Е. А. Барабанов, ведущий научный сотрудник
Института математики Национальной академии наук Беларуси,
И. И. Воронович, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации
Белорусского государственного университета,
В. И. Каскевич, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации
Белорусского государственного университета,
С. А. Мазаник, заведующий кафедрой высшей математики
Белорусского государственного университета

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 65-й БЕЛОРУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Первый день

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Числа x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) являются корнями уравнения

$$x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = 0,$$

где a — некоторое действительное число.

Найдите все возможные значения, которые может принимать выражение

$$4x_1 - x_1^2 + x_3^2.$$

2. Найдите все пары $(n;\ m)$ натуральных чисел n и m, для которых выполняется равенство

$$n! + 505 = m^2\ .$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Пусть B_1 — основание перпендикуляра BB_1, опущенного из вершины B на биссектрису угла BMA, а C_1 — основание перпендикуляра CC_1, опущенного из вершины C на биссектрису угла AMC. Луч MA пересекает отрезок B_1C_1 в точке A_1.

Найдите величину отношения $\dfrac{B_1A_1}{A_1C_1}$.

4. У Тани есть n^2 конфет, которые разложены в n коробок ($n > 2$). Таня выбирает какие-то две коробки, и если общее число конфет в них чётное, то Таня перекладывает конфеты в этих двух коробках так, чтобы их стало поровну. В противном случае Таня выбирает другую пару коробок и пытается сделать с ними то же самое.

При каких n Таня заведомо может с помощью таких перекладываний уравнять количества конфет во всех коробках независимо от их первоначального распределения в этих коробках?

IX класс

1. Прямая пересекает гиперболу H_1, заданную уравнением $y = \dfrac{1}{x}$, в точках A и B, а гиперболу H_2, заданную уравнением $y=-\frac{1}{x}$, — в точках C и D. Точка O — начало координат.

Докажите, что площади треугольников OAC и OBD равны.

2. Существует ли функция $f(x)$, заданная при всех действительных x и принимающая действительные значения, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases}\{f(x)\}\sin^2 x+\{x\}\cos f(x)\cos x=f(x),\\ f(f(x))=f(x),\end{cases}$$

при всех действительных x.

(Здесь через $\{y\}$ обозначена дробная часть числа y.)

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) как на диаметрах построены окружности Γ_{AB} и Γ_{CD}. Окружность Γ_{AB} пересекает отрезки AC и BD в точках M и N соответственно. Окружность Γ_{CD} пересекает отрезки AC и BD в точках K и L соответственно.

Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ — трапеция или параллелограмм.

4. У Светы есть n^2 конфет, которые разложены в n коробок ($n > 3$). Света выбирает какие-то три коробки, и если общее число конфет в них кратно 3, то Света перекладывает конфеты в этих трёх коробках так, чтобы их стало поровну. В противном случае Света выбирает другую тройку коробок и делает с ними то же самое.

При каких n Света заведомо может с помощью таких перекладываний уравнять количества конфет во всех коробках независимо от их первоначального распределения в этих коробках?

X класс

1. Из точки M, лежащей на гиперболе H_1, заданной уравнением $y=\frac{1}{x}$, проведены две касательные к ветвям гиперболы H_2, заданной уравнением $y=-\frac{1}{x}$; M_1, M_2 — точки касания.

Докажите, что прямая M_1M_2 касается гиперболы H_1.

2. а) Когда натуральное число n разделили с остатком поочерёдно на два других натуральных числа, то в результате получили два ненулевых остатка.

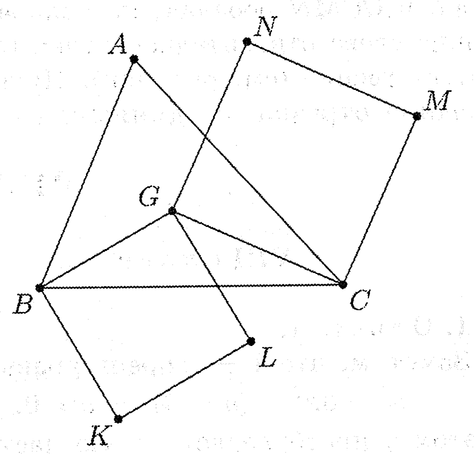
Может ли сумма этих остатков равняться исходному числу n?

б) Натуральное число n разделили с остатком поочерёдно на 29, на 39 и на 59. В результате получились три ненулевых остатка, сумма которых равна исходному числу n.

Найдите все такие n.

3. Пусть A_1 — середина стороны BC, а G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Через $GBKL$ и $GCMN$ обозначены квадраты, лежащие слева относительно лучей GB и GC соответственно (см. рисунок). Пусть A_2 — середина отрезка, соединяющего центры квадратов $GBKL$ и $GCMN$.

Найдите отношение отрезков $\frac{AG}{A_1A_2}$.



4. Найдите все действительные числа a и функции $f(x)$, заданные при всех действительных x и принимающие действительные значения, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) справедливо неравенство $af(x) - x \le \le af(f(y)) - y$ для всех действительных чисел x и y.

2) существует действительное число x_0, такое, что $f(x_0) = x_0$.

XI класс

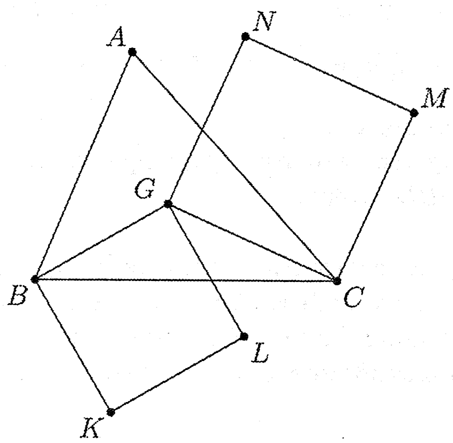
1. Прямая пересекает гиперболу H_1, заданную уравнением $y=\frac{1}{x}$, в точках A и B, а гиперболу H_2, заданную уравнением $y=-\frac{1}{x}$, — в точках C и D. Касательные к гиперболе H_1 в точках A и B пересекаются в точке M, а касательные к гиперболе H_2 в точках C и D пересекаются в точке N.

Докажите, что точки M и N симметричны относительно начала координат.

2. Натуральное число n разделили с остатком поочерёдно на 29, на 41 и на 59. В результате получились три ненулевых остатка, сумма которых равна исходному числу n.

Найдите все такие n.

3. Пусть A_1 — середина стороны BC, а G — точка пересечения медиан неравнобедренного треугольника ABC. Через $GBKL$ и $GCMN$ обозначены квадраты, лежащие слева относительно лучей GB и GC соответственно (см. рисунок). Пусть A_2 — середина отрезка, соединяющего центры квадратов $GBKL$ и $GCMN$. Описанная окружность треугольника A_1A_2G пересекает BC в точках A_1 и X.



Найдите отношение $\frac{A_1X}{XH}$, где H — основание высоты AH треугольника ABC.

4. Найдите все функции $f(x)$, заданные на отрезке [0, 1] и принимающие значения из отрезка [0, 1], которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases}\{f(x)\}\sin^2 x+\{x\}\cos f(x)\cos x=f(x),\\ f(f(x))=f(x),\end{cases}$$

при всех действительных x.

(Здесь через $\{y\}$ обозначена дробная часть числа y.)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Ответ: 4.

Заметим, что 1 — корень уравнения

$$x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = 0. \qquad (1)$$

Поэтому, преобразовав левую часть этого уравнения

$$x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + ax - a = (x - 1)(x^2 - 2x + a),$$

получим равносильное уравнение

$$(x - 1)(x^2 - 2x + a) = 0.$$

Следовательно, два других корня уравнения (1) являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - 2x + a = 0. \qquad (2)$$

Корнями этого уравнения являются числа $1\pm\sqrt{1-a}$. Так как одно из этих чисел больше 1, а второе меньше 1, то

$$x_1 = 1-\sqrt{1-a},\ x_2 = 1,\ x_3 = 1+\sqrt{1-a}.$$

Следовательно,

$$4x_1 - x_1^2 + x_3^2 = (x_3 + x_1)(x_3 - x_1) + 4x_1 = 2(x_3 - x_1) + 4x_1 = 2(x_3 + x_1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

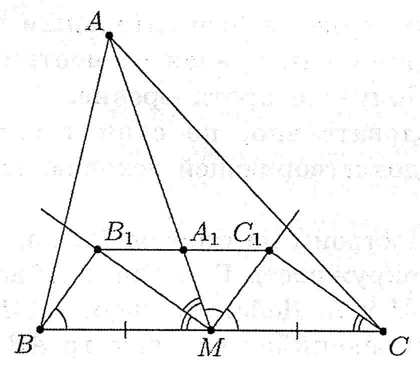
2. Ответ: (4; 23), (5; 25), (6; 35).

Легко видеть, что числа $1! + 505 = 506$, $2! + 505 = 507$, $3! + 505 = 511$ не являются точными квадратами. Далее, $4! + 505 = 529 = 23^2$, $5! + 505 = 625 = 25^2$, $6! + 505 = 1225 = 35^2$. Поэтому имеем три пары

(4; 23), (5; 25), (6; 35), удовлетворяющие условию задачи. Покажем, что больше решений данного уравнения нет. Действительно, числа $7! + 505 = 5545$ и $9! + 505 = 363385$ — не точные квадраты, так как делятся на 5, но не делятся на 25. Число $8! + 505 = 40825 = 25 \cdot 1633$ — не точный квадрат, так как 1633 — не точный квадрат. Наконец, если $n \geq 10$, то $n!$ заканчивается по крайней мере двумя нулями. Поэтому число $n! + 505 = m^2$ заканчивается цифрами 05, следовательно, делится на 5, но не делится на 25 и, значит, не является точным квадратом.

3. Ответ: 1.

Пусть $\angle BMA = 2x$, тогда $\angle AMC = 180° - 2x$. Так как MB_1 делит угол BMA пополам, то $\angle BMB_1 = \angle B_1MA = x$. Аналогично получаем, что $\angle AMC_1 = \angle C_1MC = 90° - x$. Треугольник BMB_1 является прямоугольным, поэтому $\angle B_1BM = 90° - \angle B_1MB = 90° - x$. У прямоугольных треугольников BMB_1 и MCC_1 равны гипотенузы ($BM = MC$) и углы, прилежащие к гипотенузам ($\angle B_1BM = \angle C_1MC = x$). Следовательно, $\Delta BMB_1 = \Delta MCC_1$. Из равенства треугольников $\Delta BMB_1 = \Delta MCC_1$ следует равенство отрезков $BB_1 = MC_1$. Так как $\angle B_1BM = \angle C_1MC$, то $BB_1 \parallel MC_1$. Таким образом, четырёхугольник BMC_1B_1 является параллелограммом. Так как $B_1C_1 \parallel BM$, то $\angle BMB_1 = \angle A_1B_1M = \angle B_1MA_1$. Следовательно, треугольник B_1MA_1 является равнобедренным: $MA_1 = A_1B_1$. Аналогично, треугольник MC_1A_1 является равнобедренным: $MA_1 = C_1A_1$. Тогда искомое отношение равно $\dfrac{B_1A_1}{A_1C_1} = \dfrac{MA_1}{MA_1} = 1$.



4. Ответ: при $n = 2^m$, где m — любое натуральное число, большее 1.

Тане нужно сделать так, чтобы в результате во всех коробках стало по n конфет. Если в какой-то коробке находится p конфет, то величину $p - n$ будем называть отклонением (числа конфет в этой коробке). В этом смысле цель перекладываний — сделать отклонения числа конфет во всех коробках равными нулю. Заметим, что сумма всех отклонений равна нулю или, что то же самое, сумма всех положительных отклонений равна сумме модулей всех отрицательных отклонений. Далее, сделать результативный ход, т. е. изменить количества конфет в коробках, можно всегда, если только имеются коробки с неравными отклонениями одинаковой чётности. При этом уменьшается модуль отклонения в той из двух коробок, в которой он был наибольшим. Потому процесс перекладываний конечен, и он закончится, если либо 1) все отклонения нулевые, либо 2) имеются только два отклонения разной чётности, одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Покажем, что если $n = 2^m$ ($m > 1$), то вариант 2) не возможен. Действительно, пусть имеется a ($1 < a < n$) положительных отклонений, равных x, и $n - a$ отрицательных отклонений, равных $-y$. Тогда, как отмечалось, $ax + (n - a)(-y) = 0$, откуда $a(x + y) = ny$ или $a(x + y) = 2^m y$. Из полученного равенства, поскольку $a < n = 2^m$, следует, что сумма $x + y$ чётная, т. е. отклонения x и y — одинаковой чётности, и, следовательно вариант 2) исключён. Иными словами, при таких n всегда можно уравнять количества конфет в коробках.

Пусть теперь число $n > 2$ таково, что $n \neq 2^m$. Тогда $n = (2k + 1) \cdot 2^m$ для некоторого натурального k и целого неотрицательного m. Пусть конфеты распределены по коробкам следующим образом: имеется $a = 2^m$ коробок с положительным отклонением $x = 2k$, а в остальных $n - a = 2k \cdot 2^m$ отрицательное отклонение $-y = -1$. Такое распределение действительно возможно, поскольку $a(x + y) = ny$ при указанных значениях a, x, y и n, очевидно, выполняется. При этом, так как положительное отклонение $2k$ и отрицательное -1 имеют разные чётности, т. е. имеет место случай 2), невозможно сделать ни одного результативного хода и, тем самым, невозможно уравнять количества конфет во всех коробках.

IX класс

1. Не нарушая общности, можно считать, что гиперболы, прямая и точки на них расположены так, как это изображено на рисунке (в противном случае достаточно повернуть всю плоскость на угол, кратный 90°, и переобозначить точки). Пусть

$$A\left(a;\ \frac{1}{a}\right),\ B\left(b;\ \frac{1}{b}\right),\ C\left(c;\ -\frac{1}{c}\right),\ D\left(d,\ -\frac{1}{d}\right).$$

Заметим, что все числа a, b, c, d попарно различны, причём $c < 0$, $d > a > b > 0$. Запишем уравнения прямых ℓ_{AB} и ℓ_{CD}, проходящих через пары точек A, B и C, D:

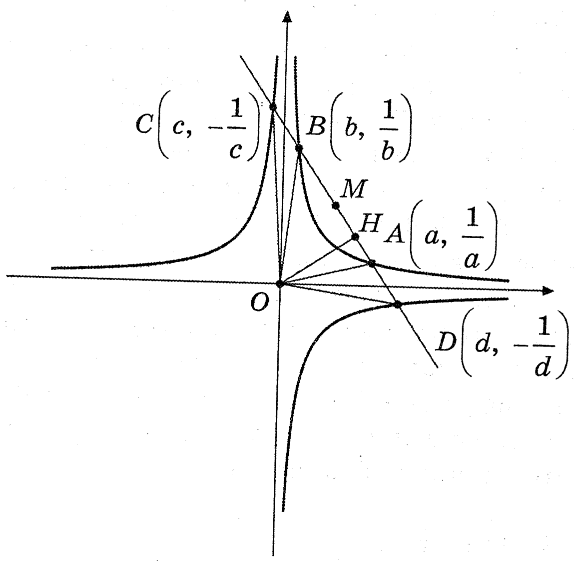
$$\ell_{AB}:\ \frac{x-a}{b-a}=\frac{y-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$\ell_{CB}:\ \frac{x-c}{d-c}=\frac{y+\frac{1}{c}}{-\frac{1}{d}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow y=\frac{1}{cd}x-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}.$$

Поскольку эти прямые совпадают $\ell = \ell_{AB} = \ell_{CD}$, то

$$ab=-cd,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \Rightarrow a+b=c+d. \qquad (1)$$

Абсцисса середины M отрезка AB равна $x_M=\dfrac{a+b}{2}$ и в силу (1) равна абсциссе $\dfrac{c+d}{2}$ середины отрезка CD. Поскольку точки A, B, C, D лежат на одной прямой, то M — середина и отрезка AB, и отрезка CD. Поэтому $AC = CM + MA = MD + MB = BD$. Поскольку высоты, проведённые из вершины O к сторонам AC и BD треугольников OAC и OBD совпадают (эти высоты — перпендикуляр OH, опущенный из точки O на прямую ℓ), то площади этих треугольников равны.



2. Ответ: нет, не существует.

Предположим, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условию задачи, существует.

Подставив $f(x)$ вместо x в первое равенство условия задачи, получим соотношение

$$\{f(f(x))\}\sin^2 f(x) + \{f(x)\}\cos^2 f(x) = f(f(x)).$$

Так как $f(f(x)) = f(x)$, то из последнего равенства следует, что $\{f(x)\} = f(x)$. Таким образом, множество значений функции $f(x)$ принадлежит полуинтервалу $[0,\ 1)$.

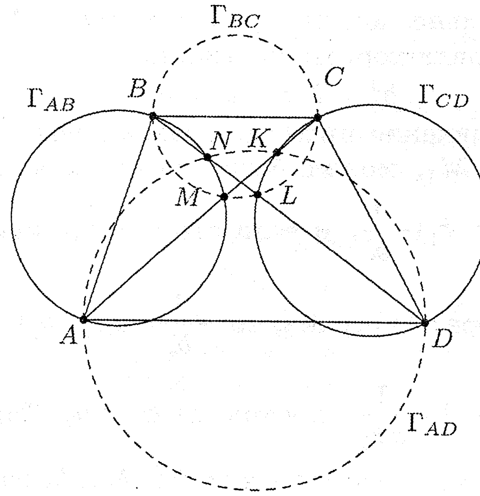
Подставив в первое равенство условия задачи вместо x число π, получим соотношение

$$-\{\pi\}\cos f(\pi) = f(\pi).$$

Так как $f(\pi) \in [0,\ 1)$ и число π не является целым, то левая часть последнего равенства является отрицательным числом, в то время как правая — неотрицательным. Получено противоречие.

Следовательно, не существует функции, удовлетворяющей условию задачи.

3. Построим на стороне BC как на диаметре окружность Γ_{BC}. Она пройдёт через точки M и L. Действительно, $\angle AMB = 90°$ как опирающийся на диаметр AB окруж-



ности Γ_{AB}. Тогда $\angle BMC = 180° - \angle AMB = 90°$, и, следовательно, точка M принадлежит окружности Γ_{BC}. Аналогично,

$$\angle DLC = 90° \Rightarrow \angle BLC = 180° - \angle DLC = 90°,$$

поэтому точка L также принадлежит окружности Γ_{BC}. Построим на стороне AD как на диаметре окружность Γ_{AD}. Аналогично предыдущему доказываем, что точки N и K принадлежат окружности Γ_{AD}.

Заметим теперь, что

$$\angle NKM = \angle NKA = 0{,}5 \smile AN = \angle NDA = \angle BDA$$

и

$$\angle KML = \angle CML = 0{,}5 \smile CL = \angle CBL = \angle CBD.$$

Так как $BC \parallel AD$, то $\angle BDA = \angle CBD$, и, значит, $\angle NKM = \angle KML$, откуда и следует параллельность прямых NK и ML.

Другое расположение точек рассматривается аналогично.

4. Ответ: при $n = 3^m$, где m — любое натуральное число, большее 1.

Свете нужно сделать так, чтобы в результате во всех коробках стало по n конфет. Если в какой-то коробке находится p конфет, то величину $p - n$ будем называть отклонением (числа конфет в этой коробке). В этом смысле цель перекладываний — сделать отклонения числа конфет во всех коробках равными нулю. Заметим, что сумма всех отклонений равна нулю. Далее, сделать результативный ход, т. е. изменить количества конфет в коробках, можно только в следующих случаях, если а) имеются коробки с неравными отклонениями, сравнимыми по модулю 3, или б) имеются коробки со всеми тремя неравными по модулю 3 отклонениями. При этом заведомо уменьшается модуль отклонения в той из трёх коробок, в которой он был наибольшим (а возможно, модули двух или всех трёх отклонений). Потому процесс перекладываний конечен, и он закончится, если либо 1) все отклонения нулевые, либо 2) имеются только два несравнимые по модулю 3 отклонения, одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Покажем, что если $n = 3^m$ $(m > 1)$, то вариант 2) не возможен. Действительно, пусть имеется a $(1 < a < n)$ положительных отклонений, равных x, и $n - a$ отрицательных отклонений, равных $-y$. Тогда, как отмечалось, $ax + (n - a)(-y) = 0$, откуда $a(x + y) = ny$ или $a(x + y) = 3^m y$. Из полученного равенства, поскольку $a < n = 3^m$, следует, что сумма $x + y$ делится на 3, т. е. отклонения x и $-y$ — сравнимы по модулю 3, и, следовательно вариант 2) исключён. Иными словами, при таких n всегда можно уравнять количества конфет в коробках.

Пусть теперь число $n > 3$ таково, что $n \neq 3^m$. Тогда $n = (3k + 1) \cdot 3^m$ (или $n = (3k + 2) \cdot 3^m$) для некоторого натурального k (целого неотрицательного k) и целого неотрицательного m. Пусть конфеты распределены по коробкам следующим образом: имеется $a = 3^m$ $(a = 2 \cdot 3^m)$ коробок с положительным отклонением $x = 3k$, а в остальных $n - a = 3k \cdot 3^m$ отрицательное отклонение $-y = -1$ (или $-y = -2$). Такое распределение действительно возможно, поскольку $a(x + y) = ny$ при указанных значениях a, x, y и n, очевидно, выполняется. При этом, так как положительное отклонение $3k$ и отрицательное -1 (или -2) не сравнимы по модулю 3, т. е. имеет место случай 2), невозможно сделать ни одного результативного хода и, тем самым, невозможно уравнять количества конфет во всех коробках.

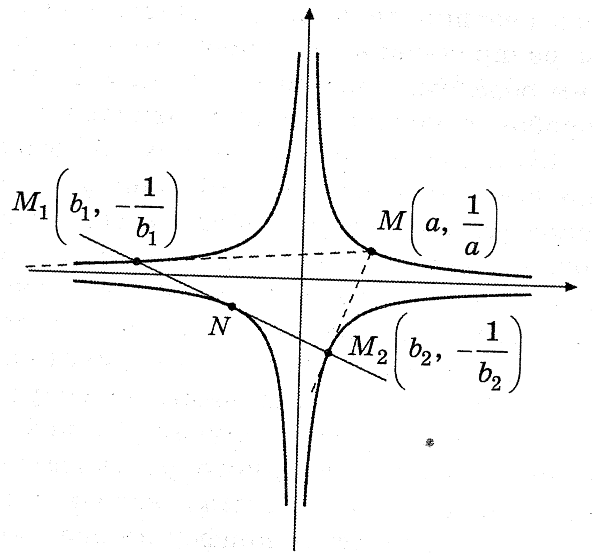
X класс

1. Не нарушая общности, считаем, что точка $M\left(a;\ \frac{1}{a}\right)$ лежит на ветви гиперболы H_1, $y=\frac{1}{x}$, расположенной в первой координатной четверти, а точки $M_1\left(b_1;\ -\frac{1}{b_1}\right)$ и $M_2\left(b_2;\ -\frac{1}{b_2}\right)$ лежат на ветвях гиперболы H_2, $y=-\frac{1}{x}$, расположенных во второй и четвёртой координатных четвертях соответственно (см. рисунок). Так как производная функции $y(x)=-\frac{1}{x}$ равна $y'(x)=\frac{1}{x^2}$, то уравнение касательной к гиперболе H_2 в точке с координатами $\left(b;\ -\frac{1}{b}\right)$ имеет вид

$$y=\frac{1}{b^2}(x-b)-\frac{1}{b}.$$

Поскольку точка $M\left(a;\ \frac{1}{a}\right)$ принадлежит этой касательной, то $\frac{1}{a}=\frac{1}{b^2}(a-b)-\frac{1}{b}$. Следовательно, абсциссы b_1 и b_2 точек M_1 и M_2 удовлетворяют уравнению

$$b^2+2ab-a^2=0. \qquad (1)$$



Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, может быть записано в виде $y=k(x-b_1)-\frac{1}{b_1}$, и если эта прямая проходит через точку M_2, то $-\frac{1}{b_2}=k(b_2-b_1)-\frac{1}{b_1}$, откуда $k=\frac{1}{b_1b_2}$, поскольку $b_1\neq b_2$. Таким образом, уравнение прямой M_1M_2 имеет вид

$$y=\frac{1}{b_1b_2}(x-b_1)-\frac{1}{b_1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{b_1b_2}x-\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{x-(b_1+b_2)}{b_1b_2}.$$

Поскольку b_1 и b_2 — корни уравнения (1), то по теореме Виета имеем $b_1b_2=-a^2$, $b_1+b_2=-2a$. Тогда уравнение прямой M_1M_2 примет вид

$$y=\frac{x+2a}{-a^2}.$$

Заметим, что при $x=-a$ получим $y=-\frac{1}{a}$, т. е. точка $N\left(-a;\ -\frac{1}{a}\right)$, принадлежащая ветви гиперболы H_1, лежащей в третьей координатной четверти, принадлежит прямой M_1M_2. Осталось заметить, что угловой коэффициент касательной к гиперболе H_1 в точке $N\left(-a;\ -\frac{1}{a}\right)$ равен $y'(-a)=-\frac{1}{(-a)^2}$, т. е. совпадает с угловым коэффициентом прямой M_1M_2. Следовательно, прямая M_1M_2 касается гиперболы H_1 (в точке N).

2. Ответ: **а)** нет, не может; **б)** $n=112$.

а) Предположим, что сумма двух ненулевых остатков r_1 и r_2, полученных при делении числа n на a и на b ($a\le b$), равна исходному числу n. Тогда $n=aq_1+r_1=$

$= bq_2 + r_2 = r_1 + r_2$ (q_1 и q_2 — целые неотрицательные), причём $r_1 < a$, $r_2 < b$, откуда $bq_2 = r_1 < a \le b$. Неравенство $bq_2 < b$ может быть выполнено только при $q_2 = 0$. Но тогда $r_1 = bq_2 = b \cdot 0 = 0$ — противоречие.

б) Пусть, согласно условию, $n = 29q_1 + r_1 = 39q_2 + r_2 = 59q_3 + r_3 = r_1 + r_2 + r_3$, причём $r_1 < 29$, $r_2 < 39$, $r_3 < 59$. Из данных равенств, в частности, следует, что $59q_3 = r_1 + r_2 \le 28 + 38 = 66$, откуда $q_3 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_2 = 59. \qquad (1)$$

Далее, $39q_2 = r_1 + r_3 \le 28 + 58 = 86$, откуда $q_2 \le 2$. Рассмотрим два случая:

а) $q_2 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_3 = 39. \qquad (2)$$

Тогда из (1) и (2) получаем $98 = 59 + 39 = r_1 + r_2 + r_1 + r_3 = n + r_1 = 29q_1 + 2r_1$, т. е. $29q_1 + 2r_1 = 98$, откуда q_1 чётно и $29q_1 < 98$, следовательно $q_1 = 2$. Тогда $r_1 = \frac{1}{2}(98 - 2 \cdot 29) = 20$. Но тогда согласно (1) $r_2 = 59 - 20 = 39$, что невозможно, так как $r_2 < 39$.

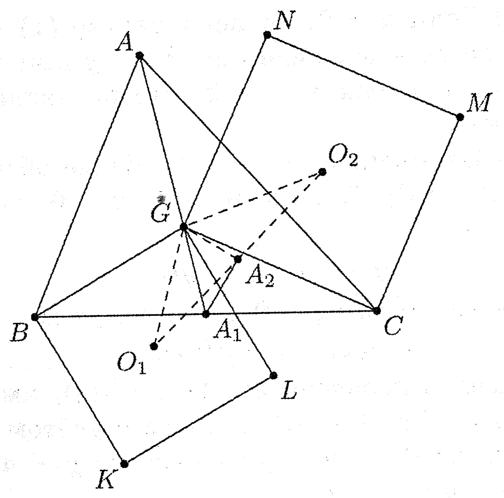
б) $q_2 = 2$. Тогда

$$r_1 + r_3 = n - r_2 = 39q_2 = 78. \qquad (3)$$

Тогда из (1) и (3) аналогично получаем $29q_1 + 2r_1 = 137$, откуда q_1 нечётное и $29q_1 < 137$, следовательно $q_1 = 1$ или 3. Если $q_1 = 1$, то $2r_1 = 108$, т. е. $r_1 = 54$ — противоречие. Если $q_1 = 3$, то $r_1 = 25$, $r_2 = 34$, $r_3 = 53$, $n = 27 + 32 + 55 = 112$ — это значение удовлетворяет условию задачи.

3. Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пусть $R_G^{45°}$ — поворот на 45° вокруг точки G, а H_G^λ — гомотетия с центром G и коэффициентом $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим треугольники BCG и O_1O_2G. Так как $\angle O_1GB = \angle O_2GC = 45°$, $BG = \sqrt{2}GO_1$ и $CG = \sqrt{2}GO_2$, то $H_G^\lambda \circ R_G^{45°}(\Delta BCG) = \Delta O_1O_2G$, а значит, медиана GA_1 треугольника BCG под действием преобразования $H_G^\lambda \circ R_G^{45°}$ переходит в медиану GA_2 треугольника O_1O_2G.



Другими словами, $\angle A_2GA_1 = 45°$ и $GA_1 = \sqrt{2}GA_2$. Таким образом, ΔA_1A_2G — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A_2. Поэтому

$$\sqrt{2}A_1A_2 = GA_1 = \frac{AG}{2},$$

т. е. $\frac{AG}{A_1A_2} = 2\sqrt{2}$.

4. Ответ: $a = 1$, $f(x) = x$.

1) Пусть сперва $a < 0$. В данном неравенстве

$$af(x) - x \le af(f(y)) - y \qquad (1)$$

положим $y = x$, получим $af(x) \le af(f(x))$, и тогда

$$f(x) \ge f(f(x)) \qquad (2)$$

при всех действительных $x \in \mathbb{R}$.

Далее, положим в (1) $x = f(y)$, получим $y \le f(y)$ при всех $y \in \mathbb{R}$. В частности, при $y = f(x)$ будет справедливо неравенство $f(x) \le f(f(x))$, и тогда в силу (2) справедливо равенство $f(f(x)) = f(x)$ при всех действительных $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, неравенство (1) принимает вид $af(x) - x \le af(y) - y$ при всех действительных x, $y \in \mathbb{R}$. Отсюда $af(x) - x$ — константа, т. е. $af(x) = x + c$. Заменяя здесь x на $f(x)$, получим $af(f(x)) = f(x) + c$ или $f(x) + c = af(f(x)) = x + c$, следовательно, $f(x) = x$, а тогда $ax = x + c$ при всех действительных $x \in \mathbb{R}$. Получено противоречие.

2) Если $a = 0$, то неравенство (1) превращается в неравенство $-x \le -y$ при всех действительных $x, y \in \mathbb{R}$, что не является верным.

3) Наконец, пусть $a > 0$. Далее обозначим $\alpha = f(0)$. Положим в (1) $x = 0$, получим

$$y + a\alpha \le af(f(y)). \qquad (3)$$

Далее, положим $y = 0$ в (1), получим

$$af(x) \le x + af(\alpha). \qquad (4)$$

Полагая в неравенстве (4) $x = f(y)$, имеем $af(f(y)) \le f(y) + af(\alpha)$, и тогда с учётом неравенства (3) имеем неравенство $y + a\alpha \le$ $\le f(y) + af(\alpha)$, т. е.

$$f(y) \ge y + d, \qquad (5)$$

где $d = a\alpha - af(\alpha)$. Тогда из неравенств (4) и (5) и того, что $a > 0$, следует $x + af(\alpha) \ge$ $\ge af(x) \ge ax + ad$ или $(1 - a)x \ge a(d - f(\alpha))$ при всех действительных $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $1 - a = 0$, а значит $a = 1$.

Стало быть, неравенство (1) имеет вид

$$f(x) - x \le f(f(y)) - y. \qquad (1')$$

Положим здесь $x = f(y)$, получим $y \le f(y)$. С другой стороны, при $y = x_0$ неравенство (1′) влечёт $f(x) \le x$. Отсюда $f(x) = x$.

Проверка того, что число $a = 1$ и функция $f(x) = x$ удовлетворяют условию задачи, является тривиальной.

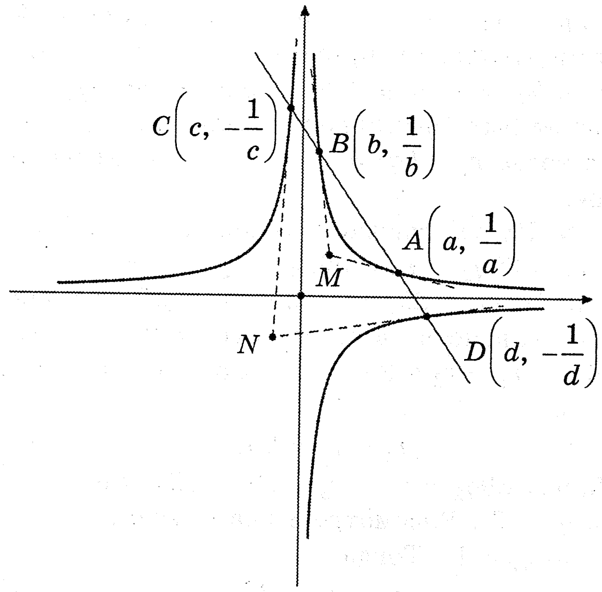
XI класс

1. Не нарушая общности, можно считать, что гиперболы, прямая и точки на них расположены так, как это изображено на рисунке (в противном случае достаточно повернуть всю плоскость на угол, кратный 90°, и переобозначить точки). Пусть

$$A\left(a;\ \frac{1}{a}\right),\ B\left(b;\ \frac{1}{b}\right),\ C\left(c;\ -\frac{1}{c}\right),\ D\left(d,\ -\frac{1}{d}\right).$$

Заметим, что все числа a, b, c, d попарно различны, причём $c < 0$, $d > a > b > 0$.

Так как производная функции $y(x) = \dfrac{1}{x}$ равна $y'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, то уравнения касательных к гиперболе H_1 в точках A и B имеют соответственно вид



$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} \ \text{ и } \ y = -\frac{1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b}.$$

Следовательно, абсцисса x_M их точки пересечения M удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b},$$

откуда $x_M = \dfrac{2ab}{a+b}$. Тогда ордината y_M точки M равна

$$y_M = -\frac{1}{a^2}(x_M - a) + \frac{1}{a} = \frac{2}{a+b}.$$

Аналогично, так как производная функции $y(x) = -\dfrac{1}{x}$ равна $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, то уравнения касательных к гиперболе H_2 в точках C и D имеют соответственно вид

$$y = \frac{1}{c^2}(x-c) - \frac{1}{c} \ \text{ и } \ y = \frac{1}{d^2}(x-d) - \frac{1}{d}.$$

Следовательно, абсцисса x_N их точки пересечения N удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2}(x-c) - \frac{1}{c} = \frac{1}{d^2}(x-d) - \frac{1}{d},$$

откуда $x_N = \dfrac{cd}{c+d}$. Тогда ордината y_M точки N равна

$$y_N = \frac{1}{c^2}(x_N - c) - \frac{1}{c} = -\frac{2}{c+d}.$$

При решении задачи 1 для IX класса было показано, что из условия принадлежности точек A, B, C, D одной прямой следуют равенства $a + b = c + d$ и $ab = -cd$. Поэтому $x_M = -x_N$ и $y_M = -y_N$, что и означает симметричность точек M и N относительно начала координат.

2. Ответ: $n = 79$ и $n = 114$.

Пусть, согласно условию, $n = 29q_1 + r_1 = 41q_2 + r_2 = 59q_3 + r_3 = r_1 + r_2 + r_3$, причём $r_1 < 29$, $r_2 < 41$, $r_3 < 59$. Из данных равенств, в частности, следует, что $59q_3 = r_1 + r_2 \le 28 + 40 = 68$, откуда $q_3 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_2 = 59. \qquad (1)$$

Далее, $41q_2 = r_1 + r_3 \le 28 + 58 = 86$, откуда $q_2 \le 2$. Рассмотрим два случая:

а) $q_2 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_3 = 41. \qquad (2)$$

Тогда из (1) и (2) получаем $100 = 59 + 41 = r_1 + r_2 + r_1 + r_3 = n + r_1 = 29q_1 + 2r_1$, т. е. $29q_1 + 2r_1 = 100$, откуда q_1 чётно и $29q_1 < 100$, следовательно $q_1 = 2$. Тогда $r_1 = \frac{1}{2}(100 - 2 \cdot 29) = 21$, $r_2 = 38$, $r_3 = 20$, $n = 21 + 38 + 20 = 79$ — это значение удовлетворяет условию задачи.

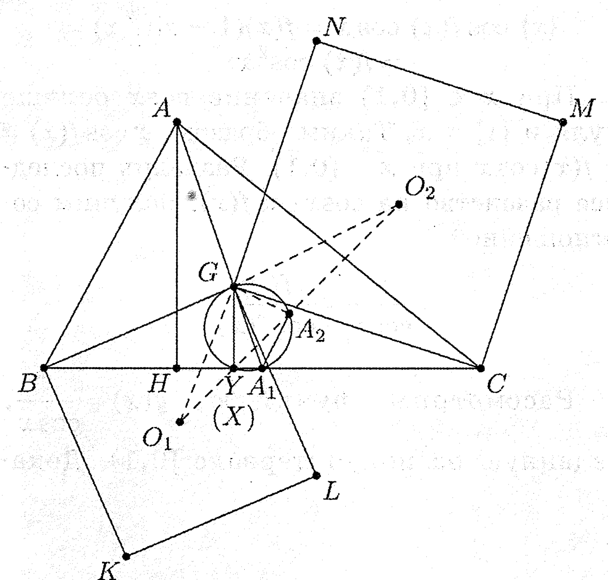
б) $q_2 = 2$. Тогда

$$r_1 + r_3 = n - r_2 = 41q_2 = 82. \qquad (3)$$

Тогда из (1) и (3) аналогично получаем $29q_1 + 2r_1 = 141$, откуда q_1 нечётное и $29q_1 < 141$, следовательно $q_1 = 1$ или 3. Если $q_1 = 1$, то $2r_1 = 112$, т. е. $r_1 = 56$ — противоречие. Если $q_1 = 3$, то $r_1 = 27$, $r_2 = 32$, $r_3 = 55$, $n = 27 + 32 + 55 = 114$ — это значение также удовлетворяет условию задачи.

3. Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пусть $R_G^{45°}$ — поворот на 45° вокруг точки G, а H_G^{λ} — гомотетия с центром G и коэффициентом $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим треугольники BCG и O_1O_2G. Так как $\angle O_1GB = \angle O_2GC = 45°$, $BG = \sqrt{2}GO_1$ и $CG = \sqrt{2}GO_2$, то $H_G^{\lambda} \circ R_G^{45°}$ $(\Delta BCG) = \Delta O_1O_2G$, а значит, медиана GA_1 треугольника BCG под действием преобразования $H_G^{\lambda} \circ R_G^{45°}$ переходит в медиану GA_2 треугольника O_1O_2G. Другими словами, $\angle A_2GA_1 = 45°$ и $GA_1 = \sqrt{2}GA_2$. Таким образом, ΔA_1A_2G — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A_2. Пусть Y — основание высоты, проведённой из вершины G треугольника BCG. Так как треугольник ABC не является равнобедренным, то Y не совпадает с A_1. С другой стороны, $\angle GYA_1 = \angle GA_2A_1 = 90°$, поэтому точка Y лежит на описанной окружности треугольника A_1A_2G, а значит совпадает с точкой X. Так как $GX \perp BC$ и $AH \perp BC$, то $GX \parallel AH$. Таким образом



$$\frac{A_1X}{XH} = \frac{A_1G}{GA} = \frac{1}{2}.$$

4. Ответ: $f(x) = \{x\}$.

Подставив $f(x)$ вместо x в первое равенство условия задачи, получим соотношение

$$\{f(f(x))\} \sin^2 f(x) + \{f(x)\} \cos^2 f(x) = f(f(x)).$$

Так как $f(f(x)) = f(x)$, то из последнего равенства следует, что $\{f(x)\} = f(x)$. Таким образом, множество значений функции $f(x)$ принадлежит полуинтервалу $[0,1)$.

Из первого равенства условия задачи и того, что $\{f(x)\} = f(x)$, следует соотношение

$$\{x\}\cos f(x)\cos x = f(x)(1-\sin^2 x) = f(x)\cos^2 x.$$

При $x \in [0,1)$ значение $\cos x$ больше нуля и $\{x\} = x$. Таким образом, $x\cos f(x) = f(x)\cos x$ при $x \in [0,1)$. Разделив последнее равенство на $\cos x \cos f(x)$, получим соотношение

$$\frac{x}{\cos x} = \frac{f(x)}{\cos f(x)}.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$, заданную на полуинтервале $[0,1)$. Докажем, что $g(x)$ строго возрастает. Действительно,

$$g'(x) = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x} > 0$$

при $x \in [0,1)$. Так как при $x \in [0,1)$ справедливо равенство $g(x) = g(f(x))$, то $f(x) = x$.

Положив $x = 1$ в первом равенстве условия задачи, получим соотношение $f(1)(1 - \sin^2 1) = 0$. Так как $\sin^2 1 \neq 1$, то $f(1) = 0$. Таким образом, $f(x) = \{x\}$ при всех $x \in [0, 1]$. Проверка того, что $f(x) = \{x\}$ действительно удовлетворяет условию задачи, является тривиальной.

Рэдактар і карэктар *М. М. Шавыркіна*
Камп'ютарны набор и вёрстка *А. П. Шаціла*

Выхад у свет 12.06.2015.
Фармат 60×84 1/8. Папера афсетная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 7,44.
Ул.-выд. арк. 7,44. Тыраж 1311 экз. Заказ № 034. Цана свабодная.

Паштовы адрас рэдакцыі часопіса «МАТЭМАТЫКА»:
вул. Будзённага, 21, 220070, г. Мінск.
Матэрыялы можна высылаць на адрас: пр-т Незалежнасці, 4, 220050, г. Мінск, Белдзяржуніверсітэт, факультэт прыкладной матэматыкі і інфарматыкі, пакой 333; тэл. 209-50-72.

Надрукавана ў друкарні РУП «Выдавецтва "Адукацыя і выхаванне"».
ЛП № 02330/327 от 19.01.2012.
Вул. Захарава, 59, 220088, г. Мінск.