2014

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

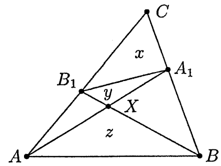
8.5. Число $x = \sqrt{ab}$ называется средним геометрическим положительных чисел a и b, а число $y = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — средним квадратичным этих чисел.

Сравните среднее арифметическое положительных чисел a и b со средним арифметическим чисел x и y.

8.6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков BC и AH соответственно.

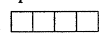
Докажите, что MN — серединный перпендикуляр отрезка B_1C_1.

8.7. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки B_1 и A_1 соответственно; отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X. Обозначим площади треугольников B_1CA_1, B_1XA_1 и AXB через x, y и z соответственно (см. рис.).



Докажите, что выполнены неравенства

а) $y < z$; **б)** $y < x$.

8.8. Найдите все значения $n \geqslant 4$, при которых клетчатый квадрат $n \times n$ можно накрыть в несколько слоёв бумажными фигурками вида , состоящими из четырёх клеток 1×1 (т. е. каждая клетка квадрата должна быть накрыта одним и тем же числом таких фигурок).

(Каждая фигурка кладётся так, чтобы её границы шли по линиям клеток квадрата; фигурки можно поворачивать, но ни одна фигурка не должна выходить за границы квадрата.)

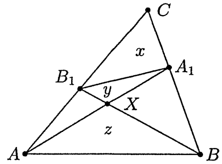
9 класс

9.5. Найдите все значения λ, при которых неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \lambda\sqrt{ab} + (1-\lambda)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

верно для всех положительных чисел a и b.

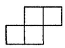
9.6. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки B_1 и A_1 соответственно; отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X. Известно, что площади треугольников B_1CA_1, B_1XA_1 и AXB равны соответственно x, y и z (см. рис.).



Найдите площадь треугольника ABC.

9.7. Дан треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину A и касающаяся стороны BC в некоторой точке X, пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точке Y, отличной от точки A. Пусть Z — точка пересечения луча YX с описанной окружностью $\triangle ABC$, отличная от точки Y.

Докажите, что $\angle CAX = \angle ZAB$.

9.8. Можно ли клетчатый квадрат $n \times n$ ($n \geqslant 3$) накрыть в несколько слоёв бумажными фигурками вида , состоящими из четырёх клеток 1×1 (т. е. каждая клетка квадрата должна быть накрыта одним и тем же числом таких фигурок), если

а) n — нечётное? **б)** n — чётное?

(Каждая фигурка кладётся так, чтобы её границы шли по линиям клеток квадрата; фигурки можно поворачивать и переворачивать, но ни одна фигурка не должна выходить за границы квадрата.)

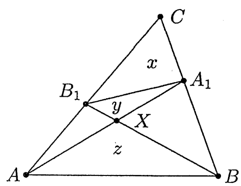
10 класс

10.5. Последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, задана следующим образом:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3 \quad \text{и} \quad a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + 7}{a_{n-3}}, \text{ если } n \geqslant 4.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

10.6. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки B_1 и A_1 соответственно; отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X. Известно, что площади треугольников B_1CA_1, B_1XA_1 и AXB равны соответственно x, y и z (см. рис.).

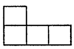


Докажите, что выполнены неравенства

а) $y < \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{xz}$; **б)** $y < \dfrac{1}{3}\sqrt{xz}$.

10.7. На координатной плоскости дано n квадратов размера 2×2. Стороны квадратов параллельны координатным осям. Известно, что центр любого квадрата не является внутренней точкой никакого другого из этих n квадратов.

Докажите, что любой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, содержащий внутри себя все данные квадраты, имеет периметр, не меньший $4(\sqrt{n}+1)$.

10.8. Найдите все значения $n \geqslant 3$, при которых клетчатый квадрат $n \times n$ можно накрыть в несколько слоёв бумажными фигурками вида , состоящими из четырёх клеток 1×1 (т. е. каждая клетка квадрата должна быть накрыта одним и тем же числом таких фигурок). Для каждого такого n найдите минимально возможное число слоёв.

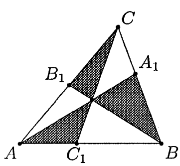
(Каждая фигурка кладётся так, чтобы её границы шли по линиям клеток квадрата; фигурки можно поворачивать и переворачивать, но ни одна фигурка не должна выходить за границы квадрата.)

11 класс

11.5. Докажите, что для любых положительных x и y справедливо неравенство

$$\frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)} < \frac{1}{11}.$$

11.6. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (см. рис.). Оказалось, что площадь белой части треугольника ABC равна площади его чёрной части.

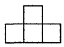


Докажите, что хотя бы один из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 является медианой треугольника ABC.

11.7. а) На координатной плоскости дано n квадратов размера 2×2. Стороны квадратов параллельны координатным осям. Известно, что центр любого квадрата не является внутренней точкой никакого другого из этих n квадратов.

Докажите, что любой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, содержащий внутри себя все данные квадраты, имеет периметр, не меньший $4(\sqrt{n}+1)$.

б) Докажите, что верна более точная, чем в п. **а)** оценка: периметр прямоугольника не меньше $2\lceil 2(\sqrt{n}+1)\rceil$ (здесь через $\lceil a\rceil$ обозначена верхняя целая часть числа a, т. е. наименьшее целое, не меньшее числа a), — и установите её достижимость для любого натурального n.

11.8. Можно ли клетчатый квадрат $n \times n$ накрыть в несколько слоёв бумажными фигурками вида , состоящими из четырёх клеток 1×1 (т. е. каждая клетка квадрата должна быть накрыта одним и тем же числом таких фигурок), если

а) $n = 6$? **б)** $n = 7$?

(Каждая фигурка кладётся так, чтобы её границы шли по линиям клеток квадрата; фигурки можно поворачивать и переворачивать, но ни одна фигурка не должна выходить за границы квадрата.)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: среднее арифметическое чисел a и b не меньше среднего арифметического чисел x и y.

Первое решение. Докажем, что среднее арифметическое чисел a и b не меньше среднего арифметического чисел x и y, т. е. что верно неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{x+y}{2}$, или, равносильно, $a+b \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Приведём с помощью равносильных преобразований это неравенство к неравенству, справедливость которого очевидна. Получаем:

$$a+b \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff (a+b)^2 \geqslant ab+\frac{a^2+b^2}{2}+2\sqrt{ab\cdot\frac{a^2+b^2}{2}} \iff$$

$$\iff (a+b)^2 \geqslant 4\sqrt{ab\cdot\frac{a^2+b^2}{2}} \iff (a+b)^4 \geqslant 8ab(a^2+b^2) \iff$$

$$\iff \left(\frac{(a+b)^2}{ab}\right)^2 \geqslant \frac{8(a^2+b^2)}{ab} \iff \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)^2 \geqslant 8\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Обозначив в последнем неравенстве $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, получим неравенство $(t+2)^2 \geqslant 8t$. Но это неравенство верно при всех действительных t, поскольку равносильно очевидному неравенству $(t-2)^2 \geqslant 0$.

Значит, среднее арифметическое положительных чисел a и b не меньше среднего арифметического чисел x и y. В этом утверждении слова „не меньше“ нельзя заменить словами „больше“, как показывает пример равных положительных чисел a и b.

Второе решение. Воспользуемся известным неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным:

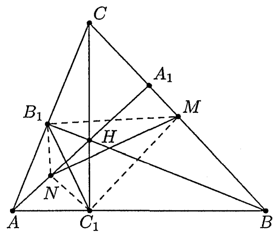
$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (*)$$

для любых положительных x и y. (Действительно, это неравенство равносильно неравенству $\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} \iff (x-y)^2 \geqslant 0$ — верное неравенство.) Применив неравенство $(*)$ к числам $x=\sqrt{ab}$ и $y=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, получим:

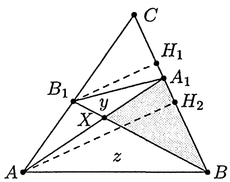
$$\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right) \underset{(*)}{\leqslant} \sqrt{\frac{ab+\frac{a^2+b^2}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}=\frac{a+b}{2},$$

т. е. $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{x+y}{2}$. Следовательно, среднее арифметическое положительных чисел a и b не меньше среднего арифметического чисел x и y. Для полного решения необходимо отметить, что знак нестрогого неравенства здесь, вообще говоря, нельзя заменить знаком строгого неравенства, как показывает пример равных положительных чисел a и b.

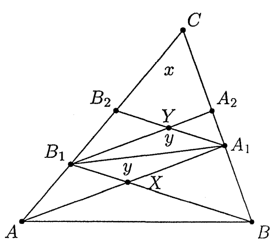
8.6. Заметим, что отрезки B_1M и C_1M — медианы прямоугольных треугольников B_1BC и C_1CB соответственно, проведённые из вершин прямых углов, и, следовательно, каждый из них равен половине гипотенузы CB этих треугольников. Значит, $B_1M = 0,5CB = C_1M$, т. е. точка M равноудалена от концов отрезка B_1C_1. Аналогично, рассматривая прямоугольные треугольники B_1AH и C_1AH, заключаем, что $B_1N = 0,5AH = C_1N$, т. е. точка N равноудалена от концов отрезка B_1C_1. Таким образом, каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка B_1C_1, а значит, MN — серединный перпендикуляр к этому отрезку, что и требовалось доказать.



8.7. а) Дополняя треугольники XA_1B_1 и XAB, для площадей которых нужно установить неравенство $y < z$, одним и тем же треугольником XA_1B, получим соответственно треугольники B_1A_1B и AA_1B (см. рис.). Поэтому неравенство $y < z$ равносильно неравенству $S(B_1A_1B) < S(AA_1B)$ (здесь через S обозначена площадь треугольника, указанного в скобках). Так как у треугольников B_1A_1B и AA_1B сторона A_1B общая, то неравенство $S(B_1A_1B) < S(AA_1B)$, в свою очередь, равносильно неравенству $B_1H_1 < AH_2$, где B_1H_1 и AH_2 — высоты этих треугольников, опущенные на сторону A_1B. Поскольку точка B_1 — внутренняя точка стороны AC, то высота B_1H_1 меньше высоты AH_2. Действительно, если $\angle ACB = 90°$, то точки H_1 и H_2 совпадают с точкой C, и неравенство $B_1H_1 < AH_2$ очевидно. Если же $\angle ACB \neq 90°$, то прямоугольные треугольники B_1H_1C и AH_2C подобны (острый угол при вершине C у них общий), и коэффициент k подобия треугольника B_1H_1C треугольнику AH_2C равен отношению их гипотенуз $k = B_1C/AC < 1$. Следовательно, $B_1H_1 = k\,AH_2 < AH_2$. Поскольку $B_1H_1 < AH_2$, то $y < z$, что и требовалось доказать.



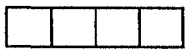
б) Через точку B_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1. Пусть A_2 — точка пересечения проведённой прямой и прямой BC. Точка A_2 — внутренняя точка отрезка CA_1, поскольку в треугольнике AA_1C точка B_1 — внутренняя точка стороны AC, а прямая B_1A_2 параллельна его стороне AA_1. Точно так же, проводя через точку A_1 прямую, параллельную прямой BB_1, получаем, что она пересекает прямую AC в точке B_2, являющейся внутренней точкой отрезка CB_1. Поскольку точки A_2 и B_2 принадлежат соответственно сторонам CA_1 и CB_1 треугольника CA_1B_1, то точка Y пересечения отрезков B_1A_2 и A_1B_2 лежит внутри этого треугольника (см. рис.). Поэтому площадь треугольника YA_1B_1 меньше площади x треугольника CA_1B_1.

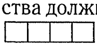


С другой стороны, по построению, четырёхугольник B_1YA_1X — параллелограмм, поэтому площади треугольников YA_1B_1 и XA_1B_1 равны, а значит, как следует из условия, площадь треугольника YA_1B_1 равна y. Следовательно, $y < x$, что и требовалось доказать.

8.8. **Ответ**: все n, кратные четырём.

Первое решение. Если n кратно четырём, то такой квадрат, очевидно, легко накрыть даже в один слой, а значит, и в любое число слоёв фигурками вида  .

Пусть теперь n не кратно четырём. Если n нечётно, то, покрасив клетки квадрата $n \times n$ в чёрный и белый цвет в шахматном порядке, заметим, что число клеток чёрного и число клеток белого цвета отличаются на 1. С другой стороны, любая фигурка вида  накрывает в этой раскраске поровну белых и чёрных клеток (по две), поэтому, если бы квадрат $n \times n$ можно было накрыть в несколько слоёв, мы бы получили, что чёрных и белых клеток в этом квадрате должно быть поровну — противоречие.

Наконец, пусть n — чётное, не кратное четырём. Это значит, что $n = 4k+2$ ($k \in \mathbb{N}$). Покрасим клетки квадрата $n \times n$ в 4 цвета как показано на рисунке. Заметим, что при такой раскраске в правом нижнем квадрате 2×2 нет клетки цвета 4, а в оставшейся части квадрата $n \times n$ количества клеток каждого из цветов 1, 2, 3 и 4 одно и то же. Значит, во всём квадрате $n \times n$ количества клеток разных цветов не все равны между собой. С другой стороны, если бы квадрат $n \times n$ можно бы было накрыть в несколько слоёв, то эти количества должны были бы быть равны, поскольку любая фигурка вида  накрывает, как легко убедиться, ровно по одной клетке каждого цвета.

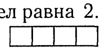
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

Отметим, что эта же раскраска годится и в случае нечётного n: количества клеток каждого из цветов в этом случае заведомо не могут быть все равны между собой, а каждая фигурка накрывает ровно по одной клетке каждого цвета.

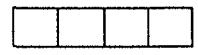
Используя приведённые раскраски клеток квадрата $n \times n$ (n не кратно 4), дадим другое решение этой задачи.

Пусть, если n нечётно, без нарушения общности чёрных клеток в шахматной раскраске квадрата больше, чем белых. Впишем в каждую белую клетку число -1, а в каждую чёрную — число 1. Тогда сумма всех вписанных чисел равна 1.

Если n чётно и не кратно четырём, то впишем в клетки цветов 1 и 4 число -1, а в клетки цветов 2 и 3 — число 1. Тогда сумма всех вписанных чисел равна 2.

Заметим, что сумма чисел, вписанных в любую фигурку вида  равна нулю. Предположим, что квадрат $n \times n$ (n не кратно 4) покрыт указанными фигурками так, что каждая его клетка была накрыта одним и тем числом k фигурок. Для каждой фигурки покрытия подсчитаем сумму чисел, вписанных в её клетки, а затем найдём сумму S всех полученных чисел. Тогда, поскольку сумма чисел в каждой фигурке равна, как сказано, нулю, то $S = 0$. С другой стороны, сумма S, так как в ней каждое вписанное в клетку число считается k раз (столько, сколько фигурок её накрывает), должна быть равна сумме всех чисел в квадрате $n \times n$, умноженной на число слоёв k, а значит, так как сумма всех вписанных в квадрат чисел положительна, то и S должна быть положительна. Противоречие. Следовательно, квадрат $n \times n$, если n не кратно четырём, накрыть фигурками вида  в несколько слоёв нельзя.

Второе решение. Приведём другое решение этой задачи, использующее другую раскраску клеток квадрата.

Если n кратно четырём, то такой квадрат, очевидно, легко накрыть даже в один слой, а значит, и в любое число слоёв фигурками вида  .

Пусть теперь n не кратно четырём. Если n чётно, $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), то разобьём квадрат $(4k+2) \times (4k+2)$ на $(2k+1)^2$ квадратиков 2×2 и раскрасим эти квадратики в шахматном порядке, причём, для определённости считаем, что левый верхний квадратик чёрный (см. рис. 1, на котором показан случай $n = 6$). Тогда, как легко убедиться, чёрных клеток в таком квадрате $n \times n$ на четыре больше, чем белых.

Если n нечётно $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), то раскрасим клетки квадрата так. Рассмотрим квадрат $(n+1) \times (n+1)$, сторона которого на 1 больше стороны рассматриваемого квадрата. Так как $n + 1$ чётно, то разобьём квадрат $(n+1) \times (n+1)$ на квадратики 2×2, закрасим их в шахматном порядке, причём, для определённости считаем, что левый верхний квадратик чёрный, а затем сотрём правую и нижнюю полоски единичной ширины — получим нужную раскраску квадрата $n \times n$ (см. рис. 2, на котором показан случай $n = 5$; легко видеть, что раскраска рис. 2 получается из раскраски рис. 1 по описанной схеме). Тогда, как легко убедиться, чёрных клеток в таком квадрате $n \times n$ на одну больше, чем белых.

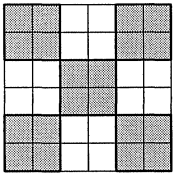


Рис. 1

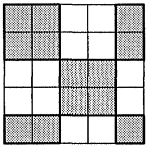
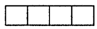


Рис. 2

Теперь можно рассуждать любым из двух способов, приведённых в первом решении.

Так как фигурка вида  накрывает в такой раскраске поровну белых и чёрных клеток (по две), а во всём квадрате чёрных клеток больше, то, таким же рассуждением, как и в первом решении, получаем, что квадрат $n \times n$ накрыть фигурками указанного вида в несколько слоёв нельзя.

Впишем во все белые клетки такой раскраски число -1, а во все чёрные — число 1. Так как сумма чисел в любой фигурке вида  равна нулю, а сумма всех вписанных в квадрат чисел положительна, то такое же рассуждение, как и в первом решении, показывает, что квадрат накрыть указанными фигурками в несколько слоёв нельзя.

9 класс

9.5. Ответ: $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Если положительные числа a и b равны между собой, то неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \lambda\sqrt{ab} + (1-\lambda)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (*)$$

выполнено, очевидно, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому, считая далее $a \neq b$, преобразуем неравенство $(*)$ равносильным образом. Имеем:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \lambda\sqrt{ab} + (1-\lambda)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff a+b \geqslant 2\lambda\sqrt{ab} + (2-2\lambda)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff$$

$$\iff \lambda(\sqrt{2a^2+2b^2} - 2\sqrt{ab}) \geqslant \sqrt{2a^2+2b^2} - (a+b) \iff$$

$$\iff \frac{2\lambda(a-b)^2}{\sqrt{2a^2+2b^2}+2\sqrt{ab}} \geqslant \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2a^2+2b^2}+(a+b)} \iff$$

$$\iff 2\lambda \geqslant \frac{\sqrt{2a^2+2b^2}+2\sqrt{ab}}{\sqrt{2a^2+2b^2}+(a+b)} = 1 - \frac{(a+b)-2\sqrt{ab}}{\sqrt{2a^2+2b^2}+(a+b)},$$

или, домножая дробь в последнем выражении на величину, сопряжённую числителю, окончательно получаем

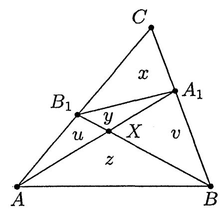
$$2\lambda \geqslant 1 - \frac{(a-b)^2}{\left(\sqrt{2a^2+2b^2}+(a+b)\right)\left((a+b)+2\sqrt{ab}\right)}.$$

Это неравенство должно выполняться при любом $a \neq b$. Положим, например, $a = 1$, $b = 1+\varepsilon$, где ε — любое положительное число. Тогда знаменатель последней дроби не меньше 16, и значит, $2\lambda \geqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$. Отсюда следует, что $2\lambda \geqslant 1$, поскольку $1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$ может быть сколь угодно близко к 1 (при подходящем выборе $\varepsilon > 0$). Итак, $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$.

С другой стороны, легко проверить, что неравенство $(*)$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ верно (см. решение задачи **8.5**). А так как при увеличении λ правая часть неравенства $(*)$ уменьшается (в силу известного неравенства между средним геометрическим и средним квадратичным), то неравенство $(*)$ верно при всех $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$.

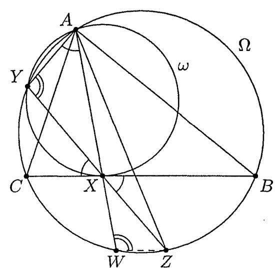
9.6. Ответ: $\frac{xz}{y}$.

Обозначим: $u = S(AB_1X)$ и $v = S(BA_1X)$ (здесь и ниже через S обозначается площадь треугольника, указанного в скобках). Заметим, что $\frac{S(A_1BB_1)}{S(A_1CB_1)} = \frac{BA_1}{A_1C}$. (Поскольку треугольники A_1BB_1 и A_1CB_1 имеют общую высоту, их площади относятся как основания.) Аналогично получаем $\frac{S(A_1BA)}{S(A_1CA)} = \frac{BA_1}{A_1C}$. Поэтому $\frac{S(A_1BB_1)}{S(A_1CB_1)} = \frac{S(A_1BA)}{S(A_1CA)}$, или $S(A_1BB_1)\cdot S(A_1CA) = S(A_1BA)\cdot S(A_1CB_1)$, т. е. $(y+v)(y+x+u) = (v+z)x$,



или $y^2+yx+yu+yv+uv = zx$. Заметим, что $\frac{v}{y} = \frac{BX}{XB_1} = \frac{z}{u}$, т. е. $uv = yz$. Тогда $y^2+yx+yu+yv+yz = zx$, или $y(y+x+u+v+z) = zx$, т. е. $yS(ABC) = xz$, откуда $S(ABC) = xz/y$.

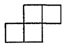
9.7. Обозначим через Ω описанную окружность $\triangle ABC$, а через ω — окружность, проходящую через точку A и касающуюся стороны BC в точке X.



Поскольку $\angle YAX = \frac{1}{2} \smile YX$ (как вписанный в окружность ω угол, опирающийся на её дугу YX) и $\angle YXC = \frac{1}{2} \smile YX$ (как угол между касательной BC к окружности ω и её хордой XY), то $\angle YAX = \angle YXC$.

Продлим отрезок AX за точку X до пересечения его с окружностью Ω в некоторой точке W. Тогда $\angle YAX = \angle YAW$, и поэтому в силу предыдущего $\angle YAW = \angle YXC$. Так как $\angle BXZ = \angle YXC$ как вертикальные, то, с учётом предыдущего равенства, $\angle BXZ = \angle YAW$. Далее, $\angle YAW = \angle YZW$ как вписанные углы окружности Ω, опирающиеся на одну и ту же её дугу. Поэтому из двух последних равенств получаем $\angle BXZ = \angle YZW$, а значит, $BC \parallel WZ$. Следовательно, $CW = ZB$, а тогда $\angle CAW = \angle ZAB$ как вписанные углы окружности Ω, опирающиеся на равные её дуги.

9.8. Ответ: **а)** нет, нельзя; **б)** нет, нельзя.

В случае нечётного n утверждение, что квадрат $n \times n$ нельзя покрыть в несколько слоёв фигурками вида , допускает простое доказательство. Действительно, покрасим клетки квадрата $n \times n$ в белый и чёрный цвет в шахматном порядке. Поскольку n нечётно, клеток одного из цветов будет больше, чем клеток другого. Пусть квадрат покрыт указанными фигурками. Для клетки квадрата назовём числом её накрытия число фигурок, её накрывающих. Поскольку фигурка указанного вида накрывает поровну белых и чёрных клеток (по две), то для любого покрытия сумма чисел накрытий белых клеток будет равно сумме чисел накрытий чёрных клеток. Но если бы существовало покрытие квадрата в несколько слоёв, то, поскольку клеток одного цвета больше, чем клеток другого, а каждая клетка покрыта одно и то же число раз, эти суммы не могли бы быть равны.

Такое же рассуждение справедливо в случае нечётного n и для раскраски квадрата $n \times n$, в которой его столбцы красятся, начиная с самого левого столбца, в чёрный и белый цвет попеременно.

Приведём теперь два решения задачи; отметим, что в первом решении рассуждения не зависят от чётности n.

Первое решение. Обозначим через a верхнюю левую угловую клетку квадрата $n \times n$. Заметим, что любая Z-образная плитка, накрывающая угловую клетку a, накрывает одновременно и клетку b, соседнюю по диагонали с клеткой a (см. рис. 1 и рис. 2).

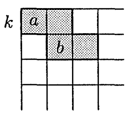


Рис. 1

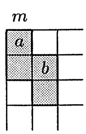


Рис. 2

Допустим, что квадрат $n \times n$ клеточек ($n \geqslant 3$) удалось покрыть Z-образными плитками так, что каждая клетка доски накрыта одним и тем же числом плиток (обозначим это число через n, а само покрытие через Π). Пусть в этом покрытии Π квадрата плиток, накрывающих клетку a и расположенных так, как показано на рис. 1, ровно k штук, а плиток, расположенных так, как на рис. 2, ровно m штук. Тогда, поскольку других плиток накрывающих плитку a, нет, $k + m = n$. Так как плитку b накрывает также $k + m = n$ плиток, то в покрытии Π других плиток, отличных от плиток, изображённых на рис. 1 и 2 и накрывающих плитку b, нет.

Рассмотрим клетку c квадрата, соседнюю по стороне с клетками a и b (см. рис. 3).

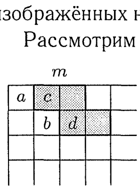


Рис. 3

Поскольку каждая из клеток a и b уже накрыта n плитками, а значит, никакими другими плитками эти две клетки накрываться не могут, то единственной Z-образной плиткой, накрывающей клетку c (кроме плитки на рис. 1), может быть только плитка, показанная на рис. 3. Поскольку плитка c накрыта только плитками, показанными на рис. 1 и 3, а плиток, как на рис. 1, в покрытии Π ровно k штук, то в покрытии Π плиток, изображённых на рис. 3, ровно $n - k = m$ штук. Видим, что плитка d, соседняя по диагонали с плиткой c, накрыта k плитками рис. 1 и m плитками рис. 3, поэтому она накрыта $k + m = n$ плитками, а значит, уже никакими другими плитками накрываться не может. Точно так же получаем, что (см. рис. 4) соседние по диагонали плитки r и s накрывает m плиток рис. 3 и k плиток рис. 4, — всего $m + k = n$ плиток, и уже никакими другими плитками плитки r и s накрываться не могут.

Рассуждая так и далее и подходя к правому краю доски, получим, что соседние по диагонали клетки x и y (см. рис. 5) накрыты n плитками каждая. Но тогда любая плитка, накрывающая верхнюю правую угловую клетку v квадрата (которая ещё не накрыта ни одной плиткой), накрывает и плитку y, а значит, плитка y накрыта более чем n плитками. Полученное противоречие показывает, что никакой квадрат $n \times n$ покрыть Z-образными плитками в несколько слоёв невозможно.

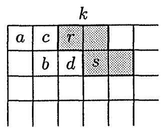


Рис. 4

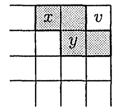


Рис. 5

Второе решение. **а)** Пусть n нечётно, $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Закрасим клетки квадрата $n \times n$ следующим образом. Перенумеруем его столбцы слева направо подряд числами от 1 до n. Клетки во всех столбцах с нечётным номером не закрашиваем, а в столбцах с чётным номером закрашиваем все чётные клетки, если считать сверху вниз (см. рис. 1, на котором показан случай $n = 7$). Всего, как несложно видеть, будет закрашено k^2 клеток. Впишем в каждую закрашенную клетку число -3, а в каждую незакрашенную — число 1. Сумма всех вписанных чисел равна $(-3) \cdot k^2 + 1 \cdot ((2k+1)^2 - k^2) = -3k^2 + 4k^2 + 4k + 1 - k^2 = 4k + 1$.

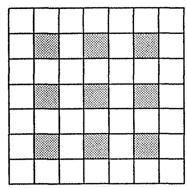
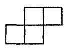
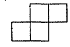


Рис. 1

Как легко убедиться, любая фигурка вида , накрывает ровно одну закрашенную клетку квадрата, поэтому сумма чисел, вписанных в любую такую фигурку, равна нулю. Предположим, что квадрат $n \times n$ (n нечётно) покрыт указанными фигурками так, что каждая его клетка была накрыта одним и тем числом k фигурок. Для каждой фигурки покрытия подсчитаем сумму чисел, вписанных в её клетки, а затем найдём сумму S всех полученных чисел. Тогда, поскольку сумма чисел в каждой фигурке равна нулю, то $S = 0$. С другой стороны, сумма S, так как в ней каждое вписанное в клетку число считается k раз (столько, сколько фигурок её накрывает), должна быть равна сумме всех чисел в квадрате $n \times n$, умноженной на число слоёв k, а значит, так как сумма всех вписанных в квадрат чисел положительна, то и S должна быть положительна. Противоречие. Следовательно, квадрат $n \times n$, если n нечётно, покрыть указанными фигурками в несколько слоёв нельзя.

Отметим, что приведённое рассуждение годится и для указанных в самом начале решения задачи „шахматной“ и „полосатой“ раскрасок квадрата $n \times n$ (n нечётно): в самом деле, вписывая для каждой из этих раскрасок в чёрные клетки число -1, а в белые — число 1, получим, что сумма чисел, вписанных в каждую фигурку вида , равна нулю, в то время как сумма всех чисел, вписанных в квадрат, ненулевая.

б) Пусть n чётно, $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$). Закрасим клетки квадрата аналогично тому, как мы закрашивали их в случае нечётного n, за двумя небольшими, но существенными изменениями. Нужная покраска в случае $n = 8$ показана на рис. 2. В общем случае она описывается так. Перенумеруем столбцы квадрата $n \times n$ слева направо подряд числами от 1 до n. Клетки в столбцах с номером 1 и чётными номерами, не меньшими 4, не закрашиваем, а в остальных столбцах закрашиваем, если считать сверху вниз, вторую клетку и все нечётные клетки с номером, не меньшим 3. Всего, как несложно видеть, будет закрашено k^2 клеток (в каждом из k столбцов, в которых клетки красятся закрашивается по k клеток). Впишем в каждую закрашенную клетку число -3, в верхнюю левую угловую — число 2, а в каждую из остальных незакрашенных клеток — число 1 (см. рис. 3, на котором в каждую пустую клетку должна быть вписана 1). Сумма всех вписанных чисел равна $(-3)\cdot k^2+1\cdot\big((2k)^2-k^2-1\big)+2=-3k^2+3k^2-1+2=1$. Заметим,

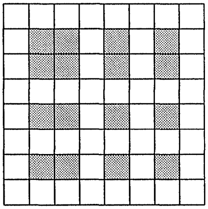
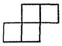


Рис. 2

2							
	−3	−3		−3		−3	
	−3	−3		−3		−3	
	−3	−3		−3		−3	
	−3	−3		−3		−3	

Рис. 3

что любая фигурка вида , не накрывающая левой верхней угловой клетки, накрывает хотя хотя бы одну чёрную клетку, поэтому сумма чисел, вписанных в клетки такой фигурки, неположительна. Если же фигурка накрывает верхнюю левую угловую клетку, то она накрывает две чёрные клетки, и поэтому сумма чисел, вписанных в клетки такой такой фигурки, также неположительна — она равна -3. Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от рассуждений в случае нечётного n: сумма чисел в каждой фигурке неположительна, а сумма чисел в квадрате положительна, поэтому покрыть его указанными фигурками в несколько слоёв нельзя.

10 класс

10.5. Очевидно, что все члены последовательности (a_n) — положительные числа. Найдём a_4. Так как $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, то

$$a_4=\frac{a_3a_2+7}{a_1}=13. \tag{1}$$

Из рекуррентного соотношения, задающего последовательность (a_n), получаем:

$$a_{n+1}=\frac{a_na_{n-1}+7}{a_{n-2}}=\left[7=a_na_{n-3}-a_{n-1}a_{n-2}\right]=\frac{a_na_{n-1}+a_na_{n-3}-a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-2}}=$$

$$=a_n\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}-a_{n-1},\quad n\geqslant 4. \tag{2}$$

Если мы докажем, что все числа $\dfrac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}$, $n\geqslant 4$, — целые, то получим, что все числа a_n, $n\geqslant 5$, последовательности будут целыми, так как числа a_1, a_2, a_3, a_4 — целые.

Обозначим $b_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}$, $n\geqslant 4$. В частности,

$$b_4=\frac{a_3+a_1}{a_2}=\frac{3+1}{2}=2 \quad \text{и} \quad b_5=\frac{a_4+a_2}{a_3}=\frac{13+2}{3}=5. \tag{3}$$

Покажем, что последовательность (b_n), $n\geqslant 4$, является периодической с периодом 2, т. е. $b_n=b_{n-2}$ для всех $n\geqslant 6$. Вследствие определения последовательностей (b_n) и

(a_n) получаем:

$$b_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \frac{\dfrac{a_{n-2}a_{n-3} + 7}{a_{n-4}} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \frac{a_{n-2}a_{n-3} + 7 + a_{n-3}a_{n-4}}{a_{n-4}a_{n-2}} =$$

$$= \Big[7 = a_{n-2}a_{n-5} - a_{n-3}a_{n-4}\Big] = \frac{a_{n-2}a_{n-3} + (a_{n-2}a_{n-5} - a_{n-3}a_{n-4}) + a_{n-3}a_{n-4}}{a_{n-4}a_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_{n-2}a_{n-3} + a_{n-2}a_{n-5}}{a_{n-4}a_{n-2}} = \frac{a_{n-3} + a_{n-5}}{a_{n-4}} = b_{n-2}, \quad n \geqslant 6.$$

Следовательно, в силу равенств (3)

$$b_{2k} = b_4 = 2 \quad \text{и} \quad b_{2k+1} = b_5 = 5 \ \text{ для любого } \ k = 2, 3, \ldots$$

Поскольку (см. представление (2)) $a_{n+1} = a_n b_n - a_{n-1}$ для всех $n \geqslant 4$, и все числа b_n, $n \geqslant 4$, и числа a_1, a_2, a_3 и, в силу (1), a_4 — целые, то и все члены последовательности (a_n) — целые числа.

Замечание. Последовательность (a_n), $n \in \mathbb{N}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + d}{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{$*$}$$

где число d и члены a_1, a_2, a_3 заданы, совпадает с последовательностью (c_n), $n \in \mathbb{N}$, определяемой рекуррентным соотношением

$$c_{n+2} = \begin{cases} kc_{n+1} - c_n, & \text{если } n \text{ нечётно}, \\ lc_{n+1} - c_n, & \text{если } n \text{ чётно}, \end{cases} \tag{$**$}$$

где члены c_1 и c_2 задаются условиями: $c_1 = a_1$ и $c_2 = a_2$, а числа k и l — равенствами $k = \dfrac{a_1 + a_3}{a_2}$ и $l = \dfrac{a_2 + a_4}{a_3}$.

Действительно, в силу определения $(**)$ и задания чисел k и l и членов c_1 и c_2 легко найти, что $c_3 = a_3$ и $c_4 = a_4$. Далее, используя определение $(**)$, несложно убедиться (рассматривая случаи чётного и нечётного n отдельно), что величина Δ_n, $n \geqslant 4$, определяемая равенством $\Delta_n = c_n c_{n-3} - c_{n-1}c_{n-2}$, не зависит от n. Например, если n нечётно, имеем:

$$\Delta_n = c_n c_{n-3} - c_{n-1}c_{n-2} \underset{(**)}{=} (kc_{n-1} - c_{n-2})c_{n-3} - c_{n-1}(kc_{n-3} - c_{n-4}) =$$

$$= c_{n-1}c_{n-4} - c_{n-2}c_{n-3} = \Delta_{n-1}$$

(точно так же рассматривается и случай чётного n). Следовательно, $\Delta_n = \Delta_4$ при всех $n \geqslant 4$; другими словами,

$$c_n c_{n-3} - c_{n-1}c_{n-2} = c_4 c_1 - c_3 c_2 = a_4 a_1 - a_3 a_2 = d,$$

откуда получаем $c_n = \dfrac{c_{n-1}c_{n-2} + d}{c_{n-3}}$. Из этого соотношения, соотношения $(*)$ и того, что первые три члена последовательностей (a_n) и (c_n) совпадают, вытекает, что и совпадают и остальные их члены.

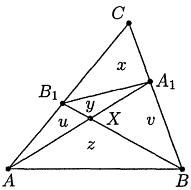
Таким образом, $a_n = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Задание последовательности (a_n) соотношением $(**)$ позволяет дать наглядную интерпретацию значений, принимаемых последовательностью (b_n), возникшей в решении задачи и на изучении свойств которой в существенном основывалось приведённое выше решение. Из равенств $(**)$ видим, что $b_n = k$, если n чётно, и $b_n = l$, если n нечётно.

Так как для последовательности (a_n), $n \in \mathbb{N}$, рассматривавшейся в задаче, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 13$ и $d = 7$, то для неё $k = 2$ и $l = 5$, т. е.

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{если } n \text{ нечётно и } n \geqslant 3, \\ 5a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{если } n \text{ чётно и } n \geqslant 4, \end{cases}$$

откуда и того, что a_1 и a_2 — целые, сразу вытекает, что все её члены — целые числа.

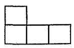
10.6. Обозначим $u = S(AB_1X)$ и $v = S(BA_1X)$. Имеем: $zx = y(y+x+u+v+z)$ (см. решение задачи **9.6**). Отсюда, в частности, вытекают неравенства $zx > yx$ и $zx > yz$, а значит, $z > y$ и $x > y$. Далее, $uv = yz$ (см. решение задачи **9.6**). Поэтому получаем: $zx = y(y+x+z+u+v) \geqslant y(y+x+z+2\sqrt{uv}) = y(y+x+z+2\sqrt{yz}) > y(y+y+y+2\sqrt{yy}) = 5y^2$ — отсюда следует оценка п. **а)**.



Оценивая аналогично, имеем: $zx = y(y+x+z+u+v) \geqslant y(y+2\sqrt{xz}+2\sqrt{uv}) = y(y+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}) > y(3y+2\sqrt{xz})$, или $3y^2 + 2\sqrt{xz} - xz < 0 \iff (y+\sqrt{xz})(y-3\sqrt{xz}) < 0$, откуда $y - 3\sqrt{xz} < 0$ — это оценка п. **б)**.

10.7. См. решение п. **а)** задачи **11.7**.

10.8. **Ответ**: все чётные n, не меньшие четырёх.

Если n нечётно, то, покрасив клетки квадрата $n \times n$ в чёрный и белый цвет в шахматном порядке, заметим, что число клеток чёрного и число клеток белого цвета отличаются на 1. С другой стороны, любая фигурка вида  накрывает поровну белых и чёрных клеток (по две), поэтому, если бы квадрат $n \times n$ можно было накрыть в несколько слоёв указанными фигурками, то число чёрных и число белых клеток в этом квадрате должны совпадать — противоречие.

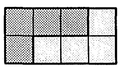
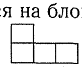


Рис. 1

Если $n \vdots 4$, то квадрат $n \times n$ легко разбивается на блоки 2×4, а каждый такой блок составлен из двух фигурок вида , как показано на рис. 1, поэтому при $n \vdots 4$ квадрат $n \times n$ накрывается фигурками указанного вида в один слой.

Пусть теперь n чётно, но не делится на 4, т. е. $n = 4k+2$ ($k \in \mathbb{N}$). Покажем, что такой квадрат можно накрыть фигурками указанного вида в два слоя. Для этого выделим в нижнем углу нашего квадрата квадрат 6×6. Оставшаяся часть квадрата $n\times n$ (см. рис. 2), разбивается на три прямоугольника, одна из сторон каждого из которых кратна четырём, а другая — чётная. Поэтому каждый из этих прямоугольников легко разбивается на блоки 2×4, а значит, покрывается фигурками нужного вида в один, а поэтому и в любое число слоёв.

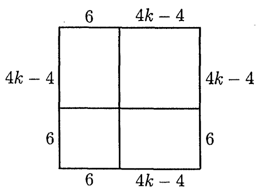


Рис. 2

Осталось убедиться, что квадрат 6×6 можно накрыть в два слоя. Рассмотрим следующее покрытие (см. рис. 3) квадрата 6×6, в котором клетки 2×2-квадратика $ABCD$ не накрыты, а все остальные клетки накрыты одним слоем. Аналогично положим ещё один слой фигурок (см. рис. 4), так, чтобы клетки квадратика $BGFC$ ими не накрывались, а все остальные клетки накрывались ровно по разу. В результате клетки 2×4-блока $AGFD$ накрыты в один слой, а все остальные — в два (см. рис. 3 и рис. 4). Осталось накрыть 2×4-блок $AGFD$ в один слой (см. рис. 5).

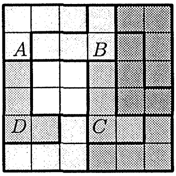


Рис. 3

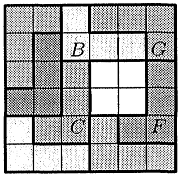


Рис. 4

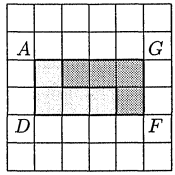
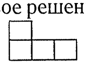


Рис. 5

Заметим, что, как легко показывается с помощью стандартной „полосатой“ раскраски квадрата в два цвета (см. первое решение задачи **9.8**), квадрат $(4k+2) \times (4k+2)$ в один слой накрыть фигурками вида  нельзя.

11 класс

11.5. Так как по неравенству Коши

$$(x+1)(y+1) \leqslant \frac{\left((x+1)+(y+1)\right)^2}{4} = \frac{(x+y+2)^2}{4},$$

то доказываемое неравенство

$$\frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)} < \frac{1}{11}, \quad \text{если } x>0 \text{ и } y>0, \tag{1}$$

является следствием неравенства

$$\frac{1}{x+y+1} - \frac{4}{(x+y+2)^2} < \frac{1}{11}, \quad \text{если } x>0 \text{ и } y>0. \tag{2}$$

Обозначив в неравенстве (2) $x+y+1=t$ (тогда $t>1$, поскольку x и y положительные), получаем равносильное (2) неравенство

$$\frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} < \frac{1}{11}, \quad \text{если } t>1. \tag{3}$$

которое после очевидных равносильных преобразований примет вид

$$t^3 - 9t^2 + 23t - 11 > 0, \quad \text{если } t>1. \tag{4}$$

Поэтому для доказательства неравенства (1) достаточно доказать неравенство (4). Преобразуем к удобному для нас виду многочлен в левой части неравенства (4) :

$$t^3 - 9t^2 + 23t - 11 = (t-3)^3 - 4t + 16 = (t-3)^3 - 4(t-3) + 4 = (t-1)(t-3)(t-5) + 4.$$

Следовательно, неравенство (4) равносильно неравенству

$$(t-1)(t-3)(t-5)+4>0, \quad \text{если } t>1. \tag{5}$$

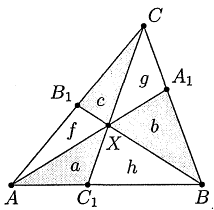
Методом интервалов получаем, что многочлен $(t-1)(t-3)(t-5)$ на интервале $(1;+\infty)$ неположителен только при t, принадлежащих отрезку $[3;5]$. Но при $t\in[3;5]$ имеем: $0<t-1\leqslant 4$ и $(t-3)(t-5)\geqslant -1$, — а значит, $(t-1)(t-3)(t-5)\geqslant -4$ при $t\in[3;5]$. Неравенство (5), а с ним и неравенство (1), доказаны.

Несколько другое, но в идейном отношении такое же, решение задачи можно получить следующим образом. Пусть сумма $x+y$ фиксирована. Тогда для таких x и y первое слагаемое в неравенстве (1) одно и то же, а второе слагаемое, как следует из неравенства Коши, будет наибольшим, если и только если $x=y$. Поэтому исходное неравенство достаточно доказать только при $x=y$, т. е. достаточно доказать, что

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}<\frac{1}{11}, \quad \text{если } x>0.$$

Это неравенство — то же неравенство (3) (замена $2x+1=t$). Это же рассуждение показывает, что неравенства (1) и (3) равносильны в том смысле, что справедливость одного влечёт справедливость другого.

11.6. Обозначим площади шести треугольников, на которые разбивается треугольник ABC отрезками AA_1, BB_1, CC_1, так, как показано на рисунке. Убедимся, что вместе с равенством из условия задачи



$$a+b+c=f+g+h \tag{1}$$

выполняются ещё два следующих равенства:

$$abc=fgh, \tag{2}$$

$$ab+bc+ca=fg+gh+hf. \tag{3}$$

Равенство (2) равносильно равенству

$$\Big(\frac{1}{2}XA\cdot XC_1\cdot\sin AXC_1\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2}XB\cdot XA_1\cdot\sin BXA_1\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2}XC\cdot XB_1\cdot\sin CXB_1\Big)=$$

$$=\Big(\frac{1}{2}XA\cdot XB_1\cdot\sin AXB_1\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2}XC\cdot XA_1\cdot\sin CXA_1\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2}XB\cdot XC_1\cdot\sin BXC_1\Big),$$

которое, очевидно, верно.

Далее, $\dfrac{a+f+c}{h+b+g}=\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{a}{h}$, откуда

$$hf+hc=ab+ag. \tag{4}$$

Аналогично,

$$gh+ga=bc+bf \quad \text{и} \quad fg+fb=ca+ch. \tag{5}$$

Складывая последние три равенства, получаем равенство (3).

Следовательно, многочлены $(t-a)(t-b)(t-c)$ и $(t-f)(t-g)(t-h)$ равны, так как равенства (1), (3), (2) выражают равенство их коэффициентов при t^2, t и t^0 соответственно.

Таким образом, набор чисел $a,\ b,\ c$ совпадает с набором $f,\ g,\ h$ (не обязательно в том порядке, как эти числа записаны).

Если, скажем, $a=h$, то $\frac{a}{h}=\frac{AC_1}{C_1B}$, т. е. C_1 — середина AB, и тогда CC_1 — медиана треугольника ABC. Точно так же получим требуемое при $b=g$ или $c=f$.

Если $a=f$, то из (2) следует $bc=gh$, и тогда с учётом полученного выше первого равенства в (5) имеем $ga=bf$, откуда $g=b$, а значит, AA_1 — медиана.

Аналогично разбираются случаи $b=h$ или $c=g$.

Осталось рассмотреть случай $a=g,\ b=f,\ c=h$. В этом случае полученное выше равенство (4) перепишется в виде $bc+c^2=ab+a^2$, или $(c-a)(c+a+b)=0$, откуда $a=c$. Но тогда $a=h$, и всё доказано.

11.7. а) Обозначим фигуру, образованную объединением квадратов из условия задачи, через Φ. Ортогонально спроецируем все центры квадратов на ось абсцисс. Пусть A — самая левая, а B — самая правая из этих проекций. Пусть длина отрезка AB равна d. Тогда ортогональная проекция фигуры Φ на ось абсцисс содержится в отрезке длины $d+2$ (см. рис. 1) и, очевидно, не может содержаться в отрезке меньшей длины. Выберем произвольно и зафиксируем достаточно малое $\varepsilon>0$, такое, чтобы выполнялось неравенство $[d]<d+\varepsilon<[d]+1$. Пусть B_ε — точка, лежащая на оси абсцисс правее точки B, такая, что $BB_\varepsilon=\varepsilon$.

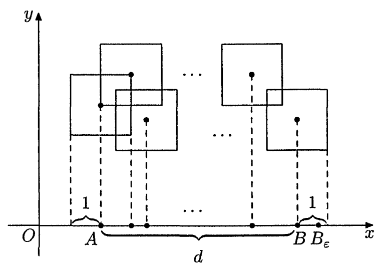


Рис. 1

Пройдём по отрезку AB_ε, начав с точки A, с шагом 1 — получим $[d]$ точек $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{[d]}$. В результате отрезок AB_ε разобьётся на не имеющие общих точек $m=[d]+1$ промежутков: $[d]$ единичных полуинтервалов $[AA_1)$, $[A_1A_2)$, $\ldots$, $[A_{[d]-1},A_{[d]})$ и отрезок $[A_{[d]}B_\varepsilon]$ длины, меньшей 1. Из этих m промежутков выберем тот, в который проецируется наибольшее число центров квадратов (какой-нибудь из промежутков, если таких окажется несколько). Обозначим этот промежуток ℓ, и пусть q — число центров, проецирующихся в промежуток ℓ. Тогда $q\geqslant\frac{n}{m}$.

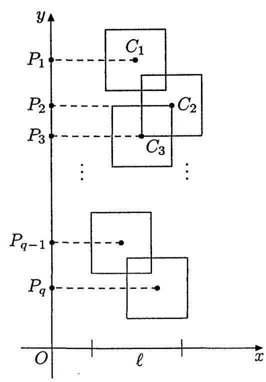


Рис. 2

Рассмотрим те центры $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_q$, которые проецируются на промежуток ℓ, и пусть $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_q$ — проекции этих центров соответственно на ось ординат (см. рис. 2). Расстояние между любыми двумя проекциями P_i и P_j не менее 1 (поскольку в противном случае каждый из центров C_i и C_j содержался бы внутри квадрата, центром которого является другой). Поэтому, считая без нарушения общности, что центры $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_q$ занумерованы так, что их проекции $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_q$ расположены на оси ординат в порядке убывания (в частности, P_1 и P_q — крайние из этих проекций), получаем, что длина отрезка

$$P_1P_q = P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{q-1}P_q \geqslant \underbrace{1+1+\ldots+1}_{q-1 \text{ штук}} = q-1.$$

Поэтому любой отрезок, содержащий проекцию фигуры Φ на ось ординат, должен иметь длину, не меньшую $(q-1)+2 = q+1$. Таким образом, те два отрезка, которые содержат проекции фигуры Φ на координатные оси, имеют суммарную длину, не меньшую

$$(d+2)+(q+1) \geqslant d + \frac{n}{m} + 3 \geqslant d + \frac{n}{d+1} + 3 = (d+1) + \frac{n}{d+1} + 2 \geqslant 2\sqrt{n} + 2,$$

а значит, периметр прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, не менее $4(\sqrt{n}+1)$. Нужная оценка доказана.

б) Продолжим рассуждения решения п. **а)**. Пусть L — периметр прямоугольника с осями, параллельными осям координат, содержащего фигуру Φ. Покажем, что квадраты можно передвинуть параллельно координатным осям, так, что для них будет выполнено условие задачи, а их центры будут лежать в узлах целочисленной решётки и все их можно заключить в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, периметр которого не больше L.

Действительно (см. решение п. **а)**), без нарушения общности считаем, что точка A, а тогда и точки $A_1, \ldots, A_{[d]}$ имеют целую координаты по оси абсцисс (по оси ординат их координата нулевая). Сдвинем параллельно оси абсцисс все квадраты, центры которых проецируются в полуинтервал $[AA_1)$, так, чтобы их центры стали лежать на прямой $x = A$. Затем сдвинем параллельно оси абсцисс все квадраты, центры которых проецируются в полуинтервал $[A_1A_2)$, так, чтобы их центры стали лежать на прямой $x = A_1$, и т. д., наконец, сдвинем параллельно оси абсцисс все квадраты, центры которых проецируются в отрезок $[A_{[d]}B_\varepsilon]$, так, чтобы их центры стали лежать на прямой $x = A_{[d]}$. Очевидно, что проекции новой получившейся фигуры Φ' и фигуры Φ на ось ординат совпадают, проекция фигуры Φ' на ось абсцисс — отрезок $AA_{[d]}$, длина которого — натуральное число, не большее длины d отрезка AB, а центры квадратов имеют целые координаты по оси абсцисс.

Точно так же, проводя такие рассуждения для фигуры Φ', но уже для оси ординат и точно так же сдвигая квадраты параллельно оси ординат, получим фигуру Φ'', проекция которой на ось ординат содержится в отрезке, длина которого — натуральное число, не большее длины отрезка, содержащего проекцию фигуры Φ на ось ординат. Следовательно, фигуру Φ'' можно заключить в прямоугольник Π, стороны которого параллельны осям координат, такой, что для его периметра P выполняется неравенство $L \geqslant P$, а длины его сторон — натуральные числа. В частности, полупериметр $P/2$ прямоугольника Π — натуральное число.

Поскольку, как доказано в п. **а)**, $P \geqslant 4(\sqrt{n}+1)$, то $P/2 \geqslant 2(\sqrt{n}+1)$. Но $P/2 \in \mathbb{N}$, значит, $P/2 \geqslant \lceil 2(\sqrt{n}+1)\rceil$. Поэтому $L \geqslant P \geqslant 2\lceil 2(\sqrt{n}+1)\rceil$. Нужная оценка доказана.

Установим достижимость полученной оценки. Пусть $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, как легко убедиться,

$$2\lceil 2(\sqrt{n}+1)\rceil = \begin{cases} 4k+4, \text{ если } n = k^2, & (1)\\ 4k+6, \text{ если } k^2 < n \leqslant k^2+k, & (2)\\ 4k+8, \text{ если } k^2+k+1 \leqslant n < (k+1)^2, & (3)\end{cases}$$

Рассмотрим k^2 точек с целыми координатами $(i;j)$, где $1 \leqslant i \leqslant k$ и $1 \leqslant j \leqslant k$ (см. рис. 1). Взяв их в качестве центров 2×2-квадратов, видим, что оценка (1) достигается. Добавляя к этим центрам ещё не более $l \leqslant k$ центров с координатами $(k+1;j)$, где $j = 1, 2, \ldots, l$ (см. рис. 2), видим, что оценка (2) также достигается. Добавляя теперь к построенным центрам $(i;j)$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$ и $1 \leqslant j \leqslant k$ ещё не более $m \leqslant k+1$ центров с координатами $(i;k+1)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$ (см. рис. 3), видим, что и оценка (3) достигается.

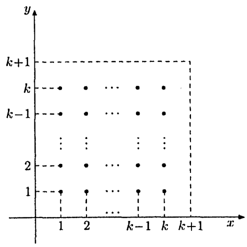


Рис. 1

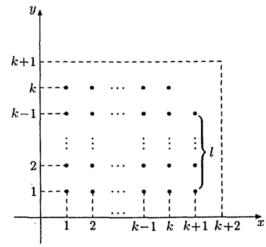


Рис. 2

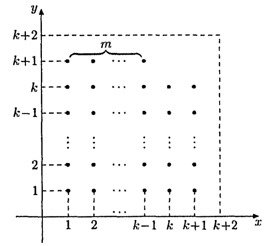


Рис. 3

11.8. Ответ: а) нет, нельзя; **б)** нет, нельзя.

а) *Первое решение.* Обозначим через a верхнюю левую угловую клетку квадрата 6×6. Заметим, что любая Т-образная плитка, накрывающая угловую клетку a, накрывает одновременно и клетку b, соседнюю по диагонали с клеткой a (см. рис. 1 и рис. 2).

Допустим, что квадрат 6×6 удалось покрыть Т-образными плитками так, что каждая клетка доски накрыта одним и тем же числом плиток (обозначим это число через n, а само покрытие через П). Пусть в этом покрытии П квадрата плиток, покрывающих клетку a и расположенных так, как показано на рис. 1, ровно k_1 штук, а плиток, расположенных так, как на рис. 2, ровно m_1 штук. Тогда, поскольку других плиток накрывающих плитку a, нет, $k_1 + m_1 = n$. Так как плитку b накрывает также $k_1 + m_1 = n$ плиток, то в рассматриваемом покрытии других плиток, отличных от плиток, изображённых на рис. 1 и 2 и накрывающих плитку b, нет.

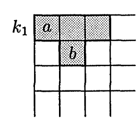


Рис. 1

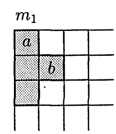


Рис. 2

Рассмотрим клетку c доски, соседнюю по стороне с клетками a и b (см. рис. 3). Поскольку каждая из клеток a и b уже накрыта n плитками, а значит, никакими другими плитками эти две клетки накрываться не могут, то единственной Т-образной плиткой, накрывающей клетку c (кроме плитки на рис. 1), может быть только плитка, показанная на рис. 3. Поскольку плитка c накрыта только плитками, показанными на рис. 1 и 3, а плиток, как на рис. 1, в покрытии П ровно k_1 штук, то в покрытии П плиток, как на рис. 3, ровно $n - k_1 = m_1$ штук.

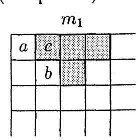


Рис. 3

Точно так же, рассмотрим верхнюю правую угловую клетку d и соседнюю с ней по диагонали клетку e (см. рис. 4). Пусть в покрытии П клетку d накрывает k_2 плиток, показанных на рис. 4, и m_2 плиток, показанных на рис. 5. По той же причине, что и выше, $k_2+m_2 = n$, а в покрытии П число плиток, накрывающих клетку f и показанных на рис. 6, равно $n - k_2 = m_2$.

Тогда в покрытии П квадрата клетка x (см. рис. 7) накрыта по меньшей мере следующими плитками: m_1 плитками из рис. 3, k_2 плитками из рис. 4 и m_2 плитками из рис. 6, а значит, $m_1 + k_2 + m_2 \leqslant n$. Это неравенство, поскольку $k_2 + m_2 = n$, может выполняться только, если $m_1 = 0$. Точно так же, рассматривая покрытия клетки, не обозначенной в верхней строке на рис. 7, получаем $m_2 = 0$.

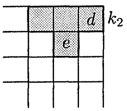


Рис. 4

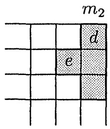


Рис. 5

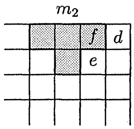


Рис. 6

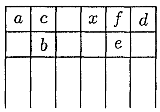


Рис. 7

Следовательно, поскольку $m_1 = m_2 = 0$, то в покрытии П верхнюю строку занимают плитки, как показано на рис. 8, — каждой плитки по n штук. Поскольку имеется только одна Т-образная плитка, накрывающая клетку g (см. рис. 8) и не имеющая общих клеток с плитками, накрывающими верхнюю строку, — эта плитка показана на рис. 8, то такими плитками в количестве n штук и покрыта клетка g. Теперь видим, что нижнюю правую угловую клетку h может накрывать только одна Т-образная плитка, не имеющая общих клеток с плитками, накрывающими клетку g, — эта плитка показана на рис. 8, а значит, таких плиток ровно n штук. Но тогда любая Т-образная плитка, накрывающая клетку, отмеченную на рис. 8 зна́ком „ × “, имеет общие клетки либо с плиткой, накрывающей клетку g, либо с плиткой, накрывающей клетку h, чего быть не может. Следовательно, квадрат 6×6 клеточек покрыть Т-образными плитками так, чтобы каждая его клетка была накрыта одним и тем числом плиток, невозможно.

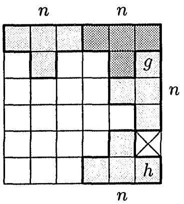


Рис. 8

Второе решение. Отметим 10 клеток квадрата 6×6, показанных на рис. 1 зна́ком „ × “.

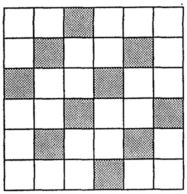


Рис. 1

4		−3			
	−3			−3	
−3			−3		
		−3			−3
	−3			−3	
			−3		4

Рис. 2

Легко непосредственно убедиться, что, как бы ни положить на этот квадрат с отмеченными клетками Т-образную плитку, так, чтобы её клетки совпали с клетками квадрата, плитка накроет хотя бы одну отмеченную клетку.

Впишем в каждую отмеченную клетку число -3, в верхнюю левую и нижнюю правую угловые клетки по числу 4, а в каждую из остальных клеток доски число 1 (см. рис. 2, на котором, чтобы не загромождать его, числа 1 не вписаны — они должны быть вписаны в каждую пустую клетку). Тогда сумма чисел, записанных в клетках любой Т-образной плитки, клетки которой совпадают с клетками квадрата, неположительна. Действительно, если Т-образная плитка не содержит верхнюю левую или нижнюю правую угловые клетки, это очевидно, поскольку эта плитка содержит отмеченную клетку, в которой записано число -3, а в остальных трёх клетках плитки — числа не большие 1 (1 или -3), а значит, сумма чисел не превосходит $-3+1+1 = 1 = 0$. Если же Т-образная плитка содержит верхнюю левую или нижнюю правую угловые клетки, то, как легко убедиться, она содержит две отмеченные клетки, а значит, сумма чисел в такой плитке равна $-3-3+4+1=-1<0$. Вместе с тем очевидно, что сумма всех чисел, вписанных в квадрат 6×6, положительна — она равна $-3\cdot 10+4\cdot 2+1\cdot 24=-30+8+24=2$.

Предположим, что квадрат 6×6 покрыт Т-образными плитками так, что каждая его клетка была накрыта одним и тем числом плиток (обозначим это число n). Для каждой плитки покрытия подсчитаем сумму чисел, вписанных в её клетки, а затем найдём сумму S всех полученных чисел. Тогда, поскольку сумма чисел в каждой Т-образной плитке, неположительна, $S\leqslant 0$. С другой стороны, сумма S равна сумме всех чисел в квадрате 6×6, умноженной на n, т. е. $S=2\cdot n>0$. Противоречие. Следовательно, квадрат 6×6 покрыть Т-образными плитками так, чтобы каждая его клетка была накрыта одним и тем числом плиток, невозможно.

Третье решение. Приведём ещё одно решение задачи п. **а)**, рассуждения которого, как и первого решения, мы сможем перенести на случай квадрата 7×7. В определённом смысле это решение — компиляция первых двух.

Предположим, что квадрат 6×6 можно покрыть Т-образными плитками в несколько слоёв. Выберем какое-либо такое покрытие П.

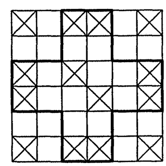


Рис. 1

Отметим 14 клеток зна́ком „ × “, как показано на рис. 1. Как показано в начале первого решения, клетки a и b (см. рис. 2) могут накрываться только плитками, изображёнными на рис. 3, а клетки c и d (см. рис. 4) — только плитками, изображёнными на рис. 5. Поскольку других плиток, накрывающих клетки a, b, c или d в покрытии нет, то любая плитка покрытия П, накрывающая любую из клеток верхнего левого углового квадрата 2×2 (а все такие плитки в покрытии П — это плитки, изображённые на рис. 3 и рис. 5) накрывает ровно две отмеченные на рис. 1 зна́ком „ × “ клетки. Очевидно, что то же верно и для любого из остальных трёх угловых квадратов 2×2.

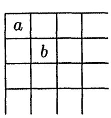


Рис. 2

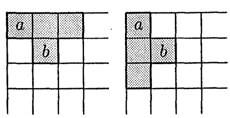


Рис. 3

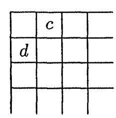


Рис. 4

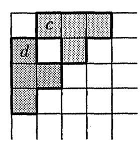


Рис. 5

Любая же Т-образная плитка, не накрывающая ни одну из клеток угловых квадратов 2×2, накрывает, как легко убедиться, хотя бы одну клетку, отмеченную зна́ком „ × “.

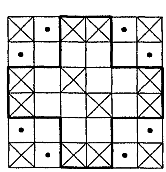


Рис. 6

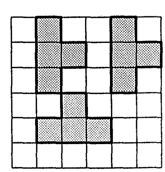


Рис. 7

Отметим теперь зна́ком „ • “ 8 клеток, как показано на рис. 6. Впишем в каждую клетку, отмеченную на рис. 6 зна́ком „ × “, число -3, в каждую клетку, отмеченную зна́ком „ • “ число 5, а в каждую из остальных клеток — число 1. Тогда сумма чисел, стоящих в клетках любой плитки нашего покрытия П, неположительна. (Подчеркнём, что речь идёт не о произвольной Т-образной плитке, накрывающей клетки квадрата, а о плитках из покрытия П. Например, сумма чисел в любой из плиток, изображённых на рис. 7, положительна, но таких плиток, как доказано выше, в нашем покрытии П нет.)

Сумма же всех чисел, вписанных в клетки квадрата, положительна — она равна $(-3)\cdot 14+5\cdot 8+1\cdot 14=-42+40+14=12$. Теперь такое же рассуждение, как в конце второго решения, завершает доказательство того, что квадрат 6×6 покрыть Т-образными плитками в несколько слоёв нельзя.

В заключение решения п. **а)** отметим, что во всех трёх решениях так или иначе использованы особенности расположения плиток, накрывающих угловые клетки квадрата. Это обстоятельство не случайно: несложно показать, что „цилиндрический" квадрат 6×6 (т. е. квадрат 6×6, в котором склеены вертикальные стороны, а значит, угловых клеток у него нет) можно покрыть Т-образными плитками в 4 слоя. Вообще, любой цилиндрический прямоугольник чётной высоты и длины $n\geqslant 3$ легко покрывается в 4 слоя, поскольку, как легко видеть, так покрывается любая цилиндрическая полоска высоты 2.

б) *Первое решение.* Назовём Т-образную плитку, положенную на квадрат, горизонтальной, если её сторона из 3-х клеток идёт параллельно горизонтальным сторонам квадрата, и вертикальной — если параллельно его вертикальным сторонам. Допустим, что квадрат 7×7 удалось покрыть Т-образными плитками в n слоёв. Обозначим такое покрытие П. Так как угловую клетку могут накрывать только плитки, показанные на рис. 1, — одна из них вертикальная, а другая горизонтальная, — то пусть в покрытии П горизонтальных плиток, накрывающих угловую клетку x_i (см. рис. 2), ровно k_i штук, а вертикальных — ровно m_i штук. Тогда, поскольку других плиток, накрывающих угловую клетку x_i, больше нет, то

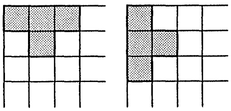


Рис. 1

$$k_i+m_i=n,\quad i=1,\,2,\,3,\,4 \tag{$*$}$$

(на рис. 2, чтобы не загромождать его, для клеток x_1 и x_3 нарисованы только горизонтальные, а для клеток x_2 и x_4 — только вертикальные плитки, накрывающие эти

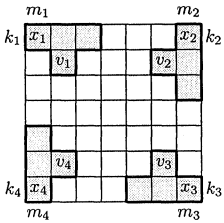


Рис. 2

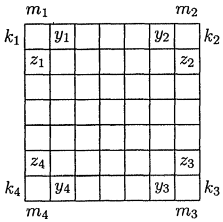


Рис. 3

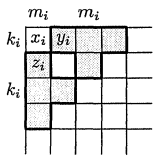


Рис. 4

клетки). При этом этими же плитками накрывается и соседняя с плиткой x_i по диагонали клетка v_i. Поэтому каждая клетка v_i накрыта также n плитками, накрывающими клетку x_i, $i=1,2,3,4$.

Рассмотрим соседние по стороне с клеткой x_i клетки y_i и z_i (см. рис. 3). Так как клетки x_i и v_i уже накрыты n плитками каждая, то единственными плитками, накрывающими плитку y_i (плитку z_i) могут быть только плитки, показанные на рис. 4. Далее, поскольку плитка y_i уже накрыта k_i горизонтальными плитками, то плиток, накрывающих клетку y_i и показанных на рис. 4, должно быть ровно m_i штук, а плиток, накрывающих клетку z_i — ровно k_i штук (эти накрывающие клетки y_i и z_i плитки для наглядности разнесены на два рисунка — рис. 5 и 6, на которых рядом с каждой плиткой указано их число). Как видим из рис. 5 и 6, центральные на сторонах клетки a, b, c и d накрывают соответственно $m_1 + m_2$, $m_3 + m_4$, $k_1 + k_4$ и $k_2 + k_3$ из указанных плиток (см. рис. 7). Каждое из этих чисел не превосходит n.

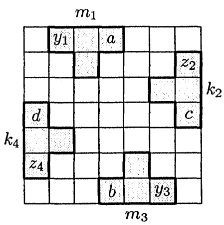


Рис. 5

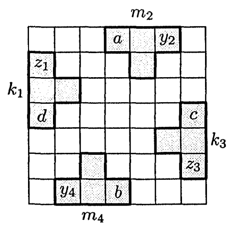


Рис. 6

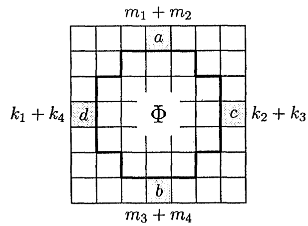


Рис. 7

Сложив почленно равенства $(*)$, получим

$$(k_1 + m_1) + (k_2 + m_2) + (k_3 + m_3) + (k_4 + m_4) = 4n, \qquad (**)$$

Но левая часть этого равенства равна сумме

$$(m_1 + m_2) + (m_3 + m_4) + (k_1 + k_4) + (k_2 + k_3)$$

числа плиток, накрывающих центральные клетки a, b, c и d. Так как эта сумма в силу $(**)$ равна $4n$, а каждое слагаемое не более n, то, следовательно, должны выполняться равенства $m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = k_1 + k_4 = k_2 + k_3 = n$.

Таким образом, видим, что все клетки квадрата 7×7, не принадлежащие показанной на рис. 7 фигуре Φ, покрыты по n раз каждая, угловые клетки в фигуре Φ покрыты стольким числом плиток, которое вписано на рис. 8 в эту клетку, а остальные клетки в этой фигуре не покрыты пока ни одной плиткой. Следовательно, задача сводится к вопросу, можно ли фигуру Φ (см. рис. 8) покрыть Т-образными плитками, не выступающими за её края, так, чтобы все не угловые клетки этой фигуры были накрыты по n раз каждая, а каждая угловая — столько раз, чтобы с уже́ имеющимся у неё числом накрытий быть накрытой n раз (такое покрытие фигуры Φ обозначим через Π^*). Следовательно, общее число накрытий клеток фигуры Φ должно быть равно

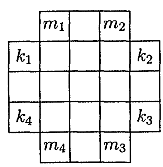


Рис. 8

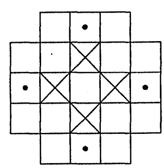


Рис. 9

$$13n + \sum_{i=1}^{4}(n - k_i) + \sum_{i=1}^{4}(n - m_i) = 13n + 4n + 4n + \sum_{i=1}^{4}(k_i + m_i) \underset{(**)}{=} 17n.$$

Заметим теперь, что любая Т-образная плитка, накрывающая четыре клетки фигуры Φ и содержащая клетку, отмеченную на рис. 9 зна́ком „ • “, содержит и соседнюю с ней по стороне клетку, отмеченную на рис. 9 зна́ком „ $\times$ “ (пару таких клеток назовём „двойкой“). Никаких других плиток в покрытии Π^* быть не может, поскольку любая плитка, не накрывающая клетку со зна́ком „ • “, накрывает, как легко убедиться, клетку со зна́ком „ × “ (а тогда накрытий клетки зна́ком „ × “ будет больше, чем накрытий соседней с ней клетки „ • “, чего быть не может). Следовательно, так как всего имеется четыре „двойки“ и каждая из них должна быть накрыта n плитками, то всего плиток должно быть $4n$. Они дают $4 \cdot 4n = 16n$ накрытий клеток, что меньше нужного числа $17n$. Следовательно, квадрат 7×7 покрыть Т-образными плитками в несколько слоёв невозможно.

Второе решение. Рассуждения этого решения ничем не отличаются от рассуждений третьего решения п. **а)** задачи. Единственное отличие состоит в том, что вместо его рисунков 1 и 6 нужно использовать следующие рисунки 1 и 2 соответственно.

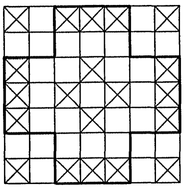


Рис. 1

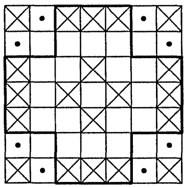


Рис. 2

Предположим, что квадрат 7×7 можно покрыть Т-образными плитками в несколько слоёв. Обозначим такое покрытие П. Отметим зна́ком „ × “ 20 клеток, как показано на рис. 1. В начале третьего решения п. **а)** задачи показано, что любая плитка покрытия П, накрывающая любую из клеток угловых квадратов 2×2 накрывает ровно две отмеченные на рис. 1 зна́ком „ × “ клетки. Любая же Т-образная плитка, не накрывающая ни одну из клеток угловых квадратов 2×2, накрывает, как легко убедиться, хотя бы одну клетку, отмеченную зна́ком „ × “.

Отметим теперь зна́ком „ • “ 8 клеток, как показано на рис. 2. Впишем в каждую клетку, отмеченную на рис. 6 зна́ком „ × “, число -3, в каждую клетку, отмеченную зна́ком „ • “ число 5, а в каждую из остальных клеток — число 1. Тогда сумма чисел, стоящих в клетках любой плитки нашего покрытия П, неположительна.

Сумма же всех чисел, вписанных в клетки квадрата, положительна — она равна $(-3) \cdot 20 + 5 \cdot 8 + 1 \cdot 21 = -60 + 40 + 21 = 1$. Теперь такое же рассуждение, как в конце второго решения п. **а)** задачи, завершает доказательство того, что квадрат 7×7 покрыть Т-образными плитками в несколько слоёв нельзя.