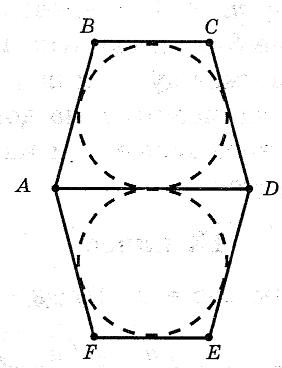


Рисунок 2

4. Ответ: 63.

Обозначим числа, первоначально записанные на доске, через a_0, b_0, c_0, числа, записанные на доске после i-го хода, через a_i, b_i, c_i, а их суммы через $S(a_0,b_0,c_0)$ и $S(a_i,\ b_i,\ c_i)$ соответственно. Тогда после i+1-го хода на доске появятся числа:

$$a_{i+1} = \frac{b_i^2 + c_i^2}{a_i},\ b_{i+1} = \frac{c_i^2 + a_i^2}{b_i},\ c_{i+1} = \frac{a_i^2 + b_i^2}{c_i}.$$

Оценим снизу сумму $S(a_{i+1},\ b_{i+1},\ c_{i+1})$ полученных чисел:

$$S(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}) = \frac{b_i^2 + c_i^2}{a_i} + \frac{c_i^2 + a_i^2}{b_i} + \frac{a_i^2 + b_i^2}{c_i} \geq \frac{2b_ic_i}{a_i} +$$

$$+ \frac{2c_ia_i}{b_i} + \frac{2a_ib_i}{c_i} = \frac{b_ic_i}{a_i} + \frac{b_ic_i}{a_i} + \frac{c_ia_i}{b_i} + \frac{c_ia_i}{b_i} + \frac{a_ib_i}{c_i} + \frac{a_ib_i}{c_i} =$$

$$= \left(\frac{b_ic_i}{a_i} + \frac{a_ib_i}{c_i}\right) + \left(\frac{b_ic_i}{a_i} + \frac{c_ia_i}{b_i}\right) + \left(\frac{a_ib_i}{c_i} + \frac{c_ia_i}{b_i}\right) =$$

$$= b_i\left(\frac{c_i}{a_i} + \frac{a_i}{c_i}\right) + c_i\left(\frac{b_i}{a_i} + \frac{a_i}{b_i}\right) + a_i\left(\frac{b_i}{c_i} + \frac{c_i}{b_i}\right) \geq$$

$$\geq \left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2\right] \geq 2(a_i + b_i + c_i) = 2S(a_i,\ b_i,\ c_i).$$

Следовательно,

$$S(a_i,\ b_i,\ c_i) \leq \frac{1}{2} S(a_{i+1},\ b_{i+1},\ c_{i+1})$$

при всех i= 0, 1, 2, 3, 4. Откуда

$$S(a_0, b_0, c_0) \leq \frac{1}{2} S(a_1, b_1, c_1) \leq \frac{1}{2^2} S(a_2, b_2, c_2) \leq$$

$$\leq \ldots \leq \frac{1}{2^5} S(a_5, b_5, c_5) = \frac{2016}{32} = 63.$$

Таким образом, сумма чисел, первоначально записанных на доске, не превосходит 63.

Следующий пример показывает, что эта сумма может равняться 63. Возьмём числа $a_0 = b_0 = c_0 = 21$, тогда имеем:

$$(a_0, b_0, c_0) = (21, 21, 21) \to (42, 42, 42) =$$
$$(2\cdot 21, 2\cdot 21, 2\cdot 21) \to (2^2\cdot 21, 2^2\cdot 21, 2^2\cdot 21) \to$$
$$\to \ldots \to (2^5\cdot 21, 2^5\cdot 21, 2^5\cdot 21) = (a_5, b_5, c_5),$$

и суммы

$$S(a_5, b_5, c_5) = S(2^5\cdot 21, 2^5\cdot 21, 2^5\cdot 21) =$$
$$= 2^5 S(21, 21, 21) = 32\cdot 63 = 2016.$$

X класс

1. Ответ: (1274; 2548), (756; 1008), (600; 960).

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b, т. е. $a = da_1$, $b = db_1$, где НОД $(a_1, b_1) = 1$. Тогда данное в условии равенство примет вид

$$d(a_1^3 + b_1^3) = 1911 a_1 \le b_1.$$

Из этого равенства видим, что $da_1^3 \vdots b_1$, т. е., так как числа a_1 и b_1 взаимно просты, $d \vdots b_1$. Точно так же $d \vdots a_1$. Следовательно, $d \vdots a_1 b_1$ в силу взаимной простоты чисел a_1 и b_1. Пусть $d = d_1 a_1 b_1$, тогда уравнение перепишется в виде

$$d_1(a_1^3 + b_1^3) = 1911,\ a_1 \le b_1. \quad (1)$$

Заметим, что $\frac{a_1^3 + b_1^3 \ge (a_1 + b_1)^3}{4}$, откуда $4\cdot 1911 \ge d_1\cdot (a_1 + b_1)^3$; следовательно, $8000 > (a_1 + b_1)^3$, или $a_1 + b_1 < 20$.

Далее, $a_1^3 + b_1^3 = (a_1 + b_1)^3 - 3(a_1 + b_1)$, так что уравнение (1) принимает вид

$$d_1(a_1 + b_1)((a_1 + b_1)^2 - 3a_1 b_1) = 1911. \quad (2)$$

Видим, что $a_1 + b_1$ есть делитель числа $1911 = 3\cdot 7^2\cdot 13$, меньший 20. Поэтому возможны лишь следующие три случая.

1. $a_1 + b_1 = 3$, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$.

Тогда $d_1\cdot 3\cdot (9-6) = 1911$,

т. е. $d_1 = 637$, $d = 637\cdot 2$,

т. е. пара $a = 1274$, $b = 2548$ — решение.

2. $a_1 + b_1 = 7$. Если $a_1 = 1$, $b_1 = 6$, то получаем $d_1\cdot 7\cdot (49-18) = 1911$, но $49 - 18 = 31$ — не делитель числа 1911.

При $a_1 = 2$, $b_2 = 5$ получим

$$d_1\cdot 7\cdot (49-30) = 1911,$$

но $49 - 30 = 19$ – не делит 1911.

Наконец, при $a_1 = 3$, $b_1 = 4$ получим $d_1\cdot 7\cdot (49-36) = 1911$, откуда $d_1 = 21$, тогда $d = 21\cdot 3\cdot 4 = 252$, т. е. пара $a = 756$, $b = 1008$ — решение.

3. $a_1 + b_1 = 13$. Если $a_1 = 1$, $b_1 = 12$, то получаем $d_1\cdot 13\cdot (169-36) = 1911$, но $169 - 36 = 1911$ — не делит 1911.

При $a_1 = 2$, $b_1 = 11$ имеем

$$d_1\cdot 13\cdot (169-66) = 13d_1\cdot 103 —$$

не делит 1911.

При $a_1 = 3$, $b_1 = 10$ имеем

$$d_1\cdot 13\cdot (169-90) = 13d_1\cdot 61 —$$

не делит 1911.

Если $a_1 = 5$, $b_1 = 8$, то

$$d_1\cdot 13\cdot (169-120) = d_1\cdot 13\cdot 49 = 1991,$$

откуда $d_1 = 3$, тогда $d = 3\cdot 5\cdot 8 = 120$, т. е. пара $a = 600$, $b = 960$ — решение.

Наконец, при $a_1 = 6$, $b_1 = 7$ будет $d_1\cdot 13\cdot (169 - 126) = 13d_1\cdot 43$ – не делитель числа 1911.

Все случаи исчерпаны, таким образом, уравнение имеет три указанных решения.

2. Ответ: 2.

Покажем, что любые две пересекающиеся диагонали пятиугольника не могут обе быть хорошими. Предположим противное: пусть обе диагонали AC и BE пятиугольника $ABCDE$ являются хорошими (рис. 1). Тогда в четырёхугольники $BCDE$ и $ACDE$ можно вписать окружности, и, следовательно, суммы длин противоположных сторон в этих четырёхугольниках будут равны. Поэтому

$$AC + DE = AE + CD \quad \text{и} \quad BC + DE = BE + CD.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $AC - BC = AE - BE$, откуда

$$AC + BE = AE + BC. \quad (1)$$

Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BE. Тогда

$$AC + BE = (AM + MC) + (BM + ME) =$$
$$= (AM + ME) + (BM + MC) > AE + BC$$

вследствие неравенства треугольника, что противоречит равенству (1). Аналогично показывается, что пересекающиеся диагонали AC и BD пятиугольника $ABCDE$ не могут быть обе хорошими. Поскольку в пятиугольнике можно провести только две непересекающиеся диагонали, то всего хороших диагоналей в пятиугольнике не более двух.

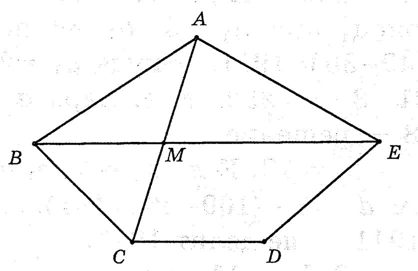


Рисунок 1

Покажем, что существует пятиугольник, в котором можно провести две хорошие диагонали. Построим такой пятиугольник следующим образом: отметим на плоскости точки A, B, C, D, E так, что $AB = AC = AD = AE$ и $BAC = \angle CAD = \angle DAE = \alpha < 60^\circ$ (рис. 2). Очевидно, что при этом треугольники BAC, CAD, DAE будут равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $BC = CD = DE$ и $\angle ABC = \angle ACB = \angle ACD = \angle ADC =$

$$= \angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{AED} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \beta < 90^\circ.$$

Построенный пятиугольник будет выпуклым, так как по построению угол при вершине A будет равен $3\alpha < 180^\circ$, углы при вершинах B и E будут равны $\beta < 90^\circ$, углы при вершинах C и D будут равны $2\beta < 180^\circ$. При этом две его диагонали AC и AD будут хорошими, так как у каждого из четырёхугольников $ACDE$ и $ABCD$ суммы длин противоположных сторон равны: $AC + DE = AE + CD$ и $AB + CD = AD + BC$, и, следовательно, оба они являются описанными.

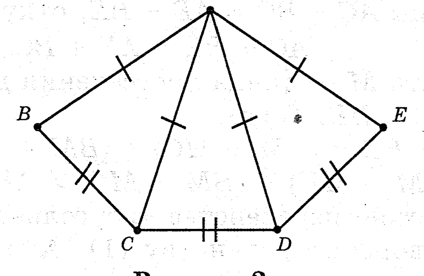


Рисунок 2

3. Ответ: **а)** да, верно; **б)** нет, неверно.

а) Пусть последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, лакунарна, т. е. найдётся $q > 1$, такое, что

$$a_{n+1} \geq q a_n \text{ для любого } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

В частности, лакунарная последовательность является возрастающей. Из неравенства (1) вытекает, что любой интервал (x, qx) содержит не более одного элемента этой последовательности. Действительно, если бы a_n и a_n+1 принадлежали этому полуинтервалу, то отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{qx}{x} = q$, что противоречит неравенству (1). Поэтому любая лакунарная последовательность является одинокой.

б) Рассмотрим лакунарную последовательность $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Она, как доказано в п. а), является одинокой: каждый интервал $(x, 2x)$, где $x > 0$, содержит не более одного её члена. Образуем новую последовательность (x_n), $n \in \mathbb{N}$, задав её равенствами: $x_{2n-1} = a_{2n}$ и $x2_n = a_{2n-1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Последовательность (x_n) является одинокой, поскольку множество её членов и множество членов последовательности (a_n) совпадают и члены последовательности (x_n) попарно различны. В то же время последовательность (x_n) не является лакунарной, так как не является возрастающей.

4. Ответ: все чётные n.

Для нечётных $n = 2k + 1$ такие диаметрально противоположные точки могут не найтись. Приведём подтверждающий это пример. Пронумеруем последовательно, например, по ходу часовой стрелки вершины n-угольника A_0, A_1, A_k, A_{-k}, A_{-1} и в каждую вершину A_i запишем число $|i|$. Так как n нечётно, то парами диаметрально противоположных точек будут только пары вида «вершина — середина дуги», при этом во всех вершинах записаны целые числа, а во всех серединах дуг (кроме середины дуги $A_k A_{-k}$, $k = 0$) записаны дробные числа.

Докажем, что для всех чётных $n = 2k$ диаметрально противоположные точки, в которых записаны равные числа, всегда найдутся. Пронумеруем последовательно, например, по ходу часовой стрелки вершины n-угольника через A_1, A_2, A_{2k}, а числа, записанные в них, через a_1, a_2, a_{2k} соответственно. Для удобства будем считать, что $A_{2k+1} = A_1$ и $a_{2k+1} = a_1$. Рассмотрим числа

$$a_{k+1}-a_1,\ а_{k+2}-a_2,\dots,\ a_{k+i}-a,\dots,\ a_{k+(k+1)}-a_{k+1}.(*)$$

Последовательность (*) обладает тем свойством, что её соседние члены различаются не более чем на 2. Действительно,

$$\left|(a_{k+i}-a_i)-(a_{k+i+1}-a_{i+1})\right| \le \left|a_{k+i+1}-a_{k+i}\right|+\left|a_{i+1}-a_i\right| \le$$
$$\le 1+1=2,$$

так как по условию соседние из расставленных чисел отличаются не более чем на 1. Если среди чисел (*) есть нуль, то это означает, что нашлась пара диаметрально противоположных вершин, в которых записаны равные числа.

Предположим, что среди чисел (*) нет нуля. Так как крайние числа в последовательности (*) имеют разные знаки (их сумма равна нулю), то в ней найдутся два соседних числа $a_{k+i} - a_i$ и $a_{k+i+1} - a_{i+1}$ противоположного знака. Следовательно, так как числа (*) целые, среди них нет нуля и соседние различаются не более чем на 2, то из этих соседних чисел одно равно 1, а другое —1. Поэтому их сумма $a_{k+i} - a_i + a_{k+i+1} - a_{i+1} = 1 + (-1) = 0$, т. е. $a_i + a_{i+1} = a_{k+i} + a_{k+i+1}$, а значит, числа, записанные в диаметрально противоположных точках — серединах дуг $A_{k+i}A_{k+i+1}$ и A_iA_{i+1} — равны между собой. Следовательно, для всех чётных n обязательно найдётся пара диаметрально противоположных точек, в которых записаны равные числа.

XI класс

1. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b, т. е. $a = da_1$, $b = db_1$, где НОД $(a_1, b_1) = 1$. Тогда данное в условии равенство примет вид

$$d(a_1^3+b_1^3)=2016pa_1b_1.$$

Из этого равенства видим, что $da_1^3 \vdots b_1$, т. е. так как числа a_1 и b_1 взаимно просты, $d \vdots b_1$. Точно также $d \vdots a_1$, откуда $d \vdots a_1b_1$. Пусть $d = d_1a_1b_1$. Уравнение перепишется в виде

$$d_1(a_1^3+b_1^3)=2016p. \qquad (1)$$

Возможны два случая: 1) $a_1+b_1 \vdots p$, 2) $a_1+b_1 \not\vdots\, p$. Рассмотрим эти два случая.

1) Так как $a_1+b_1 \vdots p$, то

$$p \le a_1+b_1 \Rightarrow p^3 \le (a_1+b_1)^3 \le$$
$$\le 4(a_1^3+b_1^3) \le 4 \cdot 2016p \Rightarrow p^2 \le 4 \cdot 2016 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p \le 2 \cdot \sqrt{2016} \le 2 \cdot 45 = 90.$$

Следовательно, в этом случае указанных в условии простых чисел p может быть лишь конечное число.

2) Так как из условия следует, что $d_1 \not\vdots\, p$ (в противном случае a и b были бы кратны p), то из (1) получаем $a_1^3+b_1^3 \vdots p$. Поскольку

$$a_1^3+b_1^3=(a_1+b_1)(a_1^2-a_1b_1+b_1^2)=$$
$$=(a_1+b_1)\left((a_1+b_1)^2-3a_1b_1\right) \qquad (2)$$

и $a_1+b_1 \not\vdots\, p$, то $(a_1+b_1)^2-3a_1b_1 \vdots p$, откуда

$$p \le (a_1+b_1)^2-3a_1b_1. \qquad (3)$$

Так как $a_1+b_1 \not\vdots\, p$, то из (1) и (2) следует, что $a_1 + b_1$ – делитель числа 2016, т. е. $a_1+b_1 \le 2016$. Тогда из (3) имеем

$$p \le (a_1+b_1)^2-3a_1b_1 \le (a_1+b_1)^2 \le 2016^2.$$

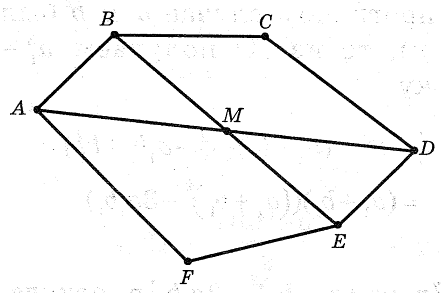
Таким образом, и в этом случае указанных в условии простых чисел p может быть лишь конечное число.

2. Ответ: 3.

Докажем, что более трёх описанных четырёхугольников получиться не может. Допустим, что нашлось хотя бы четыре описанных четырёхугольника. Тогда какие-то два из них получены при проведении одной диагонали, например, диагонали AD. Рассмотрим ещё какой-то из оставшихся двух описанных четырёхугольников. Не ограничивая общности, пусть это будет четырёхугольник $BCDE$. Для этого четырёхугольника имеем $BC + DE = CD + BE$. Для четырёхугольника $ABCD$, так как он описанный по предположению, имеем $AB + CD = BC + AD$. Складывая эти два равенства, получим $AB + DE = AD + BE$. Последнее равенство невозможно, так как для выпуклого четырёхугольника $ABDE$ выполнено неравенство $AD + BE > AB + DE$. Действительно, если M — точка пересечения AD и BE, то

$$AD + BE = (AM + MD) + (BM + ME) = (AM + BM) + (DM + EM) > [AM + BM > AB,\ DM + EM > DE] > AB + DE$$

согласно неравенству треугольника. Итак, количество описанных четырёхугольников не превосходит трёх.



Пример выпуклого шестиугольника с тремя описанными четырёхугольниками может быть построен различными способами. Например, построим правильный треугольник ABC и окружность Γ с центром в A и радиуса AB. Обозначим CH высоту треугольника ABC. Проведём через точку B прямую ℓ перпендикулярно отрезку AB. На меньшей из дуг BC окружности Γ отметим точку D (отличную от точек C и B). Пусть E — точка пересечения

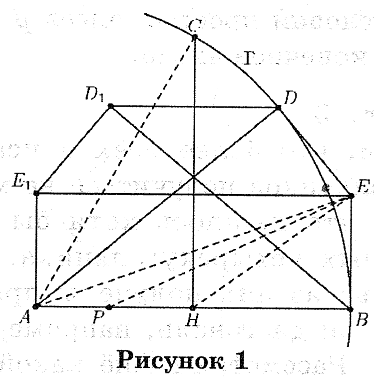


Рисунок 1

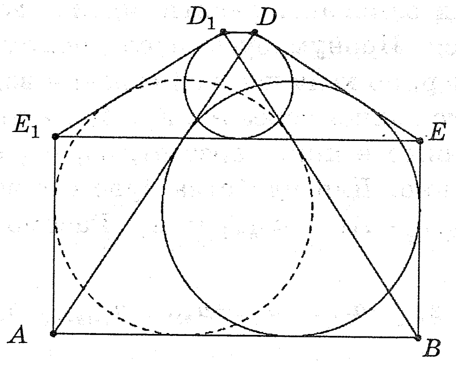


Рисунок 2

биссектрисы угла DAB с прямой ℓ. Очевидно, что $BE = ED$ при любом положении точки D на дуге BC. Построим точки D_1 и E_1, симметричные относительно высоты CH (рис. 1). Тогда в полученном выпуклом шестиугольнике $ABEDD_iE_i$ оба четырёхугольника $ADEB$ и ABD_iE_i являются описанными при любом положении точки D на дуге BC. Действительно, по построению $AD + BE = [AD = AB,\ BE = ED] = AB + DE$ и поэтому, вследствие симметрии, $BD_1 + AE_1 = CD_1 + AB + E_1D_1$; следовательно, оба четырёхугольника $ADEB$ и ABD_1E_1 являются описанными.

Покажем теперь, что существует такое положение точки D на дуге CB, что четырёхугольник E_1D_1DE также является описанным. Пусть P — проекция точки D_1 на отрезок AB. Тогда условие того, что четырёхугольник E_1D_1DE является описанным, равносильное равенству $DD_1 + EE_1 = DE + D_1E_1$, будет равносильно, в силу построения, равенству $PB = BE$. Последнее равенство равносильно условию $\angle EPB = 45°$, поскольку треугольник EBP прямоугольный. Так как величина угла EPB зависит от положения точки D, то обозначим $\alpha(D) = \angle EPB$. Будем перемещать точку D по дуге CB. В предельном положении – когда точка D совпадает с точкой B – угол $\alpha(B) = 0°$. При перемещении точки D по дуге BC от точки B к точке C угол $\alpha(D)$ будет возрастать и в предельном положении – когда точка D совпадёт с точкой C — он станет равным $\alpha(C) = \angle EHB$. Имеем $\operatorname{tg}\alpha =$

$= \text{tg } \angle EHB = \dfrac{BE}{BH}$. При $D = C$ получим $\angle EAB = 0{,}5\ \angle CAB = 0{,}5 \cdot 60° = 30°$, поэтому $BE = 0{,}5AE$. Так как $BH = 0{,}5AB$, а точка E лежит вне окружности Г, и, следовательно, $AE > AB$, то $\text{tg } \alpha(C) = \dfrac{BE}{BH} > \dfrac{AE}{AB} = 1$, откуда следует, что $\alpha(C) > 45°$. Таким образом, при перемещении точки D по дуге BC от точки B до точки C угол $\alpha(D)$ непрерывно возрастает от $0°$ до $\text{arctg}\left(\dfrac{BE}{BH}\right) > 45°$; следовательно, на дуге BC существует такое положение точки D, при котором угол $\angle EPB = (D)$ станет равным $45°$, что и требовалось доказать (рис. 2).

Другой пример шестиугольника указан на рисунке 3, где $A_1B_1A_2B_3$, $A_2B_2A_3B_1$, $A_3B_3A_1B_2$ — описанные четырёхугольники.

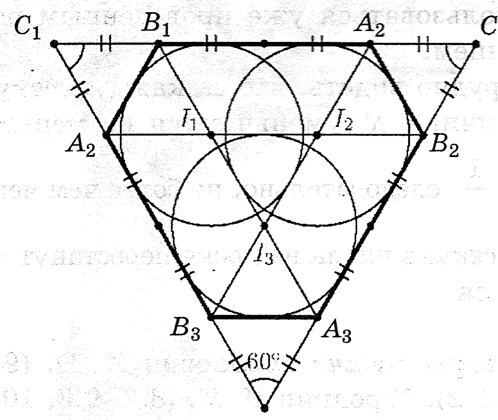


Рисунок 3

3. Ответ: **а)** да, верно; **б)** нет, неверно.

а) Пусть последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$., лакунарна, т. е. найдётся $q > 1$, такое, что при любом $n \in \mathbb{N}$. справедливо неравенство

$$a_{n+1} \geq qa_n. \qquad (1)$$

В частности, лакунарная последовательность является возрастающей.

Из этого неравенства вытекает, что любой полуинтервал $(x, qx]$, где $x > 0$, содержит не более одного элемента последовательности (a_n), $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если бы a_n и a_{n+1} принадлежали этому полуинтервалу, то отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{qx}{x} = q$, что противоречит неравенству (1).

Возьмём натуральное k таким, чтобы выполнялось неравенство $q^k > 2$ (например, $k = [\log_q 2] + 1$, где [...] — целая часть числа). Очевидно включение

$$(x, 2x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (q^{i-1}x, q^i x).$$

Поскольку полуинтервалу $(q^{i-1}x, q^i x]$ принадлежит, как доказано, не более одного элемента последовательности (a_n), $n \in \mathbb{N}$, то вследствие включения (2) интервалу $(x, 2x)$ принадлежит не более k её членов.

Поэтому любая лакунарная последовательность является редкой.

б) Зададим последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, соотношениями:

$$a_{2n-1} = 2^n,\ a_{2n} = 2^n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right),\ n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Так, определённая последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, является возрастающей, поскольку при любом $n \in \mathbb{N}$ очевидно двойное неравенство $a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n+1}$, легко вытекающее из равенств (3). Кроме того, эта последовательность является редкой, так как любой интервал $(x, 2x)$ содержит не более одного числа вида $2m$, $m \in \mathbb{N}$, а значит, не более трёх её членов.

С другой стороны, поскольку

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

а числа $\dfrac{1}{n+1}$ за счёт выбора n могут быть сделаны сколь угодно близкими к единице, последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, не является лакунарной.

4. Через $a_1^t, a_2^t, \dots, a_n^t$ обозначим числа, записанные на доске спустя t секунд $(t \geq 0)$. а через s^t — их среднее арифметическое. Рассмотрим суммарное отклонение записанных чисел от их среднего арифметического — сумму

$$\Delta^t \left|a_1^t - s^t\right| + \left|a_2^t - s^t\right| + \dots + \left|a_n^t - s\right|.$$

Покажем, что если хотя бы одно число на доске изменится, то значение Δ^t уменьшится.

Предположим, что при переходе от t-ой секунды к $(t+1)$-ой ровно k чисел увеличились на 1, и ровно ℓ чисел уменьшились на 1, а значит, их среднее арифметическое увеличилось на величину $\frac{(k-l)}{n}$, т. е. $s^{t+1}=\frac{s^t+(k-l)}{n}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $k\ge l\ge 0$ (хотя бы одно из неравенств строгое). Имеем:

$$\Delta^{t+1}=\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^{t+1}-s^{t+1}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^{t+1}-s^t+s^t-s^{t+1}\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|s^{t+1}-s^t\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^{t+1}-s^t\right|=n\frac{k-l}{n}+\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^{t+1}-s^t\right|=$$

$$=k-l+\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^{t+1}-s^t\right|.$$

Оценим последнюю сумму. Если число a_i^t не изменилось, т. е.

$$a_i^t=a_i^{t+1},\text{ то }\left|a_i^{t+1}-s^t\right|=\left|a_i^t-s^t\right|.$$

Если число a_i^t изменилось на 1, то в силу условия это означает, что число a_i^{t+1} стало на 1 ближе к числу s^t, при этом знаки чисел $a_i^t-s^t$ и $a_i^{t+1}-s^t$ совпадают.

Следовательно, в этом случае

$$\left|a_i^{t+1}-s^t\right|=\left|a_i^t-s^t\right|-1.$$

Тех индексов i, при которых выполняется последнее равенство, согласно предположению ровно $k+1$ Поэтому, продолжая оценку (1) величины Δ^{t+1}, получаем:

$$\Delta^{t+1}\le(k-l)+\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^{t+1}-s^t\right|=(k-l)-(k+l)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^t-s^{t+1}\right|=\Delta^t-2l. \qquad (2)$$

Нестрогое неравенство $\Delta^{t+1}\le\Delta^t$ доказано. Если предположить, что оно является равенством, то во всех проведённых выше оценках нестрогие неравенства являются равенствами, в частности, из (2) заключаем, что $l=0$ и $k>1$. Для того чтобы неравенство (1) являлось равенством, должны выполняться равенства $\left|a_i^{t+1}-s^{t+1}\right|=\left|a_i^{t+1}-s^t\right|+\left|s^t-s^{t+1}\right|$, т. е. числа $s^t-s^{t+1}<0$ и $a_i^{t+1}-s^t$ одного знака. Значит, чисел, которые больше среднего, не было вообще — полученное противоречие показывает, что неравенство $\Delta^{t+1}\le\Delta^t$ является строгим.

Итак, в предположении, что $k\ge l\ge 0$, неравенство $\Delta^{t+1}<\Delta^t$ доказано. Для доказательства этого же неравенства в предположении, что $l\ge k\ge 0$, достаточно заменить записанные числа на противоположные и воспользоваться уже проведённым рассуждением.

Нетрудно видеть, что за каждую секунду величина Δ^t уменьшается не меньше, чем на $\frac{1}{n}$, следовательно, не более чем через $\left[n\Delta^0\right]$ секунд числа на доске перестанут изменяться.

Авторы задач: Воронович И. И. (9.1, 11.1, 11.2), Городнин И. И. (8.2, 9.3, 10.1, 10.2), Жибрик Е. В. (8.4, 11,4), Каскевич В. И. (8.1), Карамзин В. П. (9.4), Карпук М. В. (10.4, 11,4), Мазаник С. А. (8.3, 9.2, 11.2), Миротин А. Р. (10.3, 11.3).