*Е. А. **Барабанов**, ведущий научный сотрудник*
Института математики Национальной академии наук Беларуси,
*И. И. **Воронович**, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации*
Белорусского государственного университета,
*В. И. **Каскевич**, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белгосуниверситета,*
*С. А. **Мазаник**, заведующий кафедрой высшей математики Белгосуниверситета*

ЗАДАЧИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 64-й БЕЛОРУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

(Первый день)

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Трое велосипедистов стартуют одновременно из пункта A по замкнутому маршруту, состоящему из трёх прямолинейных отрезков AB, BC и CA. Скорости велосипедистов на указанных отрезках пути соответственно равны: у первого велосипедиста 12, 10 и 15 (км/ч); у второго — 15, 15 и 10 км/ч; у третьего — 10, 20 и 12 км/ч.

Какую величину может иметь угол ABC, если известно, что все три велосипедиста финишировали в пункте A одновременно?

2. Простые числа p, q, r ($p + q < 111$) удовлетворяют равенству

$$\frac{p+q}{r} = p-q+r.$$

Найдите наибольшее возможное значение произведения pqr.

3. На сторонах AD, AB и BC прямоугольника $ABCD$ отмечены точки X, Y и Z соответственно. Известно, что $AX = CZ$.

Докажите, что выполнено неравенство $XY + YZ \geq AC$.

4. Какое наибольшее количество трёхэлементных множеств можно составить так, чтобы любые два множества имели ровно один общий элемент, но не существовало элемента, который бы принадлежал всем этим множествам?

IX класс

1. На координатной плоскости Oxy нарисована гипербола $y=\frac{1}{x}$. Из начала координат O одновременно начинают двигаться по оси Ox три улитки (каждая со своей постоянной скоростью). В каждый момент времени на гиперболе рассматриваются точки A, B и C, абсциссы которых равны абсциссам первой, второй и третьей улиток соответственно.

Докажите, что площадь треугольника АВС не зависит от времени.

2. Вася разрезал яблоко то ли на 20, то ли на 14 кусков. Затем он взял один из получившихся кусков и снова разрезал его то ли на 20, то ли на 14 кусков, и так он делает несколько раз.

Может ли Вася получить $1! + 2! + 3! + \ldots + 2013! + 2014!$ кусков?

3. На сторонах AD, AB и ВС параллелограмма $ABCD$ отмечены точки X, Y и Z соответственно. Известно, что $AX = CZ$.

а) Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств

$$XY + YZ \geq AC \text{ или } XY + YZ \geq BD.$$

б) Всегда ли верно, что

$$XY + YZ \geq \frac{AC + BD}{2}?$$

4. Несколько семейных пар дружат между собой. У них стало доброй традицией, что на День святого Валентина каждый мужчина из этих пар дарит каждой женщине из этих пар (в том числе и своей жене) розы. Любая жена обидится на своего мужа, если он подарит ей роз не больше, чем общее количество роз, подаренных им всем остальным женщинам из этих семейных пар. В этом году, после того как розы были подарены, выяснилось, что, какую бы женщину ни взять, всех мужчин из этих семейных пар можно разбить на две такие группы (возможно, разные для разных женщин), что общее количество роз, подаренных ей мужчинами из каждой группы, одно и то же.

Докажите, что хотя бы одна из жён обидится на своего мужа.

X класс

1. На координатной плоскости изображена парабола $y = x^2$. Вершины треугольника ABC принадлежат этой параболе, а его медиана BM параллельна оси ординат и равна 2.

Найдите площадь треугольника ABC.

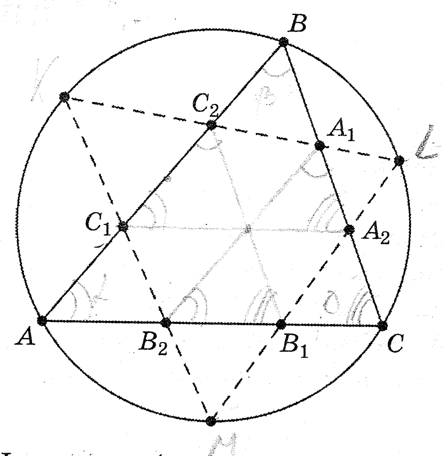
2. Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел a и b, удовлетворяющие равенству

$$(b^2 + 7(a - b))^2 = a^3 b.$$

3. В треугольнике ABC стороны равны $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. На этих сторонах отмечены соответственно точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2, так, что выполняются равенства

$$\frac{CA_1}{a} = \frac{CB_2}{b} = \frac{a+b}{a+b+c}, \quad \frac{AB_1}{b} = \frac{AC_2}{c} = \frac{b+c}{a+b+c},$$
$$\frac{BC_1}{c} = \frac{BA_2}{a} = \frac{a+c}{a+b+c}.$$

Докажите, что точки пересечения прямых A_1C_2, C_1B_2 и B_1A_2 лежат на описанной вокруг треугольника ABC окружности.



4. Несколько (не менее трёх) семейных пар дружат между собой. У них стало доброй традицией, что на День святого Валентина каждый мужчина из этих пар дарит каждой женщине из этих пар (в том числе и своей жене) розы, не менее одной. Любая жена обидится на своего мужа, если он подарит ей роз меньше, чем общее количество роз, подаренных им всем остальным женщинам из этих семейных пар. В этом году, после того как розы были подарены, выяснилось, что всех мужчин из этих семейных пар можно разбить на две такие группы, что для каждой женщины общее количество роз, подаренных ей мужчинами первой группы, равно общему количеству роз, подаренных ей мужчинами второй группы.

Докажите, что хотя бы одна из жён обидится на своего мужа.

XI класс

1. Треугольник ABC вписан в параболу $y = x^2$ так, что его сторона AB параллельна оси Ox, а точка C находится между прямой AB и осью Ox. Известно, что длина стороны AB на 1 меньше длины высоты CH треугольника ABC.

Найдите величину угла ACB.

2. Попарно различные простые числа p, q, r удовлетворяют равенству

$$rp^3 + p^2 + p = 2rq^2 + q^2 + q.$$

Укажите все возможные значения произведения pqr.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C — не острые. На сторонах AB, BC, CD и DA отмечены точки K, L, M и N соответственно.

Докажите, что периметр четырёхугольника $KLMN$ не меньше, чем удвоенная длина диагонали AC.

4. В стране n городов, некоторые из которых соединены авиарейсами. Авиарейс соединяет ровно два города, им можно попасть из одного из них в другой и наоборот. Оказалось, что, какие бы два различных города ни взять, за не более чем два авиарейса из одного из них можно единственным образом попасть в другой. Кроме того, известно, что нет города, соединённого авиарейсами со всеми остальными городами.

Докажите, что $n - 1$ — квадрат целого числа.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Ответ: 90°.

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$ (км). Подсчитав время, затраченное каждым из велосипедистов на весь маршрут (а оно не зависит от того, в каком из двух направлений проезжается маршрут велосипедистом), согласно условию получим равенства:

$$\frac{a}{12}+\frac{b}{10}+\frac{c}{15}=\frac{a}{15}+\frac{b}{15}+\frac{c}{10}=\frac{a}{10}+\frac{b}{20}+\frac{c}{12},$$

умножив которые для упрощения на 60, получим

$$5a + 6b + 4c = 4a + 4b + 6c = \\ = 6a + 3b + 5c. \qquad (*)$$

Из первого равенства в (*) найдём, что $2c = a + 2b$, а из второго — что $c = 2a - b$. Поэтому $a + 2b = 2(2a - b)$, откуда $3a = 4b$. Далее, точно так же, выражая a из первого и второго равенств в (*), получим $3c = 5b$. Итак, $a=\frac{4b}{3}$ и $c=\frac{5b}{3}$. Положим $b = 3x$, тогда $a = 4x$ и $c = 5x$. Теперь легко заметить, что $a^2 + b^2 = c^2$. Поэтому по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC является прямоугольным с гипотенузой c. Так как CA — гипотенуза прямоугольного ΔABC, то $\angle ABC = 90°$.

2. Ответ: 2014.

Имеем:

$$\frac{p+q}{r}=p-q+r \Leftrightarrow p+q=pr-qr+r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q(r+1)-p(r-1)=r^2.$$

Если $r > 2$, то r — нечётное (так как r простое), и тогда в левой части последнего равенства стоит число чётное, а в правой — нечётное. Противоречие. Следовательно, $r = 2$. Тогда из исходного равенства следует, что $p = 3q - 4$. Поэтому при возрастании q значение p также возрастает, а значит, произведение $pqr = (3q - 4) \cdot q \cdot 2$ своё наибольшее значение принимает при максимально возможном значении q.

Так как $p = 3q - 4$ и по условию $p + q < 111$, то $3q - 4 + q = 4q - 4 < 111$, откуда $q < 29$. Значит, число q, поскольку оно простое, может принимать лишь следующие значения (в порядке убывания): 23, 19, 17, ..., 2.

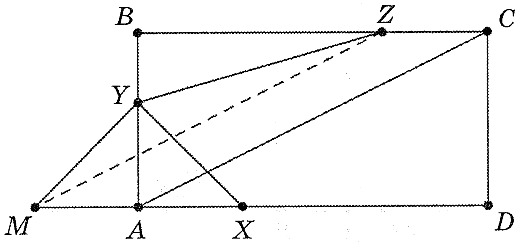
Если $q = 23$, то число $p = 3q - 4 = 3 \cdot 23 - 4 = 65$ — составное число.

Если $q = 19$, то число $p = 3q - 4 = 3 \cdot 19 - 4 = 53$ — простое число.

Поэтому наибольшее возможное значение произведения $pqr = 53 \cdot 19 \cdot 2 = 2014$.

3. *Первое решение.* Через точку Z проведём прямую, параллельную прямой AC. Пусть M — точка пересечения этой прямой с прямой AD. Очевидно, что $MZCA$ — параллелограмм, поэтому $MZ = AC$ и $MA = CZ$. Так как по условию $AX = CZ$, то $AX = MA$. Поэтому в треугольнике MYX высота YA является медианой, а значит, этот треугольник равнобедренный с боковыми сторонами $MY = YX$. Поскольку длина отрезка не больше длины ломаной, соединяющей его концы, то длина ломаной MYZ не меньше длины отрезка MZ, поэтому $XY + YZ = MY + YZ \geq MZ = AC$, что и требовалось доказать.

Это же решение можно было бы провести и по-другому, если знать тот факт, что из всех точек Y, принадлежащих отрезку AB, наименьшую длину ломаной XYZ доставляет точка, являющаяся пересечением отрезка AB и прямой MZ, где M — точка, симметричная точке X относительно прямой AB (см. рис.), а длина этой кратчайшей ломаной равна длине отрезка MZ. В силу условия задачи $ZMAC$ — параллелограмм, поэтому $MZ = AC$, а поскольку, как сказано, длина любой ломаной XYZ не меньше длины отрезка MZ, то она не меньше длины отрезка AC.



Второе решение. Обозначим $AB = a$, $BC = b$ и $AX = x$, $AY = y$. Тогда вследствие теоремы Пифагора доказываемое неравенство — это неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(a-y)^2+(b-x)^2} \geq \sqrt{a^2+b^2}$$

для всех $0 \leq x \leq b$ и $0 \leq y \leq a$. Это неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{(a-y)^2+(b-x)^2} \geq \sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства неотрицательна (так как $0 \leq x \leq b$ и $0 \leq y \leq a$), то, возводя обе его части в квадрат, получим равносильное неравенство

$$(a-y)^2+(b-x)^2 \geq$$
$$\geq a^2+b^2+x^2+y^2-2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2},$$

или, после очевидных равносильных преобразований,

$$\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \geq ay+bx.$$

Снова возводя обе части полученного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq a^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy,$$

или, раскрыв скобки и приведя подобные члены, неравенство

$$a^2x^2 + b^2y^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow (ax - by)^2 \geq 0.$$

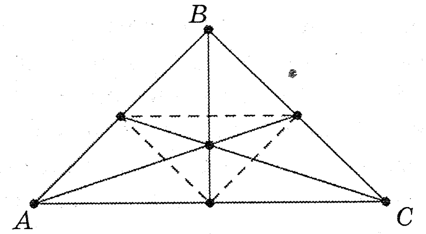
Так как последнее неравенство очевидно верно, то верно и исходное неравенство.

4. Ответ: 7 множеств.

Допустим, что множеств не менее 8. Выберем одно из них: $M = \{x, y, z\}$. Поскольку оставшихся множеств не менее 7 и каждое из них имеет с M ровно один общий элемент, а элементов в M три, то найдётся такой элемент множества M (пусть это x), который принадлежит не менее $\left[\frac{7}{3}\right]=3$ из оставшихся множеств. Пусть это множества M_1, M_2, M_3. Так как по условию нет элемента, принадлежащего всем множествам, то среди всех наших множеств найдётся такое множество M_0, что общим элементом его и множества M является, скажем, элемент y (и, значит, $x \notin M_0$). Так как никакие два из множеств M_1, M_2, M_3 и M общих элементов, кроме x, не имеют, а $x \notin M_0$, то множество M_0 должно пересекаться с этими множествами по четырём различным элементам, т. е. число элементов множества M_0 не менее 4, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что множеств не более 7.

Это же рассуждение можно было бы провести несколько по-другому. Зафиксируем какой-либо элемент, принадлежащий нашим множествам, и найдём, какому наибольшему их числу он может принадлежать. Если бы таких множеств было 4 или больше, то так же, как и выше, заключаем, что любое множество, не содержащее этот элемент, должно в пересечении с этими 4 множествами, содержать по меньшей мере четыре различных элемента. Поэтому каждый элемент содержится не более чем в 3 из наших множеств. Тогда, взяв любое из них множество M, получаем, что каждый из его 3 элементов содержится, помимо M, ещё не более чем в 2 множествах, т. е. множеств, пересекающихся с M, не более $3 \cdot 2 + 1 = 7$. А так как других множеств нет (любое из наших множеств пересекается с M), то и всего множеств не более 7.

Остаётся привести пример, показывающий, что трёхэлементных множеств, удовлетворяющих условиям задачи, может быть ровно 7. Рассмотрим на плоскости множество T из семи точек: трёх вершин ΔABC, трёх середин его сторон и точки пересечения медиан. Искомые 7 трёхэлементных множеств следующие: это точки множества T, принадлежащие сторонам (3 множества), медианам (3 множества), и одно множество, составленное из середин сторон ΔABC (см. рис.). Непосредственной проверкой легко убедиться, что любые два из этих трёхэлементных множеств имеют только одну общую точку и что нет точки, общей всем им.



IX класс

1. Пусть $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — абсциссы соответственно первой, второй и третьей улиток в момент времени t, а u_a, u_b, u_c — их скорости соответственно.

Предположим вначале, что все три улитки ползут в одном направлении. Не нарушая общности, считаем, что они ползут по положительной части оси Ox и что $u_a \le u_b \le u_c$. Тогда (см. рис. 1)

$$S(ABC) = S(ACC_1A_1) - S(ABB_1A_1) - S(BCC_1B_1) \qquad (1)$$

(здесь и далее через S обозначается площадь треугольника или четырёхугольника, указанного в скобках). Поскольку четырёхугольники ACC_1A_1, ABB_1A_1, BCC_1B_1 — трапеции и известны координаты их вершин: $A_1(a;\ 0)$, $B_1(b;\ 0)$, $C_1(c;\ 0)$ и $A\left(a;\ \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b;\ \frac{1}{b}\right)$, $C\left(c;\ \frac{1}{c}\right)$ (для упрощения записи мы не отмечаем зависимость абсцисс a, b, c от времени t), то можем найти площади этих трапеций. Получаем

$$S(ACC_1A_1) = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot (AA_1 + CC_1) = \frac{1}{2}(c-a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}\frac{c^2-a^2}{ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_ct}{u_at}-\frac{u_at}{u_ct}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_c}{u_a}-\frac{u_a}{u_c}\right).$$

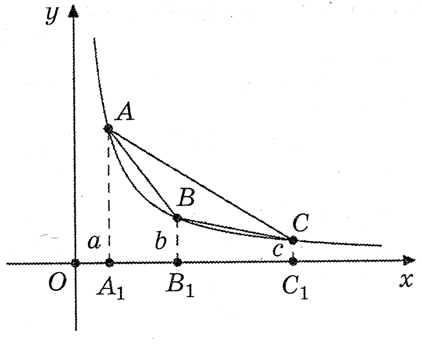


Рисунок 1

Видим, что поскольку скорости улиток постоянны, площадь $S(ACC_1A_1)$ трапеции ACC_1A_1 со временем не изменяется. Точно так же (или пользуясь равноправностью точек A, B и C) заключаем, что ни площадь $S(ABB_1A_1)$ трапеции ABB_1A_1, ни площадь $S(BCC_1B_1)$ трапеции BCC_1B_1 со временем не изменяются. Следовательно, в силу равенства (1) площадь ΔABC остаётся постоянной во всё время движения улиток.

Несколько сложнее рассматривается случай, когда две улитки ползут в одном направлении, а третья — в другом. Не нарушая общности, считаем, что первая улитка ползёт по отрицательной части оси Ox, а вторая и третья — по положительной (см. рис. 2) и что $u_b \le u_c$. Тогда (обозначения те же, что и в предыдущем случае)

$$S(ABC) = S(ABB_1) + S(BCC_1B_1) - S(ACC_1).$$

Имеем:

$$S(ABB_1)=\frac{1}{2}B_1A\cdot BB_1=\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{u_bt}{-u_at}-\frac{-u_at}{u_bt}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{u_a}{u_b}+\frac{u_b}{u_a}\right).$$

Видим, что, поскольку скорости улиток постоянны, площадь $S(ABB_1)$ треугольника ABB_1 со временем не изменяется. Точно так же (или пользуясь равноправностью точек B и C по отношению к точке A) заключаем, что и площадь $S(ACC_1)$ треугольника ACC_1 со временем не изменяется.

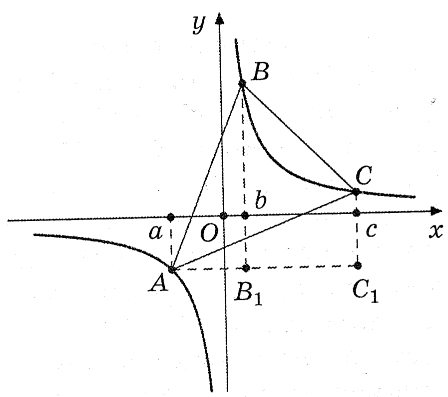


Рисунок 2

Остаётся убедиться, что площадь $S(BCC_1B_1)$ трапеции BCC_1B_1 со временем также не изменяется. Действительно,

$$S(BCC_1B_1)=\frac{1}{2}C_1B_1\cdot(CC_1+BB_1)=$$
$$=\frac{1}{2}(c-b)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}-2\frac{c}{a}+2\frac{b}{a}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u_c}{u_b}-\frac{u_b}{u_c}+2\frac{u_c}{u_a}-2\frac{u_b}{u_a}\right).$$

Следовательно, площадь ΔABC остаётся постоянной во всё время движения улиток.

2. Ответ: да, может.

Первое решение. При разрезании одного куска на 20 или на 14 кусков общее число кусков увеличивается соответственно на 19 или на 13. Поэтому если сделать x разрезаний на 20 кусков и y разрезаний на 14 кусков, то яблоко (1 кусок) разрежется ровно на $1 + 19x + 13y$ кусков.

Остаётся выяснить, существуют ли такие целые неотрицательные числа x и y, для которых выполняется равенство

$$1 + 19x + 13y =$$
$$= 1! + 2! + 3! + \ldots + 2013! + 2014!,$$

или, равносильно,

$$19x + 13y =$$
$$= 2! + 3! + 4! + \ldots + 2013! + 2014!.$$

Разобьём сумму в правой части полученного равенства на несколько групп слагаемых следующим образом:

$$2! + 3! + 4! + \ldots + 2013! + 2014! =$$
$$= (2! + 3! + 4! + 5!) + (6! + 8!) +$$
$$+ (7! + 9! + 10!) + (11! + 12!) +$$
$$+ (13! + 14! + \ldots + 2013! + 2014!).$$

Покажем, что сумма чисел в каждой группе делится либо на 13, либо на 19. Действительно,

$$2! + 3! + 4! + 5! = 152 = 8\cdot 19,\ 6! + 8! =$$
$$= 6!(1 + 7\cdot 8) = 6!\cdot 57 = 6!\cdot 3\cdot 19,\ 7! +$$
$$+ 9! + 10! = 7!(1 + 8\cdot 9 + 8\cdot 9\cdot 10) =$$
$$= 7!\cdot 793 = 7!\cdot 61\cdot 13,\ 11! + 12! =$$
$$= 11!(1 + 12) = 11!\cdot 13,$$

наконец, последняя сумма $13! + 14! + \ldots + 2013! + 2014!$ делится на 13, поскольку в ней каждое слагаемое делится на 13.

Таким образом, правая часть рассматриваемого равенства имеет вид $19a + 13b$, а значит, Вася сможет разрезать яблоко на нужное число кусков (например, сделав в любом порядке a разрезаний на 20 и b разрезаний на 14 кусков).

Второе решение. Как показано в начале первого решения, задача состоит в том, чтобы определить, существует ли решение $(x; y)$ уравнения

$$19x + 13y = \\ = 2! + 3! + 4! + \ldots + 2013! + 2014! \qquad (0)$$

в целых неотрицательных числах x и y. Из теории линейных диофантовых уравнений хорошо известно, что, поскольку числа 19 и 13 взаимно просты, уравнение

$$19x + 13y = a \qquad (1)$$

при любом целом a имеет бесконечно много решений $(x; y)$ в целых числах. При достаточно больших a (по крайней мере при $a > 19 \cdot 13$) это уравнение имеет решения и в натуральных числах. В самом деле, так как $19 \cdot (-2) + 13 \cdot 3 = 1$, то $19 \cdot (-2a) + 13 \cdot 3a = a$, а значит,

$$19 \cdot (-2a + 13n) + 13 \cdot (3a - 19n) = a$$

для любого n. Положим

$$x = -2a + 13n, \quad y = 3a - 19n. \qquad (2)$$

При n, таких, что $-2a + 13n > 0$ и $3a - 19n > 0$, т. е. удовлетворяющих двойному неравенству

$$\frac{2a}{13} < n < \frac{3a}{19}, \qquad (3)$$

числа x и y из равенств (2) положительны. Поскольку интервал $\left(\frac{2a}{13}; \frac{3a}{19}\right)$ имеет длину $\frac{a}{19 \cdot 13}$, то при $a > 19 \cdot 13$ его длина больше 1 и, значит, на нём есть есть целое число n, удовлетворяющее неравенству (3). При таком n числа x и y, определяемые равенствами (2), являются целыми положительными и удовлетворяют уравнению (1). Поскольку, очевидно, $2! + 3! + 4! + \ldots + 2013! + 2014! > 19 \cdot 13$, то, в частности, уравнение (0) имеет решение в натуральных числах, что и требовалось доказать.

3. О т в е т: б) не всегда.

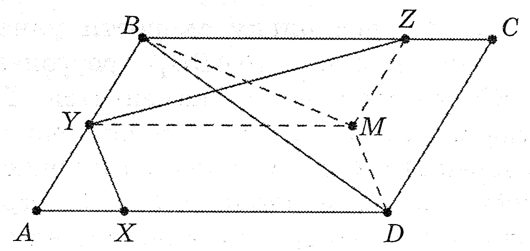
а) В параллелограмме диагональ, выходящая из вершины нетупого угла, не меньше диагонали, выходящей из вершины неострого угла. Действительно, если a и b — стороны параллелограмма, а γ — его нетупой угол, то по теореме косинусов длины диагоналей соответственно равны:

$$\ell_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$$

$$\text{и } \ell_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma},$$

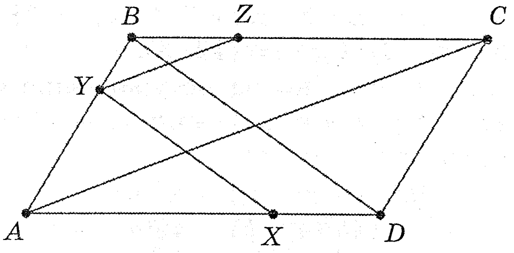
а значит, $\ell_1 \geq \ell_2$, поскольку $\cos\gamma \geq 0$, что и доказывает наше утверждение.

Без нарушения общности считаем, что $\angle BAD \leq 90°$. Тогда, как показано выше, $AC \geq BD$, и для решения задачи достаточно доказать неравенство $XY + YZ \geq BD$. Через точку Y проведём прямую, параллельную прямой AD, а через точку D — прямую, параллельную прямой XY. Пусть M — точка пересечения проведённых прямых (см. рис.). Очевидно, что четырёхугольник $XYMD$ — параллелограмм, а значит, $YM = XD$ и $XY = MD$. Так как по условию $CZ = AX$, то $XD = AD - AX = BC - CZ = ZB$, а поскольку $ZB \parallel XD \parallel YM$, то четырёхугольник $YBZM$ — параллелограмм.



Так как в параллелограмме $YBZM$ $\angle BYM = \angle BAD \leq 90°$, то, как показано в начале решения, диагональ YZ не меньше диагонали BM. Поэтому $XY + YZ \geq XY + BM = MD + BM$. Поскольку длина отрезка не больше длины ломаной, соединяющей его концы, то $MD + BM \geq BD$. Из двух последних неравенств вытекает нужное неравенство $XY + YZ \geq BD$.

б) Пусть параллелограмм $ABCD$ отличен от прямоугольника. Тогда его диагонали не равны между собой. Пусть, не на-



рушая общности, $AC > BD$. Точку Y на стороне AB выберем так, чтобы $YZ \parallel AC$. Пусть $\frac{AX}{AD}=\frac{CZ}{BC}=\lambda$. По теореме Фале́са $\frac{AY}{AB}=\frac{CZ}{BC}=\lambda$. Поэтому $\frac{AY}{AB}=\frac{AX}{AD}=\lambda$, откуда следует, что треугольники AYX и ABD подобны и $\frac{XY}{BD}=\lambda$, т. е. $XY = \lambda BD$. Кроме того, по построению точки Y треугольники YBZ и ABC подобны и

$$\frac{YZ}{AC}=\frac{BZ}{BC}=\frac{BC-CZ}{BC}=1-\lambda,$$

откуда $YZ = (1 - \lambda)AC$.

Поэтому $XY + YZ = \lambda BD + (1 - \lambda)AC$ и неравенство из условия принимает вид

$$\lambda BD+(1-\lambda)AC \ge \frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}AC,$$

или, равносильно,

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)BD \ge \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)AC.$$

Но последнее неравенство не может быть справедливо, если $\lambda > \frac{1}{2}$, поскольку, сокращая обе его части на положительный множитель $\lambda-\frac{1}{2}$, получим неверное неравенство $BD \ge AC$. Таким образом, неравенство из условия выполнено не всегда.

4. Пусть всего супружеских пар n ($n \ge 2$). Перенумеруем их числами от 1 до n. Мужа и жену из i-й супружеской пары назовём i-м мужчиной и i-й женщиной соответственно ($1 \le i \le n$). Обозначим: a_i — число роз, подаренных i-м мужчиной своей жене; b_i — число роз, подаренных i-м мужчиной всем женщинам, кроме своей жены; c_i — число роз, полученных i-й женщиной от всех мужчин, кроме своего мужа (или, что то же, подаренных i-й женщине всеми мужчинами, кроме её мужа).

Тогда, с одной стороны, общее число роз, подаренных всеми мужчинами, равно, очевидно, $a_1 + a_2 +\ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. С другой стороны, это же число равно числу роз, полученных всеми женщинами, т. е. равно

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Поэтому

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n. \quad (*)$$

Допустим, что среди жён нет ни одной обиженной. Это равносильно тому, что выполнены неравенства $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, ..., $a_n > b_n$, почленно сложив которые, получим неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

или, учитывая равенство (*), неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > c_1 + c_2 + \ldots + c_n. \quad (**)$$

Докажем, что найдётся такая женщина, которая получила от своего мужа роз больше, чем ей подарили все остальные мужчины вместе. Действительно, если такой женщины нет, то выполняются неравенства $a_1 \le c_1$, $a_2 \le c_2$, ..., $a_n \le c_n$, почленно сложив которые, получим $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Но полученное неравенство противоречит неравенству (**). Поэтому найдётся женщина, которая получила от своего мужа роз больше, чем ей подарили все остальные мужчины вместе. Без нарушения общности считаем, что это 1-я женщина, т. е. что $a_1 > c_1$. Но тогда всех мужчин нельзя разбить на две группы так, чтобы число роз, подаренных мужчинами каждой группы 1-й женщине, было одно и то же. В самом деле, как бы ни разбить мужчин на две группы, в одну из них попадёт муж 1-й женщины, а число a_1 роз, подаренных им своей жене, больше числа c_1, подаренных ей всеми остальными мужчинами. Полученное противоречие показывает, что хотя бы одна обиженная жена найдётся.

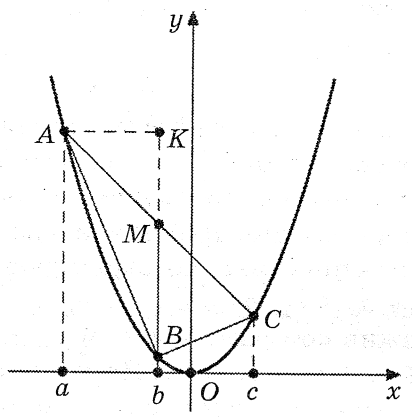
X класс

1. Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пусть координаты вершин: $A(a;\ a^2)$, $B(b;\ b^2)$, $C(c;\ c^2)$. Не нарушая общности, считаем $a < c$. Так как точка M — середина отрезка AC, то её координаты $M\left(\frac{a+c}{2};\ \frac{a^2+c^2}{2}\right)$. Поскольку прямая BM параллельна оси ординат, то абсциссы точек M и B равны, т. е. $\frac{a+c}{2}=b$, и, значит, $BM=\frac{a^2+c^2}{2}-b^2$. Поэтому

$$2=\frac{a^2+c^2}{2}-b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{(a+c)^2}{4}=\frac{(a-c)^2}{4}.$$

Следовательно, $(a-c)^2=8$, т. е. $c-a=2\sqrt{2}$.



Так как BM — медиана ΔABC, то площадь этого треугольника равна удвоенной площади треугольника ABM, площадь которого равна $0{,}5AK \cdot BM$, где AK — высота ΔABM. Поскольку $BM \parallel Oy$, то $AK \parallel Ox$, и поэтому длина отрезка AK равна разности абсцисс точек K и M. Но точка K лежит на прямой BM, а значит, абсцисса точки K равна абсциссе точки B, т. е.

$$AK=b-a=\frac{a+c}{2}-a=\frac{c-a}{2}.$$

Таким образом, площадь $S(ABC)$ треугольника ABC равна:

$$S(ABC)=2S(ABM)=2\cdot 0{,}5AK\cdot BM=$$
$$=\frac{c-a}{2}\cdot 2=c-a=2\sqrt{2}.$$

2. Ответ: $a=b=t$, $t\in\mathbb{Z}$, $(a;\ b)=(-18;\ -2)$, $(a;\ b)=(0;\ 7)$, $(a;\ b)=(12;\ 3)$.

Преобразуем исходное уравнение $(b^2+7(a-b))^2=a^3b$ равносильным образом. Получаем:

$$(b^2+7(a-b))^2=a^3b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b^4+14b^2(a-b)+49(a-b)^2=$$
$$=a^3b \Leftrightarrow a^3b-b^4-14b^2(a-b)-$$
$$-49(a-b)^2=0 \Leftrightarrow b(a^3-b^3)-$$
$$-14b^2(a-b)-49(a-b)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(ba^2+ab^2+b^3-14b^2-$$
$$-49(a-b))=0. \qquad (1)$$

Если $a=b$, то равенство (1), очевидно, справедливо. Таким образом, имеем бесконечную серию решений в целых числах этого уравнения: $a=b=t$, где $t\in\mathbb{Z}$.

Пусть $a\neq b$, тогда, сокращая равенство (1) на $a-b\neq 0$, получим равенство

$$ba^2+ab^2+b^3-14b^2-49(a-b)=0. \qquad (2)$$

Если $b=0$, то из равенства (2) получаем, что и $a=0$, т. е. $a=b=0$. Так как случай $a=b$ рассмотрен выше, то далее считаем $b\neq 0$. Посмотрим тогда на равенство (2) как на квадратное относительно a уравнение

$$ba^2+(b^2-49)a+b^3-$$
$$-14b^2+49b=0. \qquad (3)$$

Дискриминант D этого квадратного уравнения равен

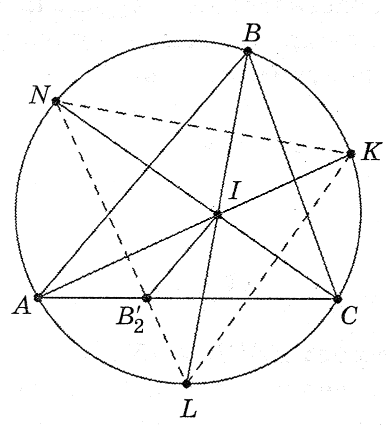
$$D=(b^2-49)^2-4b(b^3-14b^2+49b)=$$
$$=((b-7)(b+7))^2-4b^2(b-7)^2=$$
$$=(b-7)^2((b+7)^2-4b^2)=$$
$$=-(b-7)^3(3b+7).$$

Уравнение (3) имеет действительные (а значит, может иметь целые) решения только при тех значениях b, при которых $D\geq 0$. Методом интервалов находим, что неравенство $D\geq 0$ равносильно включению $b\in\left[-\frac{7}{3};\ 7\right]$. Отрезок $\left[-\frac{7}{3};\ 7\right]$ содержит ровно десять целых значений: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7. Из них случай, когда значение $b=0$, рассмотрен выше. Для остальных значений, как легко убедиться непосредственной проверкой, только при четырёх значениях дискриминант является квадратом целого числа: $D=27^2$ при $b=-2$; $D=2^{10}$ при $b=3$; $D=5^2$ при $b=6$; $D=0$

при $b = 7$ (для того чтобы квадратное уравнение с целыми коэффициентами имело корень, являющийся целым числом, необходимо, чтобы его дискриминант был полным квадратом). Соответственно найденным значениям b и D по формуле $a_{1,2} = \frac{49-b^2 \pm \sqrt{D}}{2b}$, дающей решения квадратного уравнения (3), находим отвечающие им значения a.

При $b = -2$ (тогда $D = 27^2$) получаем $a_1 = -\frac{9}{2}$ и $a_2 = -18$. В этом случае решением является только $(a;\ b) = (-18;\ -2)$. При $b = 3$ (тогда $D = 2^{10}$) получаем $a_1 = \frac{4}{3}$ и $a_2 = 12$. Поэтому в этом случае имеем только одно решение $(a;\ b) = (12;\ 3)$. При $b = 6$ (тогда $D = 5^2$) находим, что $a_1 = \frac{1}{12}$ и $a_2 = \frac{8}{12}$. Поэтому в этом случае решений нет. При $b = 7$ (тогда $D = 0$) получаем $a_{1,2} = 0$, а значит, в этом случае имеем только одно решение $(a;\ b) = (0;\ 7)$.

3. Проведём в треугольнике ABC биссектрисы AK, BL и CN до их пересечения с описанной окружностью (см. рис.). Пусть I — центр вписанной окружности ΔABC (т. е. точка пересечения проведённых биссектрис), и пусть отрезок NL пересекает AC в точке B_2'. По теореме о трезубце $AL = IL$, т. е. ΔAIL равнобедренный.



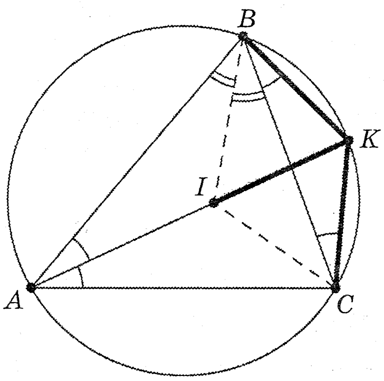
Поскольку $\angle ALN = \angle ACN = \angle NCB = \angle BLN$ (как вписанные в окружность углы, опирающиеся на равные дуги), то луч LN является биссектрисой равнобедренного ΔAIL, а значит, и серединным перпендикуляром к стороне AI. Следовательно, $\Delta AB_2'I$ также равнобедренный и, значит, $\angle IAB_2' = \angle B_2'IA$. Так как AK — биссектриса угла BAC, то $\angle IAB_2' = \angle BAI$, и поэтому $AB \parallel B_2'I$. Поскольку точка пересечения биссектрис треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ делит биссектрису угла ACB в отношении (считая от вершины C) $\frac{a+b}{c}$, то (в силу доказанной параллельности прямых AB и $B_2'I$) в таком же отношении точка B_2' делит отрезок CA. В результате имеем:

$$\frac{CB_2'}{AC} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Поэтому точки B_2' и B_2 совпадают. Таким образом, точка B_2 лежит на отрезке NL. Аналогично доказываем, что точка C_1 лежит на отрезке NL, точки B_1 и A_2 лежат на отрезке KL, а точки A_1 и C_2 лежат на отрезке KN, откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Теорема о трезубце, использованная в решении задачи, выражает следующий простой, но полезный факт: *если I — центр вписанной окружности ΔABC, а K — точка пересечения биссектрисы $\angle BAC$ с описанной окружностью ΔABC, то справедливы равенства $KI = KB = KC$.*

Действительно (см. рис.), так как AK — биссектриса вписанного $\angle BAC$, то $\smile KB = \smile KC$ (обозначим угловую меру этих дуг через 2α). Поэтому $\alpha = \angle KAB = \angle KBC = \angle KCB$ как вписанные углы, опирающиеся на дуги угловой меры 2α. Из последнего равенства вытекает, что ΔKBC равнобедренный с боковыми сторонами $KB = KC$. Далее, поскольку BI — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle IBA = \angle IBC$ (обозначим угловую меру этих углов через β). Тогда $\angle KBI = \angle KBC + \angle IBC = \alpha + \beta$. Но так как $\angle BIK$ — внешний угол ΔIAB, то $\angle BIK =$



$\angle IAB + \angle IBA = \alpha + \beta$. Следовательно, $\angle KBI = \angle BIK$, т. е. ΔKBI равнобедренный с боковыми сторонами $KI = KB$. Итак, $KI = KB = KC$, что и утверждалось.

4. Пусть всего супружеских пар n ($n \geq 3$). Перенумеруем их числами от 1 до n. Мужа и жену из i-й супружеской пары назовём i-м мужчиной и i-й женщиной соответственно ($1 \leq i \leq n$). Обозначим: a_i — число роз, подаренных i-м мужчиной своей жене; b_i — число роз, подаренных i-м мужчиной всем женщинам, кроме своей жены; c_i — число роз, полученных i-й женщиной от всех мужчин, кроме своего мужа (или, что то же, подаренных i-й женщине всеми мужчинами, кроме её мужа).

Тогда, с одной стороны, общее число роз, подаренных всеми мужчинами, равно, очевидно, $a_1 + a_2 +\ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. С другой стороны, это же число равно числу роз, полученных всеми женщинами, т. е. равно $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Поэтому

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n. \qquad (*)$$

Допустим, что среди женщин нет ни одной обиженной. Это равносильно тому, что выполнены неравенства $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$, …, $a_n \geq b_n$, почленно сложив которые, получим неравенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, или, учитывая равенство (*), неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq c_1 + c_2 + \ldots + c_n. \qquad (**)$$

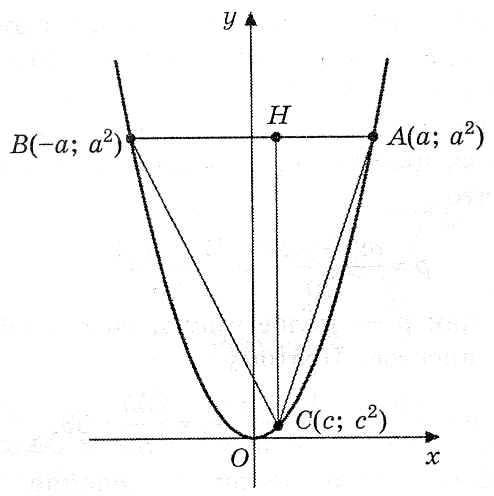
Докажем, что найдётся такая женщина, которая получила от своего мужа роз не меньше, чем ей подарили все остальные мужчины вместе. Действительно, если такой женщины нет, то выполняются неравенства $a_1 < c_1$, $a_2 < c_2$, …, $a_n < c_n$, почленно сложив которые, получим $a_1 + a_2 +\ldots + a_n < c_1 + c_2 +\ldots + c_n$. Но это неравенство противоречит неравенству (**). Поэтому найдётся женщина, которая получила от своего мужа роз не меньше, чем ей подарили все остальные мужчины вместе. Без нарушения общности считаем, что это 1-я женщина, т. е. $a_1 \geq c_1$.

Если бы выполнялось неравенство $a_1 > c_1$, то мужчин нельзя было бы разбить на две группы так, чтобы мужчины каждой группы вместе подарили 1-й женщине одно и то же число роз. В самом деле, как бы ни разбить мужчин на две группы, в одну из них попадёт её муж, а число a_1 роз, подаренных им своей жене, больше числа c_1, подаренных ей всеми остальными мужчинами. Следовательно, $a_1 = c_1$, и поэтому, так как по условию каждый мужчина дарил каждой женщине ненулевое число роз, группы, на которые можно, согласно условию, разбить мужчин, могут быть лишь такими: в одну входит только 1-й мужчина, а в другую — все остальные $n - 1$ мужчин. Таким образом, 1-й мужчина любой женщине подарил столько же роз, сколько ей подарили все остальные мужчины. Это означает, поскольку мужчин не менее трёх и каждый из них дарил каждой женщине ненулевое число роз, что 1-й мужчина подарил любой женщине (кроме своей жены) роз больше, чем ей подарил её муж. Поэтому верны неравенства $a_2 < c_2$, …, $a_n < c_n$, почленно сложив которые, а также равенство $a_1 = c_1$, получим $a_1 + a_2 +\ldots + a_n < c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Но это неравенство противоречит неравенству (**). Полученное противоречие показывает, что хотя бы одна обиженная жена найдётся.

XI класс

1. Ответ: $\angle ACB = 45°$.

Пусть вершины A и C имеют координаты: $A(a; a^2)$ и $C(c; c^2)$ (см. рис.). Так как



по условию сторона AB параллельна оси абсцисс, то точки A и B, так как они принадлежат параболе, симметричны относительно оси Oy, и поэтому их ординаты равны, а абсцисы отличаются только знаком. Значит, точка B имеет координаты $B(-a;\ a^2)$, а точка H, поскольку она принадлежит отрезку AB и прямая CH параллельна оси ординат, координаты $H(c;\ a^2)$.

Тогда $CH = a^2 - c^2$ и (считаем без нарушения общности $a > 0$) $AB = 2a$. По условию

$$a^2 - c^2 = 2a + 1. \qquad (*)$$

Кроме того, $AH = a - c$ и $BH = c + a$. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников HCA и HCB находим соответственно:

$$CA^2 = (a^2 - c^2)^2 + (a - c)^2$$
$$\text{и } CB^2 = (a^2 - c^2)^2 + (c + a)^2.$$

По теореме косинусов, применённой к ΔABC, получаем

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos\angle ACB.$$

Заменяя в этом равенстве длины сторон AB, CA и CB найденными выше их выражениями, преобразуем полученное равенство, учитывая соотношение (*):

$$4a^2 = \left(a^2-c^2\right)^2 + (a-c)^2 +$$
$$+\left(a^2-c^2\right)^2 + (c+a)^2 - 2\sqrt{\left(a^2-c^2\right)^2 + (a-c)^2}\,\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\left(a^2-c^2\right)^2 + (c+a)^2}\,\cos\angle ACB =$$
$$= 2\left(a^2-c^2\right)^2 + 2\left(a^2+c^2\right) - 2(a-c)\sqrt{(a+c)^2+1}\,\cdot$$
$$\cdot(a+c)\sqrt{(a-c)^2+1}\,\cos\angle ACB =$$
$$= 2\left(a^2-c^2\right)^2 + 2\left(a^2+c^2\right) - 2\left(a^2-c^2\right)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\left(a^2-c^2\right)^2 + (a+c)^2 + (a-c)^2 + 1}\,\cos\angle ACB \underset{(*)}{=}$$
$$\underset{(*)}{=} 2(2a+1)^2 + 2\left(a^2 + a^2 - 2a - 1\right) - 2(2a+1)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{(2a+1)^2 + 2a^2 + 2c^2 + 1}\,\cos\angle ACB =$$
$$= 12a^2 + 4a - 2(2a+1)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{4a^2 + 4a + 1 + 2a^2 + 2\left(a^2 - 2a - 1\right) + 1}\,\cdot$$
$$\cdot\cos\angle ACB = 12a^2 + 4a - 2(2a+1)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{8a^2}\,\cos\angle ACB = 12a^2 + 4a -$$
$$-4\sqrt{2}a(2a+1)\cos\angle ACB.$$

Таким образом,

$$4\sqrt{2}a(2a+1)\cos\angle ACB = 8a^2 + 4a,$$

откуда $\cos\angle ACB = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а значит, $\angle ACB = 45°$.

2. Ответ: 2014.

Так как согласно условию

$$rp^3 = -(p^2 + p) + 2rq^2 + (q^2 + q),$$

а числа $p^2 + p$, $q^2 + q$, и $2rq^2$ при любых натуральных p и q — чётные, то число rp^3 также чётное. Поэтому, поскольку r и p простые числа, либо $p = 2$, либо $r = 2$.

Если $p = 2$, то исходное равенство примет вид $8r + 4 + 2 = 2rq^2 + q^2 + q$. Но это равенство невозможно — его правая часть больше левой. Действительно, так как $p = 2$ и по условию простое $q \neq p$, то $q > 2$, а значит, $2rq^2 + q^2 + q > 8r + 4 + 2$.

Итак, $r = 2$. Тогда исходное равенство примет вид $2p^3 + p^2 + p = 4q^2 + q^2 + q$, или

$$p(2p^2 + p + 1) = q(5q + 1). \qquad (1)$$

Поскольку p и q — различные простые числа, то p и q взаимно просты, и тогда из равенства (1) вытекает, что число $2p^2 + p + 1$ делится на q, а число $5q + 1$ — на p, а значит, $2p^2 + p + 1 = mq$ и $5q + 1 = mp$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Выражая q из второго из этих равенств и подставляя в первое, получим

$$10p^2 + (5 - m^2)p + (m + 5) = 0. \qquad (2)$$

Рассматривая это равенство как квадратное относительно p уравнение, видим, что поскольку его коэффициенты целые и его корень p является целым числом, то дискриминант D этого уравнения необходимо должен быть полным квадратом, т. е.

$$\begin{aligned} D &= (m^2 - 5)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (m + 5) = \\ &= m^4 - 10m^2 - 40m - 175 = n^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

для некоторого целого неотрицательного n. Так как $D < m^4 - 175$, то при $m = 1, 2, 3$ дискриминант будет отрицательным. Кроме того, и при $m = 4$ находим, что дискриминант $D = 256 - 160 - 160 - 175 < 0$. Следовательно, $m \geq 5$.

Из (3) следует, что $(m^2 - 5)^2 > n^2$. Покажем, что $n^2 > (m^2 - 11)^2$. Действительно, в противном случае из (3) получим

$$\begin{aligned} &(m^2 - 5)^2 - 40(m + 5) \leq \\ &\leq (m^2 - 11)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 10m - 74 \leq 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Легко видеть, что последнее неравенство при целых m имеет место, если только $m \leq 6$. Но поскольку, как доказано выше, $m \geq 5$, то, следовательно, для доказательства того, что $n^2 > (m^2 - 11)^2$, остаётся убедиться, что при $m = 5$ или $m = 6$ равенство (2) для простого p выполненным быть не может.

При $m = 5$ уравнение (2) принимает вид $10p^2 - 20p + 10 = 0$ и имеет лишь одно решение $p = 1$ — не простое число. При $m = 6$ дискриминант уравнения (2) равен $D = 1296 - 360 - 240 - 175 = 521$ и не является полным квадратом.

Таким образом, $(m^2 - 11)^2 < n^2 < (m^2 - 5)^2$, т. е., учитывая, что $m \geq 7$ и $n \geq 0$, имеем $m^2 - 11 < n < m^2 - 5$. Заметим, что в силу (3) числа m и n имеют разную чётность, поэтому n может принимать лишь два значения $n = m^2 - 9$ или $n = m^2 - 7$.

При $n = m^2 - 9$ из (3) получаем $m^4 - 10m^2 - 40m - 175 = (m^2 - 9)^2$, или, после очевидных равносильных преобразований, $m^2 - 5m - 32 = 0$. Однако, как легко видеть, дискриминант этого уравнения равен 153, а значит, целых решений оно не имеет.

При $n = m^2 - 7$ из (3) получаем $m^4 - 10m^2 - 40m - 175 = (m^2 - 7)^2$, или, после очевидных равносильных преобразований, $m^2 - 10m - 56 = 0$. Корнями этого уравнения являются $m = -4$ и $m = 14$. Так как $m \in \mathbb{N}$, то $m = 14$.

Итак, $m = 14$, тогда $n = m^2 - 7 = 189$. Тогда из квадратного уравнения (2) находим, что

$$p = \frac{m^2 - 5 \pm n}{20} = \frac{191 \pm 189}{20},$$

и так как p — целое число, то $p = 19$ — число простое. Поэтому

$$q = \frac{mp - 1}{5} = \frac{14 \cdot 19 - 1}{5} = \frac{265}{5} = 53.$$

Следовательно, искомое значение произведения $pqr = 19 \cdot 53 \cdot 2 = 2014$.

3. *Лемма. Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC. Тогда неравенство $CC_1 \leq 0{,}5AB$ равносильно тому, что угол ACB — неострый.*

Достроим ΔABC до параллелограмма $ADBC$ (см. рис. 1). По теореме косинусов, применённой к ΔABC и ΔCBD, получаем соответственно:

$$\cos\angle ACB = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC}$$

$$\text{и } \cos\angle CBD = \frac{BC^2 + AC^2 - CD^2}{2BC \cdot AC}.$$

Так как сумма этих углов равна 180° (а значит, один из них нетупой, а другой — неострый), то угол ACB будет неострым, если и только если $\cos\angle CBD \geq \cos\angle ACB$. Но это неравенство, как очевидно следует из полученных выше равенств, равносильно неравенству $CD \leq AB$, или, поскольку $CD = 2CC_1$, неравенству $CC_1 \leq 0{,}5AB$.

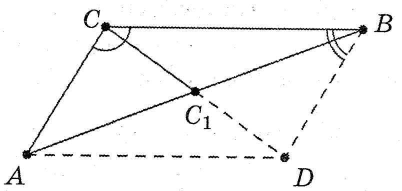


Рисунок 1

Перейдём к решению задачи. Отметим точки P, Q, T — середины отрезков KN, KM, LM соответственно (см. рис. 2). Име-

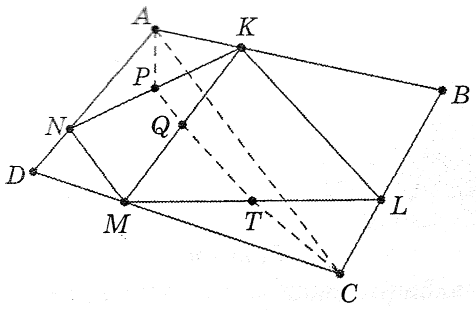


Рисунок 2

ем: $AC \le AP + PQ + QT + TC$ (длина отрезка не превосходит длины ломаной, соединяющей его концы). Так как по условию углы NAK и MCL неострые, то согласно достаточной части леммы $AP \le 0{,}5KN$ и $CT \le 0{,}5LM$. Кроме того, имеем: $PQ = 0{,}5NM$ и $QT = 0{,}5KL$ как средние линии соответствующих треугольников. Значит, $AC \le 0{,}5KN + 0{,}5NM + 0{,}5KL + 0{,}5LM$, т. е. периметр четырёхугольника $KLMN$ не меньше удвоенной длины диагонали AC.

4. Рассмотрим граф Г, вершины которого соответствуют городам страны и две вершины которого соединены ребром, если и только если между городами, соответствующими этим вершинам, установлен авиарейс. Для графа Г условия задачи равносильны следующим: ***а)*** любые две различные вершины соединены путём, состоящим не более чем из двух рёбер, *б)* нет циклов длин 3 и 4 (см. рис. 1), ***в)*** нет вершины, соединённой ребром с любой из остальных вершин.

Выберем и зафиксируем какую-либо вершину v графа Г и разобьём, как описывается ниже, множество его вершин на три подмножества: Γ_0, Γ_1 и Γ_2 (вершины из множества Γ_i назовём вершинами i-го уровня, $i = 0, 1, 2$). Множество Γ_0 состоит только из одной вершины — выбранной выше вершины v. Множество Γ_1 — из всех тех вершин, которые соединены с вершиной v ребром, а множество Γ_2 образуют все остальные (т. е. не принадлежащие множествам Γ_0 или Γ_1) вершины. Пусть множество Γ_1 состоит из k вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (см. рис. 2). В силу условия *б)* никакие две вершины 1-го уровня не соединены ребром (поскольку для соединённых ребром вершин v_p и v_q получили бы цикл vv_pv_qv длины 3, что невозможно в силу условия *б)*). В силу условия ***в)*** множество Γ_2 непусто.

Докажем, что каждая вершина 1-го уровня соединена ребром хотя бы с одной вершиной 2-го уровня и что разные вершины 1-го уровня не могут быть соединены ребром с одной и той же вершиной 2-го уровня. Действительно, если бы некоторая вершина $v_p \in \Gamma_1$ не была соединена ребром ни с одной вершиной 2-го уровня, то, поскольку она не соединена ребром и ни с одной вершиной 1-го уровня, чтобы из v_p попасть в какую-нибудь вершину 2-го уровня (см. рис. 2), придётся пройти через v, а значит, путь состоит более чем из двух рёбер, чего быть не может по условию ***а)***. Если бы две вершины $v_p, v_q \in \Gamma_1$ были соединены ребром, каждая с некоторой вершиной $w \in \Gamma_2$, то имели бы цикл vv_pwv_qv длины 4 (см. рис. 2), что невозможно в силу условия *б)*.

Из доказанных утверждений вытекает, что множество Γ_2 распадается на k непустых непересекающихся подмножеств $G_1, G_2, \ldots, G_k$: множество G_p состоит из всех тех вершин 2-го уровня, которые соединены ребром с вершиной v_p ($p = 1, 2, \ldots, k$), — см. рисунок 2. Докажем, что в каждом из

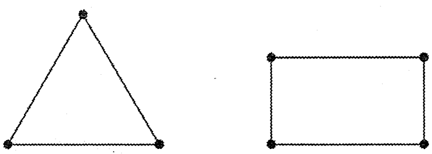


Рисунок 1

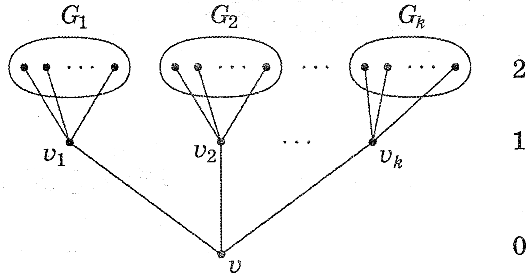


Рисунок 2

множеств G_1, G_2, ..., G_k одно и то же число вершин. Рассмотрим любые два множества G_p и G_q ($p \neq q$). Предположим, что некоторая вершина $w \in G_p$ не соединена ребром ни с одной вершиной из G_q. Тогда не существует пути из не более чем двух рёбер, соединяющего вершины w и v_q. Действительно, в вершину v_q по ребру можно попасть только либо из вершины v, либо из любой вершины множества G_q. Но кратчайший путь от w до v состоит из двух рёбер, а путь от w до любой вершины множества G_q (так как мы предположили, что вершина w не соединена ребром ни с одной вершиной множества G_q) — из не менее чем двух рёбер. Полученное противоречие показывает, что любая вершина множества G_p соединена ребром хотя бы с одной вершиной множества G_q. Более того, каждая вершина $w \in G_p$ соединена ребром ровно с одной вершиной из множества G_q (в самом деле, если бы вершина w была соединена ребром с вершинами u_1, $u_2 \in G_q$, то получили бы цикл $wu_1v_qu_2w$ длины 4). Таким образом, каждая вершина множества G_p соединена ровно с одной вершиной множества G_q. Меняя в этом рассуждении множества G_p и G_q местами, получаем, что каждая вершина множества G_q соединена ровно с одной вершиной множества G_p. Следовательно, число вершин в множествах G_p и G_q одно и то же, что и утверждалось. Обозначим через m число вершин в каждом из множеств G_1, G_2, ..., G_k.

Рассмотрим любое множество G_p и какую-либо его вершину w. Так как никакие две вершины из G_p не соединены между собой ребром (иначе бы получили цикл длины 3), а вершина w соединена ребром ровно с одной вершиной в каждом из остальных $k - 1$ множеств G_m, $m \neq p$, соединена ребром ещё с вершиной v_p и никаких других рёбер, выходящих их вершины w, нет, то степень вершины w равна $(k - 1) + 1 = k$. Итак, степень любой вершины 2-го уровня равна k, т. е. равна числу вершин 1-го уровня.

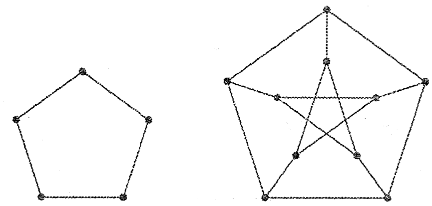


Рисунок 3

Заметим теперь, что вершину v мы выбирали произвольно. Выберем сейчас вместо вершины v вершину v_1 и повторим для неё все предыдущие рассуждения. Тогда 1-й уровень для вершины v_1 составят вершина v и все вершины множества G_1 (см. рис. 2), а значит, он будет состоять из $m + 1$ вершины. Поэтому любая вершина 2-го уровня для вершины v_1 будет иметь степень $m + 1$. В частности, степень $m + 1$ имеет любая вершина из множества, например, G_2. Но, с другой стороны, как показано выше, эта вершина имеет степень k. Поэтому верно равенство $m = k - 1$. Таким образом, граф Г содержит ровно $1 + k + k(k - 1) = k^2 + 1$ вершин. Утверждение задачи доказано.

З а м е ч а н и е. Графы, описанные в решении (и условии) задачи, существуют. Например, цикл длины 5 или граф Петерсена см. рисунок 3.

Авторы задач: Базылев Д. Ф., Барабанов Е. А., Войделевич А. С., Волков М. Н., Воронович И. И., Гилевич Б. С., Городнин И. И., Каскевич В. И., Качан И. В., Мазаник С. А., Чернов С. Ю.