УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Найдите все пары $(p;q)$ простых чисел p и q, удовлетворяющих равенству $(p+q)^2 = p^3 - q^5$.

8.6. Найдите наименьшее действительно число x, при котором для любого треугольника выполняется неравенство $x + c \leqslant (x+a)(x+b)$, где $a \leqslant b \leqslant c$ — стороны треугольника.

8.7. Дана равнобедренная трапеция. Из шести отрезков — четырёх её сторон и двух её диагоналей — ровно три покрашены в красный цвет, а ровно три — в зелёный.

Докажите, что из какой-то тройки отрезков одного цвета можно составить треугольник.

8.8. В клетки таблицы 5×5 записаны по порядку числа от 1 до 25 (см. рисунок). За один ход разрешается: 1) выбрать любые две соседние по стороне клетки и в одной клетке число увеличить (уменьшить) на 2, а в другой клетке — уменьшить (соответственно, увеличить) на 1, или 2) выбрать любые две соседние по вершине клетки и число в одной клетке увеличить на 1, а число в другой клетке уменьшить на 1.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

а) Можно ли с помощью таких ходов получить таблицу, во всех клетках которой будут записаны одинаковые числа?

б) Можно ли с помощью таких ходов получить таблицу, в каждой клетке которой будет записано число 2?

9 класс

9.5. Найдите все пары $(p;q)$ простых чисел, удовлетворяющих равенству

$$p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q.$$

9.6. Дана десятичная дробь d, в записи которой присутствуют только цифры 0, 1 и 2. Известно, что если в дроби d заменить все нули единицами, то получится периодическая дробь; если же заменить в дроби d все единицы двойками, то также получится периодическая дробь.

Можно ли утверждать, что дробь d является периодической?

9.7. Дан параллелограмм. Из шести отрезков — четырёх его сторон и двух его диагоналей — ровно три покрашены в красный цвет, а ровно три — в зелёный.

Докажите, что из какой-то тройки отрезков одного цвета можно составить треугольник.

9.8. В клетки таблицы 7×7 вписаны по порядку числа от 1 до 49 (см. рисунок). За один ход разрешается выбрать любую клетку и число в этой клетке увеличить (уменьшить) на 1, а числа ещё в двух каких-то клетках, соседних с данной клеткой по стороне, уменьшить (соответственно, увеличить) на 1.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	39	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

а) Можно ли с помощью таких ходов получить таблицу, во всех клетках которой будут записаны одинаковые числа?

б) Можно ли с помощью таких ходов получить таблицу, в каждой клетке которой будет записано число 2013?

10 класс

10.5. Найдите все пары $(n; p)$ натуральных чисел n и простых чисел p, удовлетворяющих равенству $p^8 - p^4 = n^5 - n$.

10.6. В треугольнике ABC длина стороны AC равна среднему арифметическому длин двух других его сторон. Пусть BL — биссектриса угла ABC, а точки K и M — середины сторон AB и BC соответственно.

Найдите величину угла KLM, если $\angle ABC = \beta$.

10.7. а) Дан параллелограмм. Из шести отрезков — четырёх его сторон и двух его диагоналей — ровно три покрашены в красный цвет, а ровно три — в зелёный.

Докажите, что из какой-то тройки отрезков одного цвета можно составить треугольник.

б) Останется ли это утверждение справедливым для произвольного четырёхугольника?

10.8. На школьном балу танцевали $2n$ девочек и $2n$ мальчиков. Известно, что Вася станцевал со всеми девочками, а Катя — со всеми мальчиками. Кроме того, известно, что, каких бы двух девочек ни взять, число мальчиков, танцевавших только с одной из них, равно n.

Докажите, что

а) любая девочка, кроме Кати, танцевала на балу ровно с n мальчиками;

б) любой мальчик, кроме Васи, танцевал на балу ровно с n девочками.

11 класс

11.5. Найдите все пары $(n; p)$ натуральных чисел n и простых чисел p, удовлетворяющих равенству $p(p-1) = 2(n^3+1)$.

11.6. Точка I — центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник ABC. Луч AI пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке D. Окружность, проходящая через точки C, D и I, вторично пересекает луч BI в точке K.

Докажите, что $BK = CK$.

11.7. а) Дана равнобедренная трапеция. Из шести отрезков — четырёх её сторон и двух её диагоналей — ровно три покрашены в красный цвет, а ровно три — в зелёный.

Докажите, что из какой-то тройки отрезков одного цвета можно составить треугольник.

б) Останется ли это утверждение справедливым для произвольной трапеции?

11.8. На школьном балу танцевали $2n$ девочек и $2n$ мальчиков. Известно, что, каких бы двух девочек ни взять, число мальчиков, танцевавших только с одной из них, равно n.

Докажите, что это же верно и для мальчиков, т. е. что, каких бы двух мальчиков ни взять, число девочек, танцевавших только с одним из них, равно n.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: $(p;q) = (7;3)$.

Предположим, что $p \neq 3$ и $q \neq 3$.

Если $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ (все сравнения по модулю 3), то $(p+q)^2 \equiv 4 \equiv 1$, а $p^3 - q^5 \equiv 1 - 1 \equiv 0$, т.е. требуемых p и q такого вида не существует.

Если $p \equiv 1$, $q \equiv -1$, то $(p+q)^2 \equiv 0$, а $p^3 - q^5 \equiv 1-(-1) \equiv 2$, т.е. требуемых p и q такого вида также не существует.

Если $p \equiv -1$, $q \equiv 1$, то $(p+q)^2 \equiv 0$, а $p^3 - q^5 \equiv -1-1 \equiv -2$, т.е. и в этом случае требуемых p и q такого вида не существует.

Если $p \equiv -1$, $q \equiv -1$, то $(p+q)^2 \equiv 4 \equiv 1$, а $p^3 - q^5 \equiv -1-(-1) \equiv 0$, т.е. снова требуемых p и q такого вида не существует.

Пусть теперь $p = 3$. Тогда исходное равенство принимает вид

$$9 + 6q + q^2 = 27 - q^5 \Rightarrow q^5 + q^2 + 6q = 18. \qquad (1)$$

Так как при $q \geqslant 2$ имеем $q^5 + q^2 + 6q \geqslant 32 + 4 + 12 > 18$, то уравнение (1) не имеет решений в простых числах.

Если $q = 3$, то исходное равенство перепишется в виде

$$p^2 + 6p + 9 = p^3 - 243 \Rightarrow p^3 - p^2 - 6p = 252 \Rightarrow p(p-3)(p+2) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Из последнего равенства следует, что $p > 3$ и что, поскольку p — простое, единственным возможным значением p является 7. Проверкой убеждаемся, что $p = 7$ удовлетворяет полученному равенству.

Таким образом, единственная пара, удовлетворяющая условию, — пара $(7;3)$.

8.6. Ответ: $x = 1$.

Докажем сначала, что если a, b, c — стороны треугольника, то неравенство

$$x + c \leqslant (x+a)(x+b) \qquad (*)$$

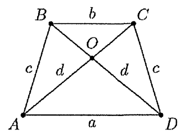
при $x = 1$ выполнено. Действительно, переписав $(*)$ в следующем равносильном виде $x + c \leqslant x^2 + (a+b)x + ab$, видим, что оно, если $x = 1$, верно, поскольку $x^2 = x = 1$ и по неравенству треугольника $(a+b)x = a+b > c$.

Покажем теперь, что если $x < 1$, то найдётся такой (свой для каждого x) треугольник, для которого неравенство $(*)$ не выполняется. В самом деле, если $x < 0$, то достаточно взять, например, треугольник со сторонами $a = 1-x$, $b = 1-x$ и $c = 2-x$, а если $0 \leqslant x < 1$ — правильный треугольник со стороной $\dfrac{1-x}{2}$.

8.7. Обозначим основания $AD = a$, $BC = b$, боковые стороны $AB = CD = c$ и диагонали $AC = BD = d$. Пусть для определённости $a > b$.

Возможны только два случая.

1. Обе диагонали покрашены в один цвет. Тогда независимо от того, какая из сторон покрашена в тот же цвет, из этих диагоналей и этой стороны можно составить треугольник. Это следует из того, что $d + d > AO + OB > c$ и $d + d > AO + OD > a > b$. Таким



образом, для отрезков d, d, x (x — сторона того же цвета, что и диагонали) выполнены неравенства треугольника.

2. Диагонали покрашены в разные цвета. Если одно из оснований и одна из боковых сторон окрашены одинаково, то вместе с диагональю, которая покрашена в этот же цвет, они образуют треугольник, равный по трём сторонам или треугольнику ABC, или треугольнику ADC.

Поэтому осталось рассмотреть случай, когда боковые стороны окрашены одинаково, и тогда основания тоже окрашены одинаково. Таким образом, мы имеем две одноцветные тройки: $\{c, c, d\}$ и $\{a, b, d\}$. Из первой тройки отрезков нельзя составить треугольник, только если $d \geqslant 2c$, а из второй — только если либо 1) $d \geqslant a + b$, либо 2) $a \geqslant d + b$ (так как неравенство $a + d > b$ заведомо выполнено). В случае 1) получим $2d \geqslant 2c + a + b > 2c + 2b$, откуда $d > c + b$, что противоречит неравенству треугольника для треугольника ABC. В случае 2) получим $a \geqslant d + b \geqslant 2c + b$, или $AD \geqslant AB + BC + CD > AC + CD$ — противоречие.

Следовательно, всегда найдётся тройка одинаково окрашенных отрезков, из которых можно составить треугольник.

8.8. Ответ: а) да, можно; **б)** нет, нельзя.

а) Покажем, что с помощью указанных в условии задачи ходов можно любое число таблицы уменьшить на 3, оставив остальные числа без изменения. Мы не будем рассматривать всю таблицу, а только то число x, которое будет уменьшено на 3 и ещё три числа a, b и c, которые будут задействованы в процессе преобразования (мы их добавим так, чтобы вместе с числом x получились четыре числа в некотором квадрате 2×2).

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & a \\ \hline b & c \\ \hline\end{array} \xrightarrow[-2+1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-2 & a+1 \\ \hline b & c \\ \hline\end{array} \xrightarrow[-1+1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-3 & a+1 \\ \hline b & c+1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow[+1-2]{}$$

$$\xrightarrow[+1-2]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-3 & a+1 \\ \hline b+1 & c-1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow[-1+1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-3 & a+2 \\ \hline b & c-1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow[-2+1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-3 & a \\ \hline b & c \\ \hline\end{array}$$

Ясно, что аналогичным образом можно уменьшить на 3 не только число x, но и любое из чисел a, b и c в рассматриваемом квадрате 2×2. Поэтому последовательно уменьшая таким способом числа в таблице, можно все их преобразовать в их остатки при делении на 3, т. е. получить таблицу:

1	2	0	1	2
0	1	2	0	1
2	0	1	2	0
1	2	0	1	2
0	1	2	0	1

Рассмотрим угловые квадраты 2×2:

1	2	0	1	2
0	1	2	0	1
2	0	1	2	0
1	2	0	1	2
0	1	2	0	1

Все они одинаковы и с помощью одной операции $(+1-1)$ преобразуются в квадраты, все числа в которых равны 1. В результате получим следующую таблицу:

1	1	0	1	1
1	1	2	1	1
2	0	1	2	0
1	1	0	1	1
1	1	2	1	1

Далее, преобразуем в единичную третью строчку таблицы:

$$\boxed{2\,|\,0\,|\,1\,|\,2\,|\,0} \to \boxed{1\,|\,2\,|\,1\,|\,2\,|\,0} \to \boxed{1\,|\,1\,|\,3\,|\,2\,|\,0} \to$$
$$\to \boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,3\,|\,0} \to \boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1}$$

Аналогично преобразуется в единичный и третий столбец таблицы (если его просматривать снизу вверх, то он совпадает с третьей строчкой таблицы до её последних преобразований). В результате получим таблицу, в которой все числа будут равны 1.

б) Представим, что клетки таблицы раскрашена в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. Для определённости пусть угловые клетки — белые. Тогда в таблице белых клеток 13, и в них записаны все нечётные числа от 1 до 25. Сумма этих чисел равна $\frac{1+25}{2}\cdot 13 = 13\cdot 13$. В чёрных клетках записаны 12 чётных чисел от 2 до 24, их сумма равна $\frac{2+24}{2}\cdot 12 = 13\cdot 12$. Разность между этими суммами равна $13\cdot 13 - 13\cdot 12 = 13$. Если бы во всех клетках таблицы было записано число 2, то разность между суммой чисел в белых клетках и суммой чисел в чёрных клетках, легко видеть, равнялась бы 2. Заметим, однако, что разность между этими суммами при выполнении хода типа 1) изменяется на 3 (увеличивается или уменьшается), а при выполнении хода типа 2) — вообще не меняется. Следовательно, после любого хода остаток при делении на 3 у рассматриваемой разности сумм не меняется. Поскольку число 13 при делении на 3 имеет остаток 1, а число 2 — остаток 2, то таблица, состоящая только из чисел 2, не может быть получена из исходной таблицы с помощью указанных ходов.

9 класс

9.5. Ответ: $(p;q) = (2;7)$ или $(p;q) = (3;17)$.

Если $p = 2$ или $p = 3$, то, решая получающееся квадратное относительно q уравнение, находим соответственно $q = 7$ и $q = 17$.

Пусть теперь $p > 3$. Перепишем уравнение в виде $p^3(p^2+1) = (q+1)(q-2)$. Заметим, что наибольший общий делитель чисел $q+1$ и $q-2$ равен 1 или 3. Так как $(q+1)(q-2) \vdots p^3$ и $p \neq 3$, то ровно одно из чисел $q+1$ и $q-2$ может делиться на p, а значит, одно из них делится на p^3. Если $(q+1) \vdots p^3$, то $q+1 \geqslant p^3$, а если $(q-2) \vdots p^3$, то $q-2 \geqslant p^3$. В любом случае $q \geqslant p^3-1$. Тогда получаем $p^5+p^3 = (q+1)(q-2) \geqslant p^3(p^3-3)$, откуда $p^2+1 \geqslant p^3-3$, т. е. $0 \geqslant p^3-p^2-4 = (p-2)(p^2+p+2)$, что невозможно при $p > 2$. Следовательно, других, кроме указанных выше, решений нет.

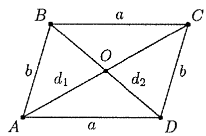
9.6. Ответ: да, можно.

Пусть a — десятичная дробь, которая была получена, после замены у дроби d всех нулей на единицы, а b — десятичная дробь, которая была получена, после замены у дроби d всех единиц на двойки. Так как и a, и b — периодические дроби, то оба эти числа рациональные.

Заменим у дроби a все двойки нулями — получим дробь α, которая также очевидно периодическая и, следовательно, есть число рациональное. Аналогично, заменим у дроби b все нули единицами — получим дробь β, которая также очевидно периодическая, и, следовательно, также является рациональным числом.

Легко видеть, что $d = \beta - \alpha$. Поэтому число d рациональное, и, следовательно, является периодической десятичной дробью.

9.7. Обозначим стороны параллелограмма $BC = AD = a$, $AB = CD = b$, диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$. Пусть для определённости $\angle ADC \geqslant 90^\circ$. Тогда $d_1 > a$, $d_1 > b$. Не ограничивая общности, считаем, что $a \geqslant b$. Тогда $a + a \geqslant a + b > d_1 \geqslant d_2$. Возможны только два случая.



1. Диагонали покрашены в разные цвета. Если две смежные стороны, a и b, окрашены одинаково с одной из диагоналей, то вместе с диагональю, которая покрашена в этот же цвет, они образуют треугольник, равный по трём сторонам или треугольнику ADB, или треугольнику ADC. Пусть тогда две противоположные стороны, a и a, окрашены одинаково с какой-либо диагональю. Тогда из них и этой диагонали можно составить треугольник, так как $a + a > d_1$ и $a + a > d_2$.

2. Обе диагонали покрашены в один цвет и этим же цветом покрашена одна из сторон. Тогда другая, равная ей, сторона и две оставшиеся стороны покрашены другим цветом. Если стороны a, a, b окрашены одинаково, то из них можно составить треугольник, так как $a + a \geqslant a + b > b$. Предположим, что одинаково окрашены b, b, a, а также d_1, d_2, a. Чтобы из этих троек нельзя было составить треугольник, нужно, чтобы $a \geqslant 2b$ и либо $d_1 \geqslant a + d_2$, либо $d_2 \geqslant a + d_1$ (так как неравенство $d_1 + d_2 > a$ заведомо выполнено). Пусть $d_1 \geqslant a + d_2$. Тогда $d_1 \geqslant 2b + d_2$, т.е. $AC \geqslant AB + BD + DC > AD + DC$ — противоречие. Аналогично, если $d_2 \geqslant a + d_1$, тогда $d_2 \geqslant 2b + d_1$, т. е. $BD \geqslant BA + CD + AC > BA + AD$ — противоречие.

Следовательно, всегда найдётся тройка одинаково окрашенных отрезков, из которых можно составить треугольник.

9.8. Ответ: **а)** да, можно; **б)** нет, нельзя.

а) Покажем, что с помощью указанных в условии задачи ходов можно любое число таблицы уменьшить на 3, оставив остальные числа без изменения. Мы не будем рассматривать всю таблицу, а только то число x, которое будет уменьшено на 3 и ещё три числа a, b и c, которые будут задействованы в процессе преобразования (мы их добавим так, чтобы вместе с числом x получились четыре числа в некотором квадрате 2×2).

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & a \\ \hline b & c \\ \hline\end{array} \xrightarrow[-1+1+1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-1 & a+1 \\ \hline b+1 & c \\ \hline\end{array} \xrightarrow[+1-1-1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-2 & a+1 \\ \hline b+2 & c-1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow[+1-1-1]{}$$

$$\xrightarrow[+1-1-1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-2 & a \\ \hline b+1 & c \\ \hline\end{array} \xrightarrow[-1+1+1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-3 & a+1 \\ \hline b+1 & c-1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow[+1-1-1]{} \begin{array}{|c|c|}\hline x-3 & a \\ \hline b & c \\ \hline\end{array}$$

Ясно, что аналогичным образом можно уменьшить на 3 не только число x, но и любое из чисел a, b и c в рассматриваемом квадрате 2×2. Поэтому, последовательно уменьшая таким способом числа в таблице, можно все их преобразовать в их остатки при делении на 3, т. е. получить таблицу:

1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1

Рассмотрим левый нижний квадрат 6×6. Он состоит из четырёх одинаковых квадратов 3×3:

2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0
2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0

Легко видеть, что каждый такой квадрат 3×3 после двух операций преобразуется в квадрат, состоящий только из чисел 1. В результате получим следующую таблицу:

1	2	0	1	2	0	1
1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Далее, преобразуем в единичную верхнюю строчку таблицы:

1	2	0	1	2	0	1

$\rightarrow$

1	1	1	0	2	0	1

$\rightarrow$

1	1	1	1	1	1	1

Аналогично преобразуется в единичный и правый столбец таблицы (если его просматривать сверху вниз, то он совпадает с верхней строчкой таблицы до её последних преобразований). В результате получим таблицу, в которой все числа будут равны 1.

б) Представим, что клетки таблицы раскрашена в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. Для определённости пусть угловые клетки – белые. Тогда в таблице белых клеток 25, и в них записаны все нечётные числа от 1 до 49. Сумма этих чисел равна $\frac{1+45}{2}\cdot 25 = 25\cdot 25$. В чёрных клетках записаны 24 чётных числа от 2 до 48, их сумма равна $\frac{2+48}{2}\cdot 24 = 25\cdot 24$. Разность между этими суммами равна $25\cdot 25 - 25\cdot 24 = 25$. Если бы во всех клетках таблицы было записано число 2, то разность между суммой чисел в белых клетках и суммой чисел в чёрных клетках, легко видеть, равнялась бы 2013. Заметим, однако, что разность между этими суммами при выполнении любого хода изменяется на 3. Следовательно, после любого хода остаток при делении на 3 у рассматриваемой разности сумм не меняется. Поскольку число 25 при делении на 3 имеет остаток 1, а число 2013 – остаток 0, то таблица, состоящая только из чисел 2013, не может быть получена из исходной таблицы с помощью указанных ходов.

10 класс

10.5. Ответ: $(n;p) = (3;2)$.

Ясно, что $p \neq n$. Если $p = 2$, то $n \geqslant 3$, и мы имеем: $2^8 - 2^4 = 240 = 3^5 - 3$, т. е. $p = 2$, $n = 3$ — решение. С другой стороны, при $n > 3$ имеем: $n^5 - n = n(n^4 - 1) > 3(3^4 - 1) = 240$, т. е. при $p = 2$ других значений n, удовлетворяющих равенству, нет.

Пусть теперь $p > 2$, тогда p — нечётное простое число. Перепишем данное в условии задачи равенство в виде

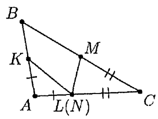
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1) = p^4(p^4-1). \qquad (*)$$

Заметим, что ровно один из четырёх сомножителей в левой части уравнения может делиться на p. Действительно, число n взаимно просто и с числом $n-1$, и с числом $n+1$, и с числом n^2+1. А в силу равенств $n+1 = (n-1)+2$, $n^2+1 = (n-1)^2+2(n-1)+2$, $n^2+1 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 2$ наибольший общий делитель любых двух из оставшихся трёх сомножителей равен 1 или 2. Значит, никакие два из этих множителей не могут одновременно делиться на p.

Итак, ровно один из сомножителей в левой части уравнения $(*)$ делится на p, а значит, и на p^4. Тогда он не менее, чем p^4. В любом случае $n^2 + 1 \geqslant p^4$, или $n^2 \geqslant p^4 - 1$. Поэтому $p^4(p^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) \geqslant n(p^4-2)p^4$, откуда $p^4-1 \geqslant n(p^4-2) > 2(p^4-1)$, что невозможно. Следовательно, других решений, кроме найденного выше, нет.

10.6. Ответ: $90^\circ - \beta/2$.

Отметим на стороне AC точку N, так, что $AN = 0,5AB$. Тогда из условия следует, что $NC = AC - AN = 0,5(AB + BC) - 0,5AB = 0,5BC$. Поэтому $AN : NC = AB : BC$. Поскольку из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $AL : LC = AB : BC$, то точки L и N совпадают. Следовательно, треугольники KAL и MCL равнобедренные и



$$\angle AKL = \angle ALK = 0,5(180^\circ - \angle BAC),\ \angle CML = \angle CLM = 0,5(180^\circ - \angle BCA).$$

Поэтому

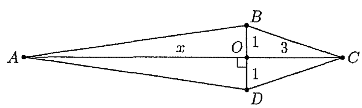
$$\angle KLM = 180^\circ - \angle ALK - \angle CLM = 180^\circ - 0,5(180^\circ - \angle BAC) - 0,5(180^\circ - \angle BCA) =$$

$$= 0,5(\angle BAC + \angle BCA) = 0,5(180^\circ - \angle ABC) = 0,5(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \beta/2.$$

10.7. Ответ: **б)** нет.

а) См. решение задачи **9.4**.

б) Рассмотрим, например, дельтоид $ABCD$, у которого $AB = AD$ и $BC = CD$. Пусть $BD = 2$ и $CO = 3$, $AO = x$, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.



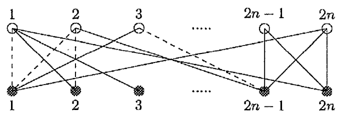
Покрасим отрезки AD, AC, BD в зелёный цвет, а отрезки AB, BC, CD — в красный. Подберём x так, чтобы ни из зелёных, ни из красных отрезков нельзя было составить треугольник. Для этого вполне достаточно, чтобы были выполнены два неравенства: $AC > AD + BD$ и $AB > BC + CD = 2BC$, т. е., соответственно,

$$x + 3 > \sqrt{1+x^2} + 2 \text{ и } \sqrt{1+x^2} > 2\sqrt{10} \iff x + 1 > \sqrt{1+x^2} \text{ и } x^2 > 39.$$

Первое неравенство выполнено при любых положительных x, а второе, например, при $x = 7$.

Таким образом, для указанного дельтоида утверждение пункта **а)** места не имеет.

10.8. Перенумеруем каким-либо образом отдельно мальчиков и отдельно девочек числами от 1 до $2n$. Переформулируем задачу на языке графов. Для этого построим раскрашенный граф G следующим образом. Граф G содержит $4n$ вершин: $2n$ белых, помеченных числами от 1 до $2n$ (i-ая белая вершина соответствует i-ой девочке), и $2n$ чёрных, также помеченных числами от 1 до $2n$ (i-ая чёрная вершина соответствует i-ому мальчику). Удобно представлять себе расположение вершин графа G так, как показано на рисунке: белые вершины образуют один (верхний) горизонтальный ряд, а чёрные — другой (нижний) горизонтальный ряд, и белые и чёрные вершины пронумерованы слева направо числами от 1 до $2n$. Соединим отрезками (рёбрами) все белые вершины со всеми чёрными и покрасим отрезок, соединяющий i-ую белую вершину с k-ой чёрной, в красный цвет, если i-ая девочка танцевала с k-ым мальчиком, и в синий цвет — в противном случае. Не нарушая общности, считаем, что Васе соответствует $(2n)$-ая чёрная вершина, а Кате — $(2n)$-ая белая вершина.



Заметим, что в графе G все рёбра, выходящие из $(2n)$-ой белой и $(2n)$-ой чёрной вершин, красные, а из любой белой вершины, отличной от $(2n)$-ой белой вершины, выходит ровно n рёбер красного цвета. Действительно, поскольку только с одной из девочек i или $2n$ ($i \neq 2n$) танцевало ровно n мальчиков, то в графе G имеется ровно n чёрных вершин, соединённых с i-ой белой вершиной рёбрами синего цвета, а значит, ровно n чёрных вершин, соединённых с i-ой белой вершиной рёбрами красного цвета. Это доказывает утверждение пункта **а)**.

Удалим из графа G его $(2n)$-ые белую и чёрную вершины вместе с выходящими из них рёбрами — получим граф G^*, у которого из каждой белой вершины выходит ровно $n-1$ красных рёбер. Для i-ой чёрной вершины через x_i обозначим количество красных рёбер в графе G^* из неё выходящих. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i$ — это количество красных рёбер в графе G^*, а значит, оно равно $(n-1)(2n-1)$ (из каждой белой вершины графа G^* выходит ровно $n-1$ красных рёбер), т. е. $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i = (n-1)(2n-1)$. Через r_i обозначим количество всевозможных пар, составленных из красного и синего рёбер, выходящих из i-ой чёрной вершины графа G^*. Ясно, что $r_i = x_i(2n-1-x_i)$. Тогда общее количество пар равно $R = \sum\limits_{i=1}^{2n-1} r_i = \sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i(2n-1-x_i)$. Посчитаем величину R по-другому. Если для каждой пары девочек мы найдём число тех мальчиков, с каждым из которых эта пара соединена разноцветными рёбрами, то сумма всех таких чисел (по всем парам девочек) равна, очевидно, R. Но так как для каждой пары девочек указанное выше число одно и то же и равно n, то $R = n\mathrm{C}_{2n-1}^2$.

Итак, $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i(2n-1-x_i) = n\mathrm{C}_{2n-1}^2$, или $(2n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i - \sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 = n\mathrm{C}_{2n-1}^2$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 = (2n-1)\sum_{i=1}^{2n-1} x_i - n\mathrm{C}_{2n-1}^2 = (2n-1)^2(n-1) - n(2n-1)(n-1) = (n-1)^2(2n-1).$$

Как следует из неравенства Коши, $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant \dfrac{1}{2n-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i\Big)^2$, причём равенство в этом неравенстве имеет место только при условии выполнения равенств $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n-1}$. Но в рассматриваемом случае как раз и имеем равенство $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 = (n-1)^2(2n-1) = \dfrac{1}{2n-1}(n-1)^2(2n-1)^2 = \dfrac{1}{2n-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i\Big)^2$. Значит, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n-1} = n-1$. Таким образом, в графе G из каждой чёрной вершины с номером от 1 до $2n-1$ выходит ровно n красных рёбер, что и требовалось доказать в пункте **б)**.

11 класс

11.5. Ответ: $(n;p) = (20;127)$.

Легко видеть, что данное по условию равенство

$$p(p-1) = 2(n^3+1) \tag{1}$$

при $p=2$ и натуральном n выполнено быть не может. Таким образом, $p \geqslant 3$ — простое нечётное число. Тогда $(n+1)(n^2-n+1)$ делится на p.

1. Если $(n+1) \,\vdots\, p$, то $n+1 = kp$ для некоторого натурального k. В частности, $n+1 \geqslant p$. Тогда из (1) имеем $p(p-1) = 2(n+1)(n^2-n+1) \geqslant 2p(n^2-n+1)$, откуда $p-1 \geqslant 2n^2-2n+2$. Тогда $n \geqslant p-1 \geqslant 2n^2-2n+2$, или $2n^2-3n+2 \leqslant 0$, что невозможно.

2. Поэтому $n^2-n+1 \,\vdots\, p$, т. е.

$$n^2-n+1 = kp \tag{2}$$

для некоторого натурального k. Подставляя это выражение в равенство (1), получим $p-1 = 2k(n+1)$, или

$$p = 2kn+2k+1. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим $n^2-n+1 = 2k^2n+2k^2+k$, или

$$n^2-(2k^2+1)n-(2k^2+k-1) = 0. \tag{4}$$

Дискриминант D этого квадратного относительно n уравнения равен $D = (2k^2+1)^2 + 4(2k^2+k-1)$ и является, очевидно, нечётным числом, большим, чем $(2k^2+1)^2$, но заведомо меньшим, чем $(2k^2+5)^2$ (действительно,

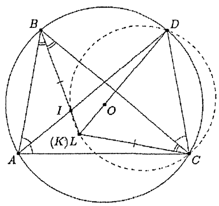
$$(2k^2+1)^2+4(2k^2+k+1) < (2k^2+5)^2 \iff 4(2k^2+k-1) < (4k^2+6)\cdot 4 \iff k-7 < 2k^2.$$

Поэтому обязательно $D = (2k^2+1)^2 + 4(2k^2+k-1) = (2k^2+3)^2$ (дискриминант D обязан быть полным квадратом, иначе у уравнения (4) не будет целого корня n). Таким образом,

$$4(2k^2+k-1) = (2k^2+3)-(2k^2+1) = ((4k^2+4)\cdot 2 \iff 2k^2+k-1 = 2k^2+2 \iff k = 3.$$

Тогда уравнение (4) принимает вид $n^2 - 19n - 20 = 0$, откуда $n = 20$. Поэтому из (3) находим $p = 2\cdot 3\cdot 20 + 2\cdot 3 + 1 = 127$ — действительно простое число.

11.6. Пусть O — центр описанной окружности $\triangle ABC$. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Проведём через точки D и O прямую, и пусть L — точка пересечения этой прямой с лучом BI. Поскольку AI — биссектриса угла BAC, то $\smile BD = \smile DC$, и, следовательно, прямая DO — серединный перпендикуляр к отрезку BC. Поэтому $BL = CL$, т. е. треугольник BLC равнобедренный и $\angle LBC = \angle LCB = \beta/2$ (BI — биссектриса угла ABC). Тогда



$$\angle ILC = \angle BLC = 180^\circ - (\angle LBC + \angle LCB) = 180^\circ - \beta.$$

С другой стороны,

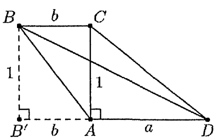
$$\angle CDI = \angle CDA = 180^\circ - (\angle DAC + \angle ACD) =$$
$$= \left[\angle DCB = \angle DAB = \angle DAC = 0,5\alpha,\ \angle ACB = \gamma,\ \angle ACD =\right.$$
$$\left.= \angle ACB + \angle DCB = \gamma + 0,5\alpha\right] = 180^\circ - (0,5\alpha + \gamma + 0,5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta.$$

Таким образом, $\angle ILC + \angle CDI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, D, C и L лежат на одной окружности (проходящей через точки I, D, C). Следовательно, точки K и L совпадают. Поэтому $CK = CL = BL = BK$, что и требовалось доказать.

11.7. Ответ: **б)** нет.

а) См. решение задачи **8.4**.

б) Рассмотрим, например, трапецию $ABCD$, у которой диагональ AC перпендикулярна основаниям AD и BC (см. рис.). Пусть $CA = 1$. Покрасим отрезки AB, AC и CD зелёным цветом, а отрезки BC, BD и AD — красным. Для этих красных отрезков выполнено неравенство $BD > B'D = B'A + AD = BC + AD$ (см. рис.), поэтому из них треугольник невозможно составить.

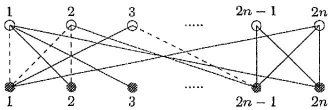


Подберём длины оснований $AD = a$, $BC = b$ так, чтобы из зелёных отрезков тоже нельзя было составить треугольник. Для этого достаточно, чтобы имело место неравенство $CD > AC + AB$, или

$$\sqrt{1+a^2} > 1 + \sqrt{1+b^2} \iff a^2 > 1 + b^2 + 2\sqrt{1+b^2}.$$

Последнее неравенство легко удовлетворяется при надлежащем подборе конкретных положительных чисел a и b. Например, можно просто взять $a = 1 + \sqrt{1+b^2}$ при любом b.

11.8. Перенумеруем каким-либо образом отдельно мальчиков и отдельно девочек числами от 1 до $2n$. Переформулируем задачу на языке графов. Для этого построим раскрашенный граф G следующим образом. Граф G содержит $4n$ вершин: $2n$ белых,



помеченных числами от 1 до $2n$ (i -ая белая вершина соответствует i -ой девочке), и $2n$ чёрных, также помеченных числами от 1 до $2n$ (i -ая чёрная вершина соответствует i -ому мальчику). Удобно представлять себе расположение вершин графа G так, как показано на рисунке: белые вершины образуют один (верхний) горизонтальный ряд, а чёрные — другой (нижний) горизонтальный ряд, и белые и чёрные вершины пронумерованы слева направо числами от 1 до $2n$. Соединим отрезками (рёбрами) все белые вершины со всеми чёрными и покрасим отрезок, соединяющий i -ую белую вершину с k -ой чёрной, в красный цвет, если i -ая девочка танцевала с k -ым мальчиком, и в синий цвет — в противном случае. Назовём пару белых вершин правильной парой, если число чёрных вершин, соединённых рёбрами разного цвета с вершинами этой пары, равно n. Точно так же, пару чёрных вершин назовём правильной парой, если число белых вершин, соединённых рёбрами разного цвета с вершинами этой пары, равно n. Тогда условие задачи равносильным образом переформулируется так: *Известно, что в графе G любая пара белых вершин является правильной. Нужно доказать, что тогда и любая пара чёрных вершин также является правильной.*

Сейчас мы специальным образом перекрасим некоторые рёбра графа G в противоположный цвет (красные в синий, а синие в красный) — получим граф G^*, такой, что, во-первых, если пара белых вершин или пара чёрных вершин была правильной до перекраски, то такой она останется и после неё, а во-вторых, в графе G^* есть такие белая и чёрная вершины, что все рёбра с концами в этих вершинах красного цвета. Такую перекраску выполним в два шага.

На первом шаге рассмотрим какую-либо белую вершину — например, для определённости, $(2n)$ -ую — и отметим все чёрные вершины, соединённые с ней рёбрами синего цвета. Обозначим это множество чёрных вершин через B, а через $\overline{B}$ — множество остальных чёрных вершин. Для каждой вершины из B перекрасим все выходящие из неё рёбра в противоположный цвет, для вершин из $\overline{B}$ цвет выходящих из них рёбер не меняем — полученный граф обозначим через G_1. Тогда, после перекраски, из $(2n)$ -ой белой вершины выходят рёбра только красного цвета. Кроме того, любая пара белых вершин остаётся правильной, поскольку если чёрная вершина до перекраски была соединена рёбрами разного цвета с вершинами этой пары, то и после перекраски она будет соединена с ними рёбрами разного цвета, а если до перекраски чёрная вершина была соединена с вершинами этой пары рёбрами одного цвета, то и после перекраски она будет соединена с ними рёбрами одного цвета. Далее, покажем, что если пара чёрных вершин была до перекраски правильной, то и после перекраски она останется правильной, а если нет, то и после перекраски она не будет правильной. Действительно, рассмотрим пару (b_1, b_2) чёрных вершин. Если $b_1, b_2 \in B$ или $b_1, b_2 \in \overline{B}$, то это очевидно. Пусть $b_1 \in B$, а $b_2 \in \overline{B}$. Пусть также пара (b_1, b_2) соединена отрезками разного цвета с m белыми, а значит, отрезками одного цвета с $2n-m$ белыми вершинами. Тогда, очевидно, что после перекраски эта пара будет соединена отрезками одного цвета с m белыми и отрезками разного цвета с $2n-m$ белыми вершинами, т. е. правильность и неправильность пары чёрных вершин перекраска не изменяет.

На втором шаге действуем так же, как и на первом, только с переменой белых и чёрных вершин ролями. Рассмотрим в графе G_1 какую-либо чёрную вершину — например, для определённости, $(2n)$ -ую — и отметим все белые вершины, соединённые с ней рёбрами синего цвета. Для каждой такой белой вершины перекрасим все выходящие из неё рёбра в противоположный цвет, а для остальных белых вершин цвет выходящих из них рёбер не меняем — получим граф G^*. Ясно, что в графе G^* все рёбра, выходящие из $(2n)$ -ых белой и чёрной вершин, красного цвета. Точно так же, как и выше, показывается, что такая перекраска правильность и неправильность пары чёрных или пары белых вершин в графе G_1 не изменяет, а значит, количество правильных пар белых и количество правильных пар чёрных вершин в графе G^* такое же, как и в графе G. Таким образом, для решения задачи нам достаточно показать, что любая пара чёрных вершин в графе G^* является правильной.

Заметим, что в графе G^* из любой белой вершины, отличной от $(2n)$ -ой белой вершины, выходит ровно n рёбер красного цвета. Действительно, поскольку пара $(i, 2n)$ белых вершин ($i \neq 2n$) в графе G^* правильная и $(2n)$ -ая белая вершина соединена с чёрными вершинами рёбрами только красного цвета, то имеется ровно n чёрных вершин, соединённых с i -ой белой вершиной рёбрами синего цвета, а значит, ровно n чёрных вершин, соединённых с i -ой белой вершиной рёбрами красного цвета. Удалим из графа G^* его $(2n)$ -ые белую и чёрную вершины вместе с выходящими из них рёбрами — получим граф G^{**}, у которого из каждой белой вершины выходит ровно $n-1$ красных рёбер. Для i -ой чёрной вершины через x_i обозначим количество красных рёбер в графе G^{**} из неё выходящих. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i$ — это количество красных рёбер в графе G^{**}, а значит, оно равно $(n-1)(2n-1)$ (из каждой белой вершины графа G^{**} выходит ровно $n-1$ красных рёбер), т. е. $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i = (n-1)(2n-1)$. Через r_i обозначим количество всевозможных пар, составленных из красного и синего рёбер, выходящих из i -ой чёрной вершины графа G^{**}. Ясно, что $r_i = x_i(2n-1-x_i)$. Тогда общее количество пар равно $R = \sum\limits_{i=1}^{2n-1} r_i = \sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i(2n-1-x_i)$. Посчитаем величину R по-другому. Если для каждой пары девочек мы найдём число тех мальчиков, с каждым из которых эта пара соединена разноцветными рёбрами, то сумма всех таких чисел (по всем парам девочек) равна, очевидно, R. Но так как для каждой пары девочек указанное выше число одно и то же и равно n, то $R = n\mathrm{C}_{2n-1}^2$. Итак, $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i(2n-1-x_i) = n\mathrm{C}_{2n-1}^2$, или $(2n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i - \sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 = n\mathrm{C}_{2n-1}^2$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 = (2n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i - n\mathrm{C}_{2n-1}^2 =$ $= (2n-1)^2(n-1) - n(2n-1)(n-1) = (n-1)^2(2n-1)$. Как следует из неравенства Коши, $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geqslant \dfrac{1}{2n-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i\Big)^2$, причём равенство в этом неравенстве имеет место только при условии выполнения равенств $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n-1}$. Но в рассматриваемом случае как раз и имеем равенство $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i^2 = (n-1)^2(2n-1) = \dfrac{1}{2n-1}(n-1)^2(2n-1)^2 =$ $= \dfrac{1}{2n-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} x_i\Big)^2$. Значит, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n-1} = n-1$. Таким образом, каждая чёрная вершина с номером от 1 до $2n-1$ образует правильную пару с $(2n)$ -ой чёрной вершиной. Проводя аналогичные рассуждения для чёрной вершины с произвольным номером, получаем что каждая пара чёрных вершин в графе G является правильной.