УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

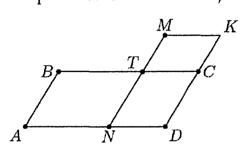
8.1. Несколько компаньонов решили организовать фирму и делить прибыль между всеми поровну. Однако, после окончания одного очень выгодного дела, руководитель, в распоряжении которого оказалась вся прибыль, решил, что поровну делить не справедливо. Поэтому он перечислил со счёта фирмы на свой счёт в 3 раза большую часть прибыли, чем достанется каждому из остальных компаньонов, если остаток они разделят поровну. После этого первый руководитель уволился. Новый руководитель, получивший право распоряжения остатком прибыли, поступил точно так же, и т.д. Наконец, предпоследний компаньон из доставшейся ему в распоряжение части прибыли перечислил себе в 3 раза большую часть, чем передал последнему компаньону. В результате последний компаньон получил в 210 раз меньшую долю, чем получил первый руководитель фирмы.

Сколько было компаньонов?

8.2. Для натуральных чисел a и b обозначим через $\overline{a,b}$ десятичную дробь, которая получится, если к числу a приписать после запятой число b. Например, при $a = 20$, $b = 13$ имеем $\overline{a,b} = 20{,}13$, а $\overline{b,a} = 13{,}2$.

Решите уравнение $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = 13$ в натуральных числах a и b.

8.3. Два параллелограмма $ABCD$ и $NMKD$ расположены так, как указано на рисунке; T — точка пересечения отрезков BC и MN.



Докажите, что если точки A, T и K лежат на одной прямой, то точки D, T и точка пересечения отрезков AM и BK также лежат на одной прямой.

8.4. На доске в ряд записано пять звёздочек: $*****$. Двое игроков A и B играют в такую игру. Они ходят по очереди, первым начинает ходить A. На каждом ходу нужно заменить одну из звёздочек на какую-то цифру, но нельзя повторять никакую уже написанную цифру. Игрок A выигрывает, если полученное число делится на 11, а игрок B — если оно на 11 не делится.

Кто из игроков — A или B — выиграет при правильной игре?

9 класс

9.1. На графике функции $y = 1/x$ отмечены четыре точки A, B, C и D, так, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, в котором $AC = 2 \cdot BC$.

Найдите все значения, которые может принимать площадь этого параллелограмма.

9.2. Для натуральных чисел a и b обозначим через $\overline{a,b}$ десятичную дробь, которая получится, если к числу a приписать после запятой число b. Например, при $a = 20$, $b = 13$ имеем $\overline{a,b} = 20,13$, а $\overline{b,a} = 13,2$.

Докажите, что найдётся бесконечно много натуральных n, при которых уравнение $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = n$ не имеет решений в натуральных числах a и b.

9.3. Точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Точки K и L — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами AB и AC соответственно. Пусть T — точка пересечения прямых MN и KL.

Докажите, что точка T принадлежит биссектрисе угла ACB.

9.4. На доске в ряд записано нечётное число звёздочек: $**\ldots*$. Двое игроков A и B играют в такую игру. Они ходят по очереди, первым начинает ходить A. На каждом ходу нужно заменить одну из звёздочек на какую-то цифру (цифра может быть любой — по выбору игрока, делающего ход, но самую первую слева звёздочку нельзя заменять на нуль). Игрок A выигрывает, если число, полученное после замены всех звёздочек, делится на 11, а игрок B — если оно на 11 не делится.

Кто из игроков — A или B — выиграет при правильной игре?

10 класс

10.1. На графике функции $y = 1/x$ отмечены три точки A, B и C, так, что треугольник ABC является равносторонним.

Найдите все значения, которые может принимать произведение суммы абсцисс и суммы ординат вершин треугольника ABC.

10.2. Для натуральных чисел a и b обозначим через $\overline{a,b}$ десятичную дробь, которая получится, если к числу a приписать после запятой число b. Например, при $a = 20$, $b = 13$ имеем $\overline{a,b} = 20,13$, а $\overline{b,a} = 13,2$.

Докажите, что найдётся бесконечно много натуральных n, при которых уравнение $\overline{a,b}\cdot\overline{b,a}=n$ имеет решение в натуральных числах a и b.

10.3. Найдите все многочлены $P(x)$, такие, что при любом действительном x выполнено равенство

$$(x-1)P(x+1)-(x+1)P(x-1)=4P(x).$$

10.4. В круге радиуса 1 нарисовано несколько окружностей, сумма длин которых не меньше π и ни одна из которых не содержит центр данного круга внутри себя.

Докажите, что найдётся окружность, центр которой совпадает с центром круга, пересекающая не менее двух из нарисованных окружностей.

11 класс

11.1. На гиперболе $y=1/x$ взяты две параллельные хорды AB и CD. При этом прямые AC и BD пересекают ось Oy в точках A_1 и D_1 соответственно, а ось Ox — в точках C_1 и B_1 соответственно.

Докажите, что площади треугольников A_1OC_1 и D_1OB_1 равны.

11.2. Даны положительные числа a, b, c.

Найдите наибольшее действительное число x, для которого найдутся такие положительные числа p, q и r, что $p+q+r=1$ и x не превосходит каждого из чисел $a\dfrac{p}{q}$, $b\dfrac{q}{r}$, $c\dfrac{r}{p}$.

11.3. Найдите все пары (f,h) функций f и h, заданных на множестве действительных чисел и принимающих действительные значения, такие, что для любых действительных чисел x и y справедливо равенство $f\bigl(x^2+yh(x)\bigr)=xh(x)+f(xy)$.

11.4. В круге радиуса 1 нарисовано n отрезков суммарной длины $2\sqrt{n}$.

Докажите, что найдётся окружность, центр которой совпадает с центром круга, пересекающая не менее двух из нарисованных отрезков.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ: 20 компаньонов.

Пусть n — число компаньонов. Значит, согласно условию задачи последовательно сменяющихся (увольняющихся) руководителей фирмы было $n-1$ человек. Через d_1, d_2, $\ldots$, d_{n-1} обозначим количество денег, взятых из полученного дохода первым, вторым, $\ldots$, последним ($(n-1)$ -ым) руководителем соответственно.

Докажем, что $\dfrac{d_k}{d_{k+1}} = \dfrac{n-k+2}{n-k}$. При k -ом по счёту руководителе фирмы в ней было ровно $m = n-k+1$ компаньонов (включая и руководителя). Пусть X — количество денег из дохода, переданных $(k-1)$ -ым руководителем k -ому руководителю. Найдём. сколько из этих денег возьмёт себе k -ый руководитель. Так как по условию он берёт себе в 3 раза больше, чем достанется остальным $m-1 = n-k$ компаньонам, если остаток они разделят поровну, то k -ый руководитель берёт себе $\dfrac{3}{m+2}X$ денег. Эту величину легко получить, составив соответствующее уравнение, но проще рассуждать так. Описанная ситуация равносильна тому, что k -ый руководитель разделит оставленную прибыль X на $m+2$ одинаковых частей (равных $\dfrac{X}{m+2}$) и возьмёт себе 3 такие части; тогда останется $m-1$ таких частей — каждому из остальных $m-1$ компаньонов по одной части. Поэтому k -ый руководитель передаёт $(k+1)$ -ому руководителю $X - \dfrac{3}{m+2}X = \dfrac{m-1}{m+2}X$ денег. Такое же рассуждение для $(k+1)$ -ого руководителя, поскольку теперь компаньонов $m-1$, а денег на счету $X_1 = \dfrac{m-1}{m+2}X$, показывает, что $(k+1)$ -ый руководитель берёт себе $\dfrac{3}{(m-1)+2}X_1 = \dfrac{3(m-1)}{(m+1)(m+2)}X$. Поэтому

$$\frac{d_k}{d_{k+1}} = \frac{3}{m+2}X : \frac{3(m-1)}{(m+1)(m+2)}X = \frac{m+1}{m-1} = \frac{n-k+2}{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \quad (*)$$

Так как последний компаньон получил в 3 раза меньше чем последний ($(n-1)$ -ый) руководитель, то последний компаньон получил $b = \dfrac{d_{n-1}}{3}$ денег. Поэтому отношение количества денег, полученных первым руководителем, к количеству денег, полученных последним компаньоном, равно $\dfrac{d_1}{b} = 3\dfrac{d_1}{d_{n-1}} = 3 \cdot \dfrac{d_1}{d_2} \cdot \dfrac{d_2}{d_3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{d_{n-2}}{d_{n-1}}$, или, воспользовавшись равенствами $(*)$, получаем:

$$\frac{d_1}{b} = 3 \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{2} = 3 \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

По условию $\dfrac{(n+1)n}{2} = 210$, откуда $n = 20$.

8.2. Ответ: $(a;b) = (2;5)$, $(a;b) = (5;2)$.

Имеем $13 = \overline{a,b}\cdot\overline{b,a} > ab$. Следовательно, $ab \leqslant 12$. Если $a \geqslant 10$, то $12 \geqslant ab \geqslant 10b$, т. е. $b \leqslant 1,2$, а значит, $b = 1$. Но при $b = 1$ и a, равным 10, 11 или 12, нужное равенство, как легко убедиться, места не имеет.

Поэтому $a \leqslant 9$ и, точно так же, $b \leqslant 9$, т. е. a и b — цифры. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $\left(a + \frac{b}{10}\right)\left(b + \frac{a}{10}\right) = 13$, или $a^2 + b^2 + 10ab + \frac{ab}{10} = 130$. Из последнего равенства заключаем, что ab делится на 10. Следовательно, поскольку a и b — ненулевые цифры, $a = 5$ или $b = 5$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Пусть $b = 5$. Тогда $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(5 + \frac{a}{10}\right) = 13$, или $(2a+1)(a+50) = 260$. Если $a \geqslant 3$, то $(2a+1)(a+50) > 7 \cdot 50 = 350 > 260$. Значит, $a \leqslant 2$. Поэтому $a = 2$, поскольку $ab = 5a$ должно делиться на 10. Непосредственной проверкой убеждаемся, что пара $(a;b) = (2;5)$ является решением исходного уравнения.

В случае $a = 5$ аналогично получаем $b = 2$.

8.3. Построим отрезок AK. По условию точка T лежит на этом отрезке. Продлим

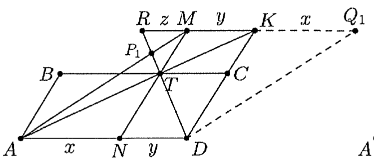


Рис. 1

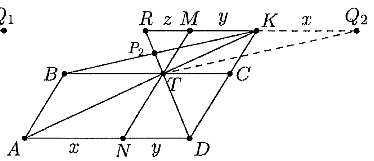


Рис. 2

отрезок DT до его пересечения с прямой KM в точке R (см. рисунки). Положим $AN = x$, $ND = y$, $RM = z$. Пусть $AT : TK = 1 : k$. Тогда из теоремы Фалеса следует, что $k = TK : AT = y : x$ (поскольку $NT \| DK$). Кроме того, так как $NMKD$ — параллелограмм, то $MK = ND = y$, и тогда

$$z : y = RM : MK = [TM \| DK] = RT : TD = [TC \| RK] = KC : CD = [TC \| AD] =$$

$$= KT : TA = k. \tag{1}$$

Таким образом, $y = kx$, $z = ky = k^2x$.

Пусть P_1 — точка пересечения отрезков AM и RD (рис. 1). Проведём через точку A прямую, параллельную AM, и пусть Q_1 — точка пересечения этой прямой с прямой MK. Тогда по теореме Фалеса

$$RP_1 : P_1D = RM : MQ_1 = [AMQ_1D - \text{параллелограмм},$$

$$MQ_1 = AD = x + y] = z : (x + y) = k^2x : (x + kx) = k^2/(1 + k).$$

Поэтому

$$RP_1 = \frac{k^2}{1+k}P_1D = \frac{k^2}{1+k}(RD - RP_1) \Longrightarrow RP_1 = \frac{k^2}{1+k+k^2}RD. \tag{2}$$

Пусть P_2 — точка пересечения отрезков BK и RD (рис. 2). Проведём через точку T прямую, параллельную BK, и пусть Q_2 — точка пересечения этой прямой с прямой MK. Тогда по теореме Фалеса

$$RP_2 : P_2T = RK : KQ_2 = \big[BKQ_2T,\ BTNA,\ NMKD - \text{параллелограммы},\\ KQ_2 = BT = AN = x, MK = ND = y\big] = (z+y) : x = (k^2+k).$$

Поэтому

$$RP_2 = (k^2+k)P_2T = k(k+1)(RT - RP_2) \implies$$

$$\implies RP_2 = \frac{k(k+1)}{k^2+k+1}RT = \Big[RT = kTD = k(RD-RT) \Rightarrow RT = \frac{k}{k+1}RD\Big] =$$

$$= \frac{k^2}{k^2+k+1}RD.$$

Сравнивая полученный результат с (2), получаем, что точки P_1 и P_2 совпадают, а значит, совпадают и с точкой P, откуда и следует требуемое утверждение.

8.4. Ответ: игрок B.

Напомним признак делимости на 11: натуральное число делится на 11, если и только если в его десятичной записи разность $S_н - S_ч$ между суммой $S_н$ цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой $S_ч$ цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.

Перенумеруем места, на которых стоят звёздочки, слева направо последовательно цифрами от 1 до 5. Звёздочки, стоящие на нечётных местах, назовём нечётными звёздочками, а на чётных — чётными.

Укажем выигрышную стратегию игрока B. Вначале укажем её для первого хода игрока B: независимо от хода A игрок B своим ходом заменяет чётную звёздочку. Пусть на первом ходу игрок A поставил цифру a, а игрок B — цифру b. Рассмотрим второй ход игрока A. Если игрок A на первом ходу заменил нечётную звёздочку, то для второго хода A возможна альтернатива: он может заменить либо 1) нечётную звёздочку, либо 2) чётную звёздочку. Если же игрок A на своём первом ходу заменил чётную звёздочку, то на своём втором ходу он может заменить только 3) нечётную звёздочку. Пусть c — цифра, поставленная A на втором ходу. Опишем стратегию игрока B на втором ходу. Она зависит от того, какой из случаев — случай 1) или случаи 2) и 3) имеют место.

В случае 1) игрок B заменяет чётную звёздочку на некоторую цифру x (её выбором займёмся позже), тогда игрок A последним ходом заменяет нечётную звёздочку на некоторую цифру y. В полученном числе $S_н - S_ч = (a+c+y) - (b+x)$. Покажем, что B может выбрать цифру x так, чтобы выполнялось неравенство $S_н \not\equiv S_ч \pmod{11}$. Обозначим $r = b - (a+c)$. Тогда сравнение $S_н \equiv S_ч \pmod{11}$ равносильно сравнению $y \equiv x + r \pmod{11}$. Если $r \equiv 0 \pmod{11}$, то B в качестве x может брать любую из оставшихся в его распоряжении семи цифр, поскольку сравнение $y \equiv x \pmod{11}$, где x и y — различные цифры, невозможно. Пусть $r \not\equiv 0 \pmod{11}$ и пусть перед вторым ходом игрока B в его распоряжении остались неиспользованными цифры $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_7$. Допустим, что для любой цифры x_i среди этих семи цифр найдётся такая цифра $y_i \neq x_i$, что $y_i \equiv x_i + r \pmod{11}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Почленно сложив эти семь сравнений, получим $y_1 + y_2 + \ldots + y_7 \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_7 + 7r \pmod{11}$. Так как ясно, что разным x_i отвечают разные y_i, то $y_1 + y_2 + \ldots + y_7 = x_1 + x_2 + \ldots + x_7$, а значит, полученное сравнение равносильно сравнению $7r \equiv 0 \pmod{11}$, что невозможно, поскольку $r \not\equiv 0 \pmod{11}$. Следовательно, среди оставшихся в распоряжении игрока B перед вторым его ходом семи цифр найдётся такая цифра x, что $y \not\equiv x + r \pmod{11}$ для любой другой цифры y из них. Эту-то цифру x и ставит игрок B на своём втором ходу.

Рассмотрим случаи 2) и 3). В этих случаях игрок B на своём втором ходу заменяет нечётную звёздочку на некоторую цифру x, а игрок A — нечётную звёздочку на некоторую цифру y. Тогда в полученном числе в случае 2) $S_н - S_ч = (y + x + a) - (b + c)$, а в случае 3) $S_н - S_ч = (y + x + c) - (a + b)$. Обозначим $r = b + c - a$ в случае 2) и $r = a + b - c$ в случае 3). Тогда сравнение $S_н \equiv S_ч \pmod{11}$ равносильно сравнению $x + y \equiv r \pmod{11}$. Пусть, как и выше, перед вторым ходом игрока B остались неиспользованными цифры $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Допустим, что для любой цифры x_i среди них найдётся такая цифра y_i, что $x_i + y_i \equiv r \pmod{11}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Значит, цифры $x_1, x_2, \ldots, x_7$ разбиваются на пары с суммой, сравнимой с r по mod 11, но это невозможно, поскольку оставшихся цифр нечётное число. Следовательно, среди оставшихся в распоряжении игрока B перед вторым его ходом семи цифр найдётся такая цифра x, что $y + x \not\equiv r \pmod{11}$ для любой другой цифры y из них. Эту-то цифру x и ставит игрок B на своём втором ходу.

9 класс

9.1. Ответ: 16/3.

Пусть отмеченные точки имеют координаты: $A(a; 1/a)$, $B(b; 1/b)$, $C(c; 1/c)$, $D(d; 1/d)$ (см. рис. 1). Заметим, что поскольку любая вертикальная или горизонтальная прямая

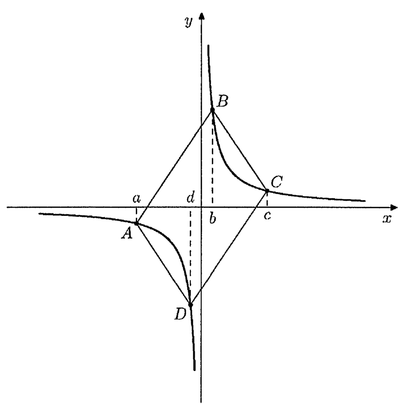


Рис. 1

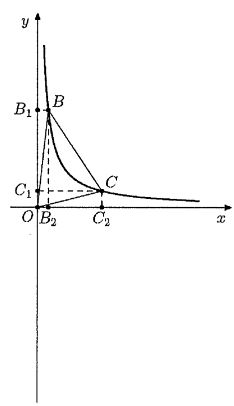


Рис. 2

пересекает гиперболу $y = 1/x$ не более чем в одной точке, то числа a, b, c, d — попарно различны. Так как противоположные стороны параллелограмма равны, то

$$AB = CD \iff (b-a)^2 + (1/b - 1/a)^2 = (d-c)^2 + (1/d - 1/c)^2 \iff$$

$$\iff (b-a)^2\left(1+1/(ab)^2\right) = (d-c)^2\left(1+1/(cd)^2\right). \qquad (1)$$

Кроме того, равенство и параллельность противоположных сторон параллелограмма влекут равенство длин проекций этих сторон на любую прямую, в частности, на ось Ox, т. е. $|b-a| = |d-c|$. Тогда из (1), сокращая на $(b-a)^2 = (d-c)^2 \neq 0$, получаем

$$1 + \frac{1}{a^2b^2} = 1 + \frac{1}{c^2d^2} \implies a^2b^2 = c^2d^2.$$

Аналогично, из равенства сторон BC и AD получаем $b^2c^2 = a^2d^2$. Из двух последних равенств очевидно вытекает, что $a^2 = c^2$ и $b^2 = d^2$, а значит, с учётом того, что $a \neq c$ и $b \neq d$, получаем: $a = -c$, $d = -b$. Не нарушая общности, считаем $a < 0 < b$, и тогда $b < c$.

Воспользуемся теперь условием $AB = 2BC$. Имеем

$$(b+c)^2\left(1+1/(bc)^2\right) = (b-a)^2\left(1+1/(ab)^2\right) = AB^2 = (2BC)^2 = 4(c-b)^2\left(1+1/(bc)^2\right),$$

поэтому $(b+c)^2 = 4(b-c)^2$. Тогда $3c^2 - 10bc + 3b^2 = 0$, откуда $c = 3b$ или $c = b/3$. Учитывая, что $c > b$, получаем $c = 3b$.

Рассмотрим пятиугольник B_1BCC_1O (см. рис. 2). Поскольку $B_1(0, 1/b)$, $B_2(b, 0)$, $C_1(0, 1/c)$, $C_2(c, 0)$, то

$$S(B_1BCC_1O) = S(B_1BB_2O) + S(BCC_2B_2) = b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1/b + 1/c}{2} \cdot (c-b) =$$

$$= [c = 3b] = 1 + \frac{4}{3b} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2b = \frac{7}{3}.$$

С другой стороны,

$$S(B_1BCC_1O) = S(OB_1B) + S(OBC) + S(OCC_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} \cdot b + S(OBC) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot c = 1 + S(OBC),$$

откуда $S(OBC) = 4/3$. Так как $S(ABCD) = 4S(OBC)$, то искомая площадь параллелограмма $ABCD$ равна $16/3$.

9.2. Докажем, что если число n делится на 3, но не делится на 9 (т. е. $n = 9k \pm 3$, $k \in \mathbb{N}$), то данное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Пусть десятичные записи чисел a и b содержат m и l знаков соответственно. В силу определения десятичных дробей $\overline{a,b}$ и $\overline{b,a}$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(a + \frac{b}{10^l}\right)\left(b + \frac{a}{10^m}\right) = 9k \pm 3, \quad \text{или} \quad ab + \frac{ab}{10^{m+l}} + \frac{a^2}{10^m} + \frac{b^2}{10^l} = 9k \pm 3,$$

т. е.

$$10^{m+l}ab + ab + a^2 10^l + b^2 10^m = 10^{m+l} \cdot (9k \pm 3). \qquad (*)$$

Поскольку $10^t - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{t\text{ раз}}$ для любого натурального t, т. е. $10^t = 9A+1$ для некоторого натурального A, то, заменяя в уравнении $(*)$ все степени 10 этими их представлениями, получим $(9A_1+1)ab + ab + (9A_2+1)a^2 + (9A_3+1)b^2 = (9A_4+1) \cdot (9k \pm 3)$, или, после очевидных преобразований, $(a+b)^2 = 9B \pm 3$ для некоторого натурального

B. Но это равенство невозможно: слева стоит квадрат натурального числа, а справа — натуральное число, делящееся на 3, но не делящееся на 9. Противоречие.

9.3. Пусть P — точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ стороны BC. Обозначим $x = BK = BP$, $y = AK = AL$, $z = CP = CL$.

Если $BC = AC$, то утверждение задачи очевидно, поскольку точки M, K, T совпадают и CT — биссектриса угла ACB.

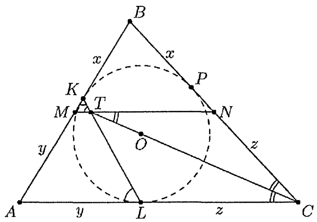


Рис. 1

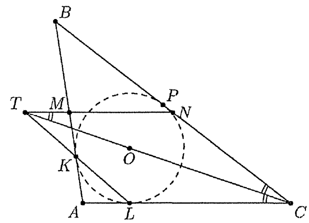


Рис. 2

Пусть $AC > BC$ (см. рис. 1). Поскольку MN — средняя линия, то $MN \parallel AC$ и, следовательно, $\angle KTM = \angle KLA$. Но $\angle AKL = \angle KLA$ (так как $AK = AL$), поэтому $\angle MKT = \angle AKL = \angle KTM$, откуда

$$MT = MK = 0,5 \cdot AB - BK = 0,5(x + y) - x = 0,5(y - x).$$

Значит, $TN = MN - MT = 0,5(y+z) - 0,5(y-x) = 0,5(z+x) = CN$. Поэтому $\triangle TNC$ равнобедренный, $\angle NTC = \angle NCT$. Поскольку $MN \parallel AC$, то $\angle NTC = \angle TCA$ (как внутренние накрест лежащие углы). Из двух последних равенств получаем: $\angle NCT = \angle TCA$, т. е. CT — биссектриса $\angle BCA$.

Случай $AC < BC$ рассматривается аналогично (см. рис. 2).

9.4. Ответ: игрок B.

Напомним признак делимости на 11: натуральное число делится на 11, если и только если в его десятичной записи разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.

Пусть на доске в ряд записано $2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) звёздочек: $\underbrace{**\ldots*}_{2n+1}$. Перенумеруем места, на которых стоят звёздочки, слева направо последовательно числами от 1 до $2n + 1$.

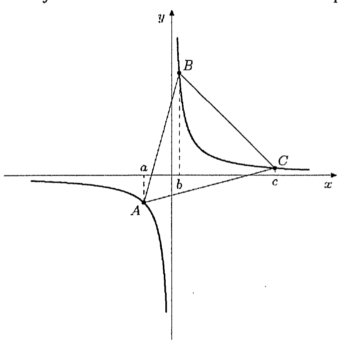
Укажем выигрышную стратегию игрока B. Если A на своём ходу заменяет звёздочку, стоящую не на первом месте, на какую-то цифру c, то B ответным ходом заменяет звёздочку, стоящую на любом, отличном от первого, месте противоположной чётности, на ту же самую цифру c. Тогда, если A последним своим ходом заменяет первую звёздочку на некоторую ненулевую цифру d, видим, что в получившемся $2n + 1$-значном числе разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, равна d. Так как d — ненулевая цифра, то полученное число на 11 не делится.

Если же A на каком-то своём (не последнем) ходу заменяет первую звёздочку на некоторую ненулевую цифру c, то B ответным ходом заменяет звёздочку на чётном месте на цифру $c-1$ и далее действует так же, как и выше, т. е. повторяя цифры игрока A, но на местах противоположной чётности. В результате A последним своим ходом должен заменить какую-то звёздочку на нечётном месте на некоторую цифру d. Значит, в полученном $(2n+1)$-значном числе разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, равна $d+1$. Так как d — цифра, то число $d+1$ больше нуля и меньше 11, а значит, полученное число на 11 не делится.

10 класс

10.1. Ответ: 9.

Пусть отмеченные точки имеют координаты: $A(a;1/a)$, $B(b;1/b)$, $C(c;1/c)$. Тогда искомое произведение равно



$$T = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Заметим, что поскольку любая вертикальная прямая пересекает гиперболу $y = 1/x$ не более чем в одной точке, то числа a, b, c — попарно различны. Так как по условию треугольник ABC равносторонний, то

$$AB = BC = CA \iff (b-a)^2+(1/b-1/a)^2 = \\ = (c-b)^2+(1/c-1/b)^2 = (a-c)^2+(1/a-1/c)^2. \qquad (1)$$

Из (1) получаем

$$b^2-2ab+a^2+1/b^2-2/(ab)+1/a^2 = c^2-2bc+b^2+1/c^2-2/(bc)+1/b^2 \implies$$

$$\implies (a^2-c^2)-2b(a-c)+\frac{c^2-a^2}{a^2c^2}-\frac{2(c-a)}{abc} = 0.$$

Поскольку $a \neq c$, то

$$a+c-2b-\frac{a+c}{a^2c^2}+\frac{2}{abc} = 0.$$

Из (1) аналогично получаем ещё два равенства

$$b+a-2c-\frac{b+a}{b^2a^2}+\frac{2}{abc} = 0 \quad \text{и} \quad c+b-2a-\frac{c+b}{c^2b^2}+\frac{2}{abc} = 0.$$

Почленно складывая три последних равенства, приходим к соотношению

$$\frac{6}{abc}-\frac{a+c}{a^2c^2}-\frac{b+a}{b^2a^2}-\frac{c+b}{c^2b^2} = 0,$$

откуда (умножив на abc и почленно разделив), находим, что

$$\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c} = 6.$$

Поэтому

$$T=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=3+6=9.$$

10.2. Пусть десятичная запись числа a содержат k знаков. Положим $b=5\cdot 10^m$, $m\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\overline{a,b}\cdot\overline{b,a}=n \iff \left(a+\frac{1}{2}\right)\left(5\cdot 10^m+\frac{a}{10^k}\right)=n \iff$$

$$\iff \frac{(2a+1)\cdot 5\cdot 10^m}{2}+\frac{a(2a+1)}{2\cdot 10^k}=n \iff (2a+1)\cdot 5^{m+1}\cdot 2^{m-1}+\frac{a(2a+1)}{2\cdot 10^k}=n.$$

Видим, что последнее равенство будет выполнено при некотором натуральном n, если и только если число $a(2a+1)$ делится на $2\cdot 10^k=2^{k+1}\cdot 5^k$, где k — число знаков в десятичной записи числа a. Поэтому если мы найдём хотя бы одно такое a, утверждение задачи будет доказано, поскольку при этом a и любом $b=5\cdot 10^m$, $m\in\mathbb{N}$, число $\overline{a,b}\cdot\overline{b,a}$ будет целым.

Возьмём $k=4$. Тогда нужное нам отношение принимает вид $a(2a+1)\ \vdots\ 2^5\cdot 5^4$. Оно является следствием двух отношений $a\ \vdots\ 2^5$ и $(2a+1)\ \vdots\ 5^4$. Поэтому для решения задачи нам достаточно найти хотя бы одно a, удовлетворяющее этим двум отношениям и имеющее в десятичной записи 4 знака. Такое a действительно существует: например, $a=5312$. Покажем, как его можно найти.

Покажем вначале, что найдётся бесконечно много натуральных a, для которых выполнены отношения $a\ \vdots\ 2^5$ и $(2a+1)\ \vdots\ 5^4$. Первое отношение равносильно равенству $a=32c$, где $c\in\mathbb{N}$, и тогда второе принимает вид $2\cdot 32c+1\ \vdots\ 5^4$, или $64c+1\ \vdots\ 625$. Преобразуем последнее отношение равносильным образом:

$$64c+1\ \vdots\ 625 \iff 64c+1-625\ \vdots\ 625 \iff 64c-624\ \vdots\ 625 \iff 16(4c-39)\ \vdots\ 625 \iff$$

$$\iff 4c-39\ \vdots\ 625 \iff 4c-39-625\ \vdots\ 625 \iff 4c-664\ \vdots\ 625 \iff 4(c-166)\ \vdots\ 625 \iff$$

$$\iff c-166\ \vdots\ 625 \iff c=625l+166,\ l\in\mathbb{Z}.$$

В частности, при $l=0$ число $c=166$, а значит, число $a=32c=32\cdot 166=5312$ в своей десятичной записи имеет нужное число $k=4$ знаков.

10.3. Ответ: $P(x)=ax(x-1)(x+1)$, где $a\in\mathbb{R}$.

Подставляя $x=1$ и $x=-1$ в исходное тождество

$$(x-1)P(x+1)-(x+1)P(x-1)=4P(x), \qquad (1)$$

получим соответственно: $-2P(0)=4P(1)$ и $-2P(0)=4P(-1)$. Подставляя теперь в равенство (1) $x=0$, получим $-P(1)-P(-1)=4P(0)$, откуда, с учётом двух предыдущих равенств, заключаем, что $P(-1)=P(0)=P(1)=0$.

Это означает, что числа 0, 1 и -1 — корни многочлена $P(x)$ и, следовательно, он может быть представлен в виде $P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Подставляя это представление многочлена $P(x)$ в тождество (1), получаем

$$(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1)-(x+1)(x-1)(x-2)xQ(x-1)=4x(x-1)(x+1)Q(x),$$

откуда

$$(x+2)Q(x+1) - (x-2)Q(x-1) = 4Q(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Подставим $x = 2$ в равенство (2), получим $Q(3) = Q(2)$. Индукцией по k покажем, что $Q(k) = Q(2)$ для всех натуральных $k \geqslant 2$. Действительно, пусть $Q(k) = Q(2)$ для всех $k = 2, 3, \ldots, m$, где $m \geqslant 3$. Тогда, подставляя $x = m$ в (2), получаем, что $(m+2)Q(m+1) - (m-2)Q(m-1) = 4Q(m)$, откуда, с учётом сделанного предположения, $(m+2)Q(m+1) = (m+2)Q(2)$, т.е. $Q(m+1) = Q(2)$. Согласно методу математической индукции $Q(k) = Q(2)$ для всех натуральных $k \geqslant 2$.

Поскольку многочлен $Q(x) - Q(2)$ принимает нулевые значения в бесконечном числе точек, то он тождественно равен нулю, т. е. $Q(x) = Q(2) = a$ для некоторого действительного числа a.

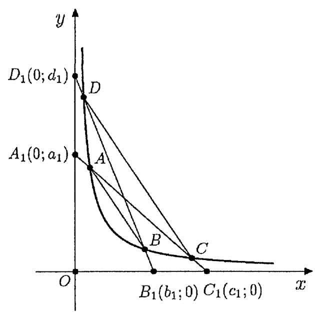
Таким образом, многочлен, удовлетворяющий тождеству (1), необходимо должен иметь вид $P(x) = ax(x-1)(x+1)$. Легко проверить, что любой многочлен такого вида (при любом действительном a) удовлетворяет тождеству (1).

10.4. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — радиусы нарисованных окружностей. Согласно условию $2\pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_k) \geqslant \pi$, т. е. $r_1 + r_2 + \ldots + r_k \geqslant 1/2$.

Повернём круг вокруг его центра на угол $360°$. При этом каждая окружность заметёт некоторое кольцо, центр которого совпадает с центром круга. Если окружность имеет радиус r_i, то ширина d_i кольца, заметаемого этой окружностью (т. е. модуль разности радиусов ограничивающих кольцо окружностей), равна $2r_i$. Если заметаемые кольца не пересекаются, то сумма $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_k) < 1$, что, как показано выше, не так.

11 класс

11.1. Пусть координаты точек равны: $A_1(0; a_1)$, $B_1(b_1; 0)$, $C_1(c_1; 0)$, $D_1(0; d_1)$, $A(a; 1/a)$, $B(b; 1/b)$, $C(c; 1/c)$, $D(d; 1/d)$. Заметим, что поскольку любая вертикальная или горизонтальная прямая пересекает гиперболу $y = 1/x$ не более чем в одной точке, то числа a, b, c, d — попарно различны.



Запишем уравнение прямой AB:

$$y - \frac{1}{a} = k_1(x - a).$$

Поскольку точка B лежит на этой прямой, то её координаты должны удовлетворять уравнению прямой, т. е. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = k_1(b - a)$, откуда $k_1 = -\frac{1}{ab}$.

Аналогично, рассматривая уравнение прямой CD: $y - c = k_2(x - c)$, — находим $k_2 = -\frac{1}{cd}$.

Поскольку прямые AB и CD параллельны, то $k_1 = k_2$, откуда

$$ab = cd \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \qquad (1)$$

Запишем уравнение прямой AC: $y-\dfrac{1}{a}=k(x-a)$. Подставляя $x=0$ в это уравнение, находим ординату точки A_1: $a_1=\dfrac{1}{a}-ka$, и подставляя в уравнение $y=0$, находим абсциссу точки C_1: $c_1=a-\dfrac{1}{ka}$. Поскольку точка C лежит на рассматриваемой прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой, т. е. $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=k(c-a)$, откуда $k=-\dfrac{1}{ac}$. Поэтому $a_1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$ и $c_1=a+c$.

Аналогично, рассматривая уравнение прямой BD, находим $d_1=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}$ и $b_1=b+d$. Таким образом,

$$S(A_1OC_1)=\frac{1}{2}|a_1c_1|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+c)^2}{|ac|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a/c+1)^2}{|a/c|},$$

$$S(D_1OB_1)=\frac{1}{2}|b_1d_1|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+d)^2}{|bd|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b/d+1)^2}{|b/d|}.$$

Равенство площадей $S(A_1OC_1)=S(D_1OB_1)$ следует теперь из (1).

11.2. Ответ: $\sqrt[3]{abc}$.

Можно считать, что $x>0$. Почленно перемножая три неравенства

$$x\leqslant a\frac{p}{q},\quad x\leqslant b\frac{q}{r},\quad x\leqslant c\frac{r}{p},$$

получаем $x\leqslant\sqrt[3]{abc}$.

Остаётся показать, что число $\sqrt[3]{abc}$ удовлетворяет условию задачи. Для этого достаточно убедиться в том, что система уравнений (с неизвестными p, q, r)

$$\begin{cases}\sqrt[3]{abc}=a\dfrac{p}{q},\\ \sqrt[3]{abc}=b\dfrac{q}{r},\\ p+q+r=1\end{cases}$$

имеет положительное решение $(p;q;r)$ (равенство $\sqrt[3]{abc}=c\dfrac{r}{p}$ получается перемножением двух первых уравнений системы и последующими очевидными преобразованиями). Выражая из первых двух уравнений p и r через q и подставляя полученные значения в третье её уравнение, находим положительное решение

$$p=\frac{yq}{a},\quad r=\frac{bq}{y},\quad q=1/\Big(\frac{y}{a}+\frac{b}{y}+1\Big),\quad \text{где}\quad y=\sqrt[3]{abc},$$

что и требовалось доказать.

11.3. Ответ: либо $f(x)=c$, $h(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ где a и c — произвольные постоянные; либо $f(x)=x+b$, $h(x)=x$, где b — произвольная постоянная.

Обозначим $h(0)=a$ и подставим $x=0$ в исходное уравнение

$$f\big(x^2+yh(x)\big)=xh(x)+f(xy)\quad \text{для всех}\quad x,y\in\mathbb{R}. \qquad (*)$$

Получим $f(ay) = f(0) = c$ для всех y.

Если $a \neq 0$, то ay пробегает все действительные числа, поэтому функция $f(x) = c$ — тождественная постоянная. При этом уравнение принимает вид $c = xh(x) + c$, или $xh(x) = 0$, откуда заключаем, что $h(x) = 0$ при $x \neq 0$, а $h(0) = a$ может быть любым. Найденная пара функций $(f(x), h(x))$, как легко убедиться, удовлетворяет уравнению $(*)$.

Пусть $a = 0$, т. е. $h(0) = 0$. Заметим, что если $h(x_0) \neq x_0$ для некоторого x_0 (тогда $x_0 \neq 0$), то существует такое y_0, для которого $x_0^2 + y_0 h(x_0) = x_0 y_0$ (действительно, достаточно взять $y_0 = x_0^2/(x_0 - h(x_0))$). Подставим в исходное уравнение $x = x_0$, $y = y_0$, получим $x_0 h(x_0) = 0$, т. е. $h(x_0) = 0$. Теперь, подставив в исходное уравнение $x = x_0$ и оставляя y любым, имеем $f(x_0^2) = f(x_0 y)$. Так как $x_0 \neq 0$, то $x_0 y$ пробегает все действительные числа, поэтому $f(x) = c$ — тождественная постоянная, но этот случай уже рассмотрен выше.

Остаётся предположить, что $h(x) = x$ для всех x. Тогда уравнение $(*)$ перепишется в виде

$$f(x^2 + yx) = x^2 + f(xy) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Обозначим $f(0) = b$ и подставим в уравнение $(**)$ $y = 0$, получим $f(x^2) = x^2 + b$ для всех x, т. е. $f(x) = x + b$ для неотрицательных x. Если же подставить $y = -x$, то получим $f(-x^2) = -x^2 + b$, т. е. $f(x) = x + b$ и для неположительных x.

11.4 Повернём круг вокруг его центра на угол $360°$. При этом каждый отрезок заметёт некоторое кольцо. Если мы покажем, что суммарная площадь всех этих колец не меньше π, то это и будет означать, что существует окружность, центр которой совпадает с центром круга, пересекающая не менее двух из нарисованных отрезков.

Оценим площадь S_{AB} кольца, заметаемого некоторым отрезком AB. Пусть высота, опущенная из центра O круга на прямую, содержащую отрезок AB, пересекает её в точке C. Рассмотрим два случая в зависимости от расположения точки C. Пусть точка C принадлежит отрезку AB. Тогда площадь S_{AB} кольца равна

$$S_{AB} = \pi \max\{OA^2 - OC^2, OB^2 - OC^2\} = \pi \max\{AC^2, BC^2\} \geqslant \pi AB^2/4.$$

Пусть теперь точка C не принадлежит отрезку AB. Тогда

$$S = \pi|OB^2 - OA^2| = \pi|CB^2 - CA^2| = \pi(AB^2 + 2AB \cdot AC) \geqslant \pi AB^2 > \pi AB^2/4.$$

Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — длины нарисованных отрезков. Тогда суммарная площадь колец не меньше чем $\dfrac{\pi}{4}(d_1^2 + \ldots + d_n^2) \geqslant \dfrac{\pi}{4n}(d_1 + \ldots + d_n)^2 \geqslant \pi$, что и требовалось доказать.