КЛ

Министерство образования Республики Беларусь

« LXII »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Гомель 2012

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 62-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Базылев Д.Ф. (9.6)
Барабанов Е.А. (8.8, 9.8, 10.8, 11.8)
Берник В.И. (11.6)
Воронович И.И. (8.7, 9.5, 10.5, 10.6)
Городнин И.И. (9.7, 10.7, 11.7)
Карамзин В.П. (8.5, 11.5)
Каскевич В.И. (8.6)
Худякова П.А. (8.8, 9.8, 10.8, 11.8)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Действительные, попарно различные, ненулевые числа a, b, c таковы, что графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \dfrac{cx+b}{cx+a}$ и $h(x) = cx + b$ имеют ровно одну общую точку и других попарных точек пересечения не имеют.

Найдите все числа a, b, c, удовлетворяющие указанному условию.

8.6. В трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) диагональ CA является биссектрисой угла BCD, $CD = AO$ и $BC = OD$, где O — точка пересечения диагоналей.

Найдите углы трапеции $ABCD$.

8.7. У олигарха Бори было 14 серебряных, 15 золотых и 16 платиновых слитков, а у олигарха Ромы — 16 серебряных, 15 золотых и 14 платиновых. Время от времени, Боря и Рома стали меняться слитками следующим образом. Один из них давал другому два слитка из одного металла и получал взамен тоже два слитка, по одному из двух других металлов. В какой-то момент оказалось, что у Ромы нет ни одного золотого слитка.

Сколько платиновых слитков могло у него быть в этот момент?

8.8. N мальчиков ($N \geqslant 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *средним* в данной расстановке их по кругу, если один из его соседей выше его по росту, а другой — ниже.

Докажите, что если N нечётно, то в любой расстановке этих N мальчиков по кругу найдётся хотя бы один средний мальчик.

9 класс

9.5. Найдите все возможные значения, которые может принимать произведение $(ab-cd)(c+d)$, если ненулевые действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a+b+c+d=0, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0.$$

9.6. Пусть a, b, c — последовательные нечетные натуральные числа. Известно, что число $a^{b+2}+b^{c+2}+c^{a+2}$ делится на число $a^n+b^n+c^n$ при некотором нечетном натуральном n. $a<b<c$

Найдите числа a, b, c и n.

9.7. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD.

Найдите максимально возможное значение площади этого четырехугольника, если длина ломаной $ABDC$ равна L.

9.8. N мальчиков ($N \geqslant 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *высоким* в данной расстановке их по кругу, если оба его соседа ниже его по росту, и *низким*, если оба соседа выше его по росту.

Докажите, что в любой расстановке этих N мальчиков по кругу число высоких мальчиков равно числу низких мальчиков.

10 класс

10.5. Графики парабол $y=x^2-a$ и $x=y^2-b$, $a>0$, $b>0$, пересекаются в четырех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, x_4.

Докажите, что $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)=1$.

10.6. а) Пусть $n^2+1=ab$ — разложение числа n^2+1, где n — натуральное, на натуральные множители $a>b$.

Докажите, что $a-b \geqslant \sqrt{4n-3}$.

б) Найдите все такие натуральные n, при которых оценка п. **а)** является точной.

10.7. Какие-то три стороны четырехугольника имеют длины 2, 7 и 11.

Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что он имеет наибольшую площадь из всех четырехугольников с указанными сторонами.

10.8. N мальчиков ($N \geqslant 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *высоким* в данной расстановке их по кругу, если оба его соседа ниже его.

Сколько всего может быть высоких мальчиков в расстановке? (Укажите, с обоснованием, все возможные значения.)

11 класс

11.5. На координатной плоскости нарисованы графики параболы $y = ax^2$,
$a > 0$, и гиперболы $y = 1/x$, пересекающиеся в точке T. Общая касательная этих графиков касается графика гиперболы в точке Q и графика параболы в точке P.

а) Докажите, что какие-то две медианы треугольника PQT взаимно перпендикулярны.

б) Найдите площадь треугольника PQT.

6. Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q называется *иррациональным*, если он имеет иррациональные корни α_1 и α_2.

Найдите наименьшее значение суммы модулей корней $|\alpha_1|+|\alpha_2|$ среди всех иррациональных квадратных трёхчленов.

7. В четырехугольнике $ABCD$ известны суммы противоположных сторон: $AB + CD = 6$, $BC + DA = 8$.

Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что он имеет наибольшую площадь из всех четырехугольников с указанными суммами противоположных сторон.

8. N мальчиков ($N \geqslant 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *средним* в данной расстановке их по кругу, если один из его соседей выше его по росту, а другой — ниже.

Сколько всего может быть средних мальчиков в расстановке? (Укажите, с обоснованием, все возможные значения.)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: $a=\frac{3}{11}$, $b=-\frac{8}{11}$, $c=\frac{4}{11}$.

Так как графики функций $f(x)$ и $h(x)$ имеют ровно одну общую точку, то уравнение $ax^2+bx+c=cx+b$, т.е. уравнение

$$ax^2-(\ -b)x+(c-b)=0, \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Это значит, его дискриминант равен 0, т.е. $(c-b)^2-4a(c-b)=0 \ \Leftrightarrow \ (c-b)(c-b-4a)=0$. Так как по условию $c\neq b$ и, значит, $c-b\neq 0$, то $c-b-4a=0$, т.е.

$$c-b=4a. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) с учетом равенства (2) принимает вид $ax^2-4ax+4a=0$, откуда $x^2-4x+4=0 \ \Leftrightarrow \ (x-2)^2=0 \ \Leftrightarrow \ x=2$. Таким образом $x=2$ — абсцисса точки пересечения всех трех графиков.

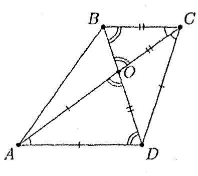
Далее, поскольку графики функций $g(x)$ и $h(x)$ также имеют ровно одну общую точку, то уравнение $\frac{cx+b}{cx+a}=cx+b$, т.е. уравнение $cx+b=(cx+b)(cx+a)$ имеет единственное решение. Но, очевидно, то уравнение превращается в правильное равенство при $cx+b=0$ и при $cx+a=1$, т.е. при $x=-\frac{b}{c}$ и при $x=-\frac{1-a}{c}$. Но так как точка пересечения всех графиков единственна и ее абсцисса, как установлено выше, $x=2$, то

$$-\frac{b}{c}=2, \qquad x=\frac{1-a}{c}. \qquad (3)-(4)$$

Из (2), (3) и (4) находим $a=\frac{3}{11}$, $b=-\frac{8}{11}$ и $c=\frac{4}{11}$. Остается убедиться, что при найденных значениях a, b и c, графики функции $f(x)$ и $g(x)$ также пресекаются ровно в одной очке, абсцисса которой $x=2$. Это легко проверить непосредственно.

8.6. Ответ: $\angle A=54^\circ$, $\angle B=126^\circ$, $\angle C=72^\circ$, $\angle D=108^\circ$.

Пусть $CD=AO=a$, $BC=OD=b$ и $\angle BCD=2\alpha$. Тогда по условию $BD=y$, $\angle DCA=\angle ACB=\alpha$. Кроме того, поскольку $BC\|AD$, то $\angle CAD=\angle ACB=\alpha$. Поэтому $\triangle ADC$ — равнобедренный и, значит, $AD=CD=a$. Тогда и $\triangle AOD$ — равнобедренный ($AO=a$ и $AD=a$). Следовательно, $\angle AOD=\angle ADO$. Далее, так как $\angle BOC=\angle AOD$ (как вертикальные углы) и $\angle OBC=\angle ODA$ (как накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD), то $\triangle BOC$ — также равнобедренный и, значит, $OC=BC=b$. Значит, и $\triangle COD$ — равнобедренный ($OC=b$ и $OD=b$). Поэтому $\angle ODC=\angle OCD=\alpha$. Тогда в $\triangle COD$ внешний угол $\angle BOC=\angle OCD+\angle ODC=\alpha+\alpha=2\alpha$ и, значит, $\angle OBC=\angle BOC=2\alpha$. В частности, это означает, что $\triangle BCD$ — равнобедренный ($\angle DBC=2\alpha$ и $\angle BC=2\alpha$). Тогда $BD=CD=a=AD$ и поэтому $\triangle ADB$ — также равнобедренный.



В результате, в $\triangle BCD$ сумма углов $\angle BCD+\angle CDB+\angle DBC=2\alpha+\alpha+2\alpha=5\alpha$. Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, получаем $5\alpha=180^\circ$, откуда $\alpha=36^\circ$.

Тогда в трапеции $ABCD$ имеем: $\angle C = 2\alpha = 72^\circ$, $\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. В равнобедренном $\triangle ADB$ находим также, что угол этого треугольника и данной трапеции $\angle A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$. Наконец, $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$.

8.7. Ответ: 17, 20, 23, 26 и 29.

Пусть $(S,\ G,\ P)$ — набор соответственно серебряных, золотых и платиновых слитков у Ромы в какой-то момент. (В начале он равен $(16,\ 15,\ 14)$.) Заметим, что у Бори и Ромы вместе имеется по 30 слитков из каждого из названных металлов. Поэтому в любой момент времени $S \leqslant 30$, $G \leqslant 30$ и $P \leqslant 30$. Далее, так в результате обмена, каждый из олигархов два слитка отдает и два слитка получает, то общее число слитков у каждого из олигархов в результате обменов не меняется и, значит, $S+G+P = 16+15+14 = 45$. Следовательно, если в какой-то момент у Ромы нет золотых слитков, т.е. $G = 0$, а, как отмечено выше, всегда $S \leqslant 30$, то в этот момент число платиновых слитков у него $P \geqslant 45 - 30 = 15$. Итак, если у Ромы нет золотых слитков, то число платиновых слитков P у него в этот момент таково, что $15 \leqslant P \leqslant 30$.

Выясним, как может изменяться разность между числом золотых слитков. Операция обмена, указанная в условии задачи, означает, что если до обмена у Ромы был набор слитков $(S,\ G,\ P)$, то после обмена получится какой-то из следующих наборов:

1) $(S+2,\ G-1,\ P-1)$, 2) $(S-2,\ G+1,\ P+1)$, 3) $(S-1,\ G+2,\ P-1)$,
4) $(S+1,\ G-2,\ P+1)$, 5) $(S-1,\ G-1,\ P+2)$, 6) $(S+1,\ G+1,\ P-2)$.

Видим, что разность $G-P$ в случаях 1) и 2) не меняется, в случаях 3) и 6) она увеличивается на 3, а в случаях 4) и 5) уменьшается на 3, т.е. $G-P$ может меняться в результате одного обмена только на 3. А так как в начале $G - P = 15 - 14 = 1$, то после любого количества обменов $G - P \equiv 1 \pmod 3$. При $G = 0$, получим $-P \equiv 1 \pmod 3$, или $P \equiv 2 \pmod 3$, т.е. P имеет остаток 2 при делении на 3. Среди чисел от 15 до 30 остаток 2 при делении на 3 имеют только числа 17, 20, 23, 26 и 29. Поэтому число платиновых слитков у Ромы в момент, когда у него не было золотых слитков, не могло быть другим, кроме указанных пяти чисел. С другой стороны, названные числа слитков у него могли получиться. Покажем, как.

Прежде всего, если Рома 7 раз подряд передаст Боре по 2 золотых слитка, то у него исходный набор слитков $(16,\ 15,\ 14)$ преобразуется в набор $(23,\ 1,\ 21)$. Далее, первая таблица показывает, как получить наименьшее возможное число 17 платиновых слитков, а вторая таблица — наибольшее возможное число 29 платиновых слитков.

S	23	21	22	23	24	25	26	27	28
G	1	2	0	1	2	0	1	2	0
P	21	22	**23**	21	19	**20**	18	16	**17**

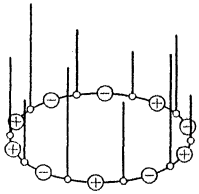
S	23	21	22	20	18	19	17	15	16
G	1	2	0	1	2	0	1	2	0
P	21	22	**23**	24	25	**26**	27	28	**29**

В этих таблицах видим, что 20, 23 и 26 ~~монет~~ слитков у Ромы тоже могло быть.

8.8. *Первое решение.* Рассмотрим любую расстановку мальчиков по кругу. Поставим между каждыми двумя соседними мальчиками знак „+“ или „−“ по следующему правилу: будем двигаться по кругу по ходу часовой стрелки, начав с какого-нибудь мальчика, и ставить перед очередным мальчиком знак „+“, если он выше предыдущего, и знак „−“, если он ниже (см. рис.). Расстановку знаков прекращаем, как только мы дойдём до мальчика, с которого её начали.

Вследствие такой расстановки знаков между мальчиками ясно, что мальчик будет средним, если и только если с обеих его сторон стоят одинаковые знаки: либо оба „+“, либо оба „−“.

Предположим, что в некоторой расстановке мальчиков по кругу не нашлось ни одного



среднего мальчика. Тогда в этой расстановке слева и справа от каждого мальчика стоят разные знаки. Следовательно, знаки „ + “ и „ − “ чередуются и поэтому их чётное число. С другой стороны, количество расставленных знаков равно количеству мальчиков, стоящих по кругу, т. е. равно N. Значит, число N должно быть чётным, но это противоречит условию. Поэтому сделанное предположение неверно, и в любой расстановке по кругу нечётного числа мальчиков найдётся хотя бы один средний мальчик.

Второе решение. Предположим, что в некоторой расстановке мальчиков по кругу не нашлось ни одного среднего мальчика. Рассмотрим эту расстановку.

Начав с какого-либо мальчика и двигаясь, например, по ходу часовой стрелки, пронумеруем мальчиков последовательно числами от 1 до N. Назовём мальчика высоким, если он выше обоих своих соседей, и низким, если он ниже обоих своих соседей.

Так как в нашей расстановке мальчиков по кругу нет ни одного среднего мальчика, то каждый мальчик является либо высоким, либо низким. Рассмотрим любых двух соседних мальчиков. Тот из них, который ниже, не может быть высоким, так как он ниже по крайней мере одного из своих соседей. Значит, он является низким. Тот мальчик, который выше, не может быть низким, так как он выше по крайней мере одного из своих соседей. Значит, он является высоким. Таким образом, из любых двух соседних мальчиков один является низким, а другой — высоким.

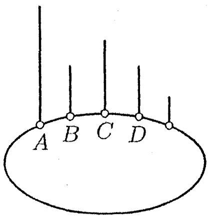
Следовательно, низкие и высокие мальчики чередуются, и мальчики с номерами 1, 3, 5, ... либо все низкие, либо все высокие. Так как N нечётно, то мальчик с номером N тоже среди них. Поэтому мальчики с номерами 1 и N либо оба низкие, либо оба высокие. Но этого по доказанному быть не может, так как мальчики с номерами 1 и N являются соседними. Значит, сделанное предположение неверно, и в любой расстановке мальчиков по кругу должен быть хотя бы один средний мальчик.

Третье решение. Докажем утверждение задачи методом математической индукции по числу N мальчиков (N нечётно, $N \geqslant 3$).

База индукции $N = 3$. Как бы ни стали 3 мальчика по кругу, среди них есть средний — это тот, который не самый высокий и не самый низкий из них.

Допустим, что утверждение задачи справедливо для некоторого нечётного $N = k$, т. е. как бы ни стали k мальчиков по кругу, среди них найдётся средний мальчик.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k + 2$. Рассмотрим $k + 2$ мальчика. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторая расстановка этих $k + 2$ мальчиков по кругу. Если в $\mathcal{R}$ есть средний мальчик, то доказывать нечего. Предположим, что средних мальчиков в расстановке $\mathcal{R}$ нет. Пусть A — это самый высокий из $k + 2$ мальчиков и, если двигаться по ходу часовой стрелки, то пусть соседом A является мальчик B, соседом B — мальчик C, а соседом C — мальчик D (см. рис.). Ясно, что B ниже C (иначе B был бы средним, что по предположению не так). Временно удалим мальчиков B и C из расстановки $\mathcal{R}$ — получится расстановка $\mathcal{R}^*$ из k мальчиков. По предположению индукции в расстановке $\mathcal{R}^*$ есть средний мальчик. Им может быть только мальчик D.



Вернём теперь мальчиков B и C на свои места. Видим, что C не может быть выше D (иначе D был бы средним и в расстановке $\mathcal{R}$). Но тогда, поскольку B ниже C, а C ниже, как доказано, D, мальчик C является средним в расстановке $\mathcal{R}$. Противоречие. Следовательно, сделанное предположение неверно, и в расстановке $\mathcal{R}$ есть средний мальчик.

9 класс

9.5. Ответ: -1.

Из условия имеем

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=-\frac{1}{abcd} \quad\Longrightarrow\quad bcd+cda+dab+abc=-1.$$

Поэтому

$$-1=bcd+cda+dab+abc=(bcd+cda)+(dab+abc)=cd(b+a)+ab(c+d)=$$

$$=\left[\,a+b+c+d=0\ \Rightarrow a+b=-(c+d)\right]=ab(c+d)-cd(c+d)=(ab-cd)(c+d).$$

Следовательно, $(ab-cd)(c+d)=-1$ при всех допустимых значениях $a,\ b,\ c,\ d$.

9.6. Ответ: $a=1,\ b=3,\ c=5$ и $n=1$.

Согласно условию $a=b-2$ и $c=b+2$, где нечётное $b\geqslant 3$. Поэтому число $A_n=$ $=a^n+b^n+c^n=(b-2)^n+b^n+(b+2)^n$. Раскрывая скобки в произведении $(b-2)^n$ и не приводя подобные члены, получим 2^n слагаемых, все из которых, кроме одного, содержат множителем число b, а одно слагаемое равно $\underbrace{(-2)\cdot\ldots\cdot(-2)}_{n\text{ раз}}$ и, значит, равно -2^n, поскольку n нечётное. Поэтому $(b-2)^n=bp_1-2^n$, где p_1 — целое. Точно так же, $(b+2)^n=bp_2+2^n$, где p_2 — целое. Следовательно, число $A_n=bp_1-2^n+bp_2+2^n=b(p_1+p_2)$ делится на b. Так как число $B=a^{b+2}+b^{c+2}+c^{a+2}$ по условию делится на A_n, а A_n, как доказано, делится на b, то число B также делится на b. Число $B=(b-2)^{b+2}+b^{b+4}+(b+2)^{b}$. Как и выше, раскрывая скобки в произведении $(b-2)^{b+2}$ и не приводя подобные члены, получим 2^{b+2} слагаемых, все из которых, кроме одного, содержат множителем b, а одно слагаемое равно $\underbrace{(-2)\cdot\ldots\cdot(-2)}_{b+2\text{ раз}}$ и, значит, равно -2^{b+2},

не

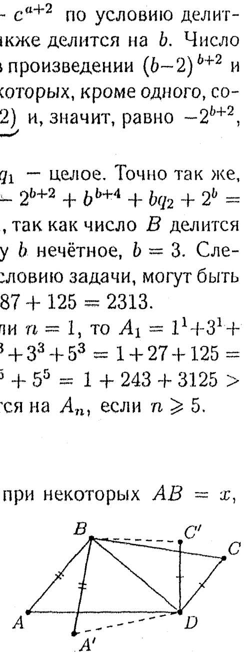
поскольку b чётное. Поэтому $(b-2)^{b+2}=bq_1-2^{b+2}$, где q_1 — целое. Точно так же, $(b+2)^b=bq_2+2^b$, где q_2 — целое. Поэтому число $B=bq_1-2^{b+2}+b^{b+4}+bq_2+2^b=bq+2^b(1-2^2)=bq-3\cdot 2^b$, где q — целое. Из этого равенства, так как число B делится на b, заключаем, что $-3\cdot 2^b$ делится на b. Значит, поскольку b нечётное, $b=3$. Следовательно, числами $a,\ b,\ c$, которые могут удовлетворять условию задачи, могут быть только числа $1,\ 3,\ 5$. Тогда число $B=1^5+3^7+5^3=1+2187+125=2313$.

Найдём те нечётные n, при которых B делится на A_n. Если $n=1$, то $A_1=1^1+3^1+5^1=9$, а значит, B делится на A_1. При $n=3$ имеем $A_3=1^3+3^3+5^3=1+27+125=153$, и B не делится на A_3. Если же $n=5$, то $A_5=1^5+3^5+5^5=1+243+3125>2313=B$. Поэтому $A_n>B$ при $n\geqslant 5$, а значит, B не делится на A_n, если $n\geqslant 5$.

Таким образом, $a=1,\ b=3,\ c=5$ и $n=1$.

9.7. Ответ: $S(ABCD)=L^2/8$.

Пусть площадь четырехугольника $ABCD$ максимальна при некоторых $AB=x$, $BD=y,\ CD=z,\ x+y+z=L$. Поскольку



$$S(ABCD)=S(ABD)+S(DBC)=$$

BDC

$$=\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABD+\frac{1}{2}BD\cdot BC\sin\angle \cancel{BCD},$$

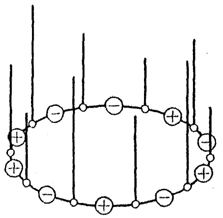
то площадь четырехугольника при фиксированных x, y, z максимальна при $\angle ABD = \angle \cancel{CBD} = 90°$. Следовательно,

CDB

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yz = \frac{1}{2}y(x+z) = \bigl[x+y+z = L \Rightarrow x+z = L-y\bigr] = \frac{1}{2}y(L-y).$$

Максимальное значение произведения $y(L-y)$ при $0 < y < L$, очевидно достигается при $y = L/2$, и равно $L^2/4$. Таким образом, максимальное значение площади четырехугольника $ABCD$ при заданной сумме сторон AB, CD и диагонали BD, $AB + BD + DC = L$, равно $L^2/8$.

9.8. *Первое решение.* Поставим между каждыми двумя соседними мальчиками знак „ + “ или „ – “ по следующему правилу: будем двигаться по кругу по ходу часовой стрелки, начав с какого-нибудь мальчика, и ставить перед очередным мальчиком знак „ + “, если он выше предыдущего, и знак „ – “, если он ниже (см. рис.). Расстановку знаков прекращаем, как только мы дойдём до мальчика, с которого её начали. Вследствие такой расстановки знаков между мальчиками ясно, что мальчик является высоким, если и только если перед ним стоит знак „ + “, а после него – знак „ – “, и мальчик является низким, если и только если перед ним стоит знак „ – “, а после него – знак „ + “. Таким образом, количество высоких мальчиков равно числу перемен знака с „ + “ на „ – “ при движении по кругу по часовой стрелке, а количество низких мальчиков – числу перемен знака с „ – “ на „ + “. Кроме того, самый высокий из N мальчиков является высоким, значит, среди знаков встречаются как знаки „ + “, так и „ – “.



Разобьём все расставленные знаки на группы, каждая из которых состоит из одного или более подряд идущих одинаковых знаков, так, чтобы группы были максимальными по длине, т. е. так, чтобы перед началом и после конца любой группы знаки менялись на противоположные.

Группы плюсов и группы минусов чередуются. Следовательно, знак „ + “ меняется на знак „ – “, если и только если этот знак „ + “ является последним в некоторой группе плюсов, и поэтому перемен знака с „ + “ на „ – “ столько же, сколько всего групп плюсов. Кроме того, знак „ – “ меняется на знак „ + “, если и только если этот знак „ + “ является последним в какой-нибудь группе плюсов, а значит, и перемен знака с „ – “ на „ + “ столько же, сколько и групп плюсов. Таким образом, перемен знака с „ + “ на „ – “ ровно столько же, сколько и перемен знака с „ – “ на „ + “, следовательно, высоких мальчиков столько же, сколько и низких.

Второе решение. Заметим, что самый высокий из мальчиков, стоящих по кругу, является высоким, а самый низкий из мальчиков, стоящих по кругу, является низким. Значит, среди мальчиков найдётся хотя бы один высокий и хотя бы один низкий.

Будем двигаться по часовой стрелке, начиная с любого высокого мальчика, пока не встретим следующего высокого мальчика (не исключено, что того, с которого начали). Рассмотрим самого низкого из мальчиков, которые при этом нам встретились. Этот мальчик не является ни первым, ни последним из встретившихся нам мальчиков, так как и первый, и последний из них являются высокими. Следовательно, оба соседа самого низкого из встретившихся нам мальчиков выше него, а значит, он является низким.

Теперь докажем, что низких мальчиков не меньше, чем высоких. Будем двигаться по часовой стрелке, начиная с любого высокого мальчика. Между любыми двумя высокими мальчиками нам, как доказано, встретится хотя бы один низкий. Значит, низких мальчиков не меньше, чем высоких.

Аналогично доказывается, что высоких мальчиков не меньше, чем низких.

Так как низких мальчиков не меньше, чем высоких, и высоких мальчиков не меньше, чем низких, то количество высоких мальчиков равно количеству низких мальчиков.

Третье решение. Назовём мальчика средним в расстановке, если в ней он не является ни высоким, ни низким. Докажем утверждение задачи методом математической индукции по числу N мальчиков.

База индукции $N = 3$. Как бы ни стали 3 мальчика по кругу, среди них есть ровно один высокий и ровно один низкий — это, соответственно, самый высокий и самый низкий из этих трёх мальчиков.

Допустим, что утверждение задачи справедливо для некоторого $N = k$, т. е. как бы ни стали k мальчиков по кругу, среди них число высоких мальчиков равно числу низких.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k + 1$. Рассмотрим $k + 1$ мальчиков. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторая расстановка этих $k + 1$ мальчиков по кругу. Пусть A — это самый высокий из $k + 1$ мальчиков, а мальчики B и C — его соседи

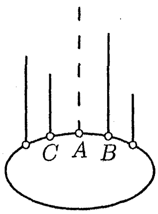


Рис. 1

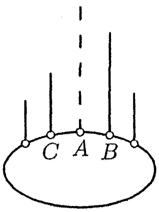


Рис. 2

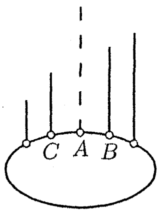


Рис. 3

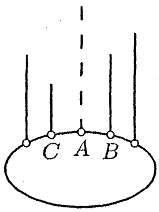


Рис. 4

в расстановке $\mathcal{R}$. Временно удалим мальчика A из расстановки $\mathcal{R}$ — получится расстановка $\mathcal{R}^*$ из k мальчиков. Согласно предположению индукции в расстановке $\mathcal{R}^*$ высоких и низких мальчиков поровну. В расстановке $\mathcal{R}^*$ среди мальчиков B и C не более одного высокого. Если высокий ровно один (пусть это B), то возвращение A на своё прежнее место сделает B в расстановке $\mathcal{R}^*$ средним, а C останется низким, если он был низким в $\mathcal{R}^*$, и средним, если он в расстановке $\mathcal{R}^*$ был средним (см. рис. 1 и рис. 2 соответственно). Если же в расстановке $\mathcal{R}^*$ среди мальчиков B и C высокого нет, то в этой расстановке мальчики B и C либо 1) оба они средние, либо 2) один из них низкий, а другой средний. Возвращение A на своё прежнее место в случае 1) сделает одного из мальчиков B и C низким, а другой останется средним, а в случае 2) оба станут низкими (см. рис. 3 и рис. 4 соответственно). В любом случае число высоких и число низких мальчиков увеличиваются на 1 и остаются равными.

10 класс

10.5. Абсцисса x_i, любой точки пересечения данных парабол удовлетворяет системе двух уравнений $y_i = x_i^2 - a$, $x_i = y_i^2 - b$, $i = 1, 2, 3, 4$. Поэтому $x_i = (x_i^2 - a)^2 - b$, откуда

$$x_i^4 - 2ax_i^2 - x_i + a^2 - b.$$

Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = 1$. Следовательно,

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = [x_1 + x_4 = -(x_2 + x_3)] =$$

$$= -(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = -(x_1^2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3)(x_2 + x_3) =$$

$$= -(x_1^2x_2 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3^2) =$$

$$= -((x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + (x_1^2x_3 + x_1x_3^2) + (x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 2x_1x_2x_3) =$$

$$= -(x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3) =$$

$$= [x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4),\ x_1 + x_3 = -(x_2 + x_4),\ x_2 + x_3 = -(x_1 + x_2)] =$$

$$= -(-x_1x_2(x_3 + x_4) - x_1x_3(x_2 + x_4) - x_2x_3(x_1 + x_4) + 2x_1x_2x_3) =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_2 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3 =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1,$$

что и требовалось доказать.

10.6. Ответ: б) $n = \dfrac{k^2+3}{4}$, где k нечётно.

а) *Первое решение.* Обозначим $t = a - b$, т. е. $a = b + t$. Тогда равенство $n^2+1 = ab$ перепишется в виде $n^2 + 1 = (b + t)b$, или $b^2 + tb - (n^2 + 1) = 0$.

Заменив в последнем равенстве число b на переменную x, рассмотрим квадратное относительно x уравнение

$$x^2 + tx - (n^2 + 1) = 0. \qquad (*)$$

Квадратное уравнение $(*)$ имеет целые коэффициенты и целый корень $x = b$. Значит, его дискриминант $D = t^2 + 4(n^2 + 1)$ — квадрат натурального числа. Так как $t^2 + 4(n^2 + 1) > (2n)^2$, то, следовательно, $D \geqslant (2n + 1)^2$. Поэтому $t^2 + 4(n^2 + 1) \geqslant (2n + 1)^2$, или $t^2 \geqslant 4n - 3$, откуда $t \geqslant \sqrt{4n - 3}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Допустим противное: $a - b < \sqrt{4n - 3}$. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, получим $a^2 - 2ab + b^2 < 4n - 3$, или, прибавляя к левой части этого неравенства $4ab$, а к правой — равную $4ab$ величину $4(n^2 + 1)$, придём к неравенству

$$(a + b)^2 < 4n - 3 + 4(n^2 + 1) = (2n + 1)^2. \qquad (1)$$

С другой стороны, по неравенству Коши $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{n^2 + 1}$. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, получим неравенство

$$(a + b)^2 \geqslant 4(n^2 + 1) > (2n)^2. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) видим, что квадрат $(a + b)^2$ натурального числа сам находится строго между квадратами двух последовательных натуральных чисел, а значит, не может быть квадратом натурального числа. Противоречие. Следовательно, $a - b \geqslant \sqrt{4n - 3}$.

б) Докажем сначала, что если $n^2 + 1 = ab$, где n, a, b — натуральные числа и разность $a - b = \sqrt{4n - 3}$, то $n = \dfrac{k^2+3}{4}$, где k нечётно. Действительно, так как a и b — натуральные, то и их разность, равная $\sqrt{4n - 3}$, должна быть натуральным числом. Следовательно, $4n - 3 = k^2$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку число $4n - 3$ нечётно, то k также нечётно. Выражая из последнего равенства n, получим $n = \dfrac{k^2+3}{4}$. Число n является натуральным, поскольку k нечётно, а квадраты нечётных натуральных чисел при делении на 4 дают остаток 1.

Обратно, докажем, что для любого $n = \dfrac{k^2+3}{4}$, где k нечётное, имеется разложение $n^2+1 = ab$ числа n^2+1 на такие натуральные множители $a > b$, для которых $a - b = \sqrt{4n-3} = k$.

Для нахождения a и $-b$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a + (-b) = k, \\ a \cdot (-b) = -(n^2+1). \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа a и $-b$ — корни квадратного относительно x уравнения $x^2 - kx - (n^2+1) = 0$. Корни этого уравнения

$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4(n^2+1)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{4n-3+4(n^2+1)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{(2n+1)^2}}{2} = \frac{k \pm (2n+1)}{2}.$$

Поскольку $a > 0$ и $-b < 0$, то

$$a = \frac{k+(2n+1)}{2} \quad \text{и} \quad -b = \frac{k-(2n+1)}{2}. \qquad (*)$$

Так как k нечётно, то числа a и $-b$ целые.

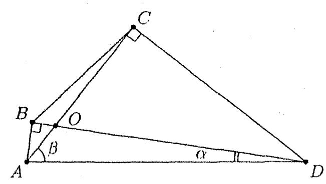
Из равенств $(*)$ очевидно, что $a - b = k$. Поэтому остаётся только проверить, что $ab = \; = n^2+1$. В самом деле,

$$a \cdot b = \frac{k+(2n+1)}{2} \cdot \frac{-k+(2n+1)}{2} = \frac{(2n+1)^2-k^2}{4} =$$

$$= \frac{(4n^2+4n+1)-(4n-3)}{4} = \frac{4n^2+4}{4} = n^2+1.$$

10.7. Ответ: $30\sqrt{3}$.

Не сложно показать, что если четырехугольник с тремя заданными сторонами имеет максимально возможную площадь, то он будет выпуклым. Пусть заданы стороны AB, BC, CD четырехугольника $ABCD$ и он имеет максимальную площадь. Поскольку $S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD)$ и $S(ABD) = 0{,}5 \cdot AB \cdot BD \sin\angle ABD$, то при $\angle ABD \neq 90^\circ$ существовал бы четырехугольник с заданными сторонами, площадь которого была бы больше. Следовательно, $AB \perp BD$. Аналогично, $CD \perp AC$. Поэтому прямые углы ABD и ACD опираются на общий отрезок AD, и, следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметром которой является сторона AC.



Пусть $\angle CAD = \beta$, $\angle BDA = \alpha$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = x$, $BD = y$, $AD = z$. Тогда

$$a = z\sin\alpha,\ c = z\sin\beta,\ x = z\cos\beta,\ y = z\cos\alpha,$$

$$b = z\sin\angle CDA = z\sin(90^\circ - \beta - \alpha) = z\cos(\beta+\alpha) = z(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha).$$

Нетрудно заметить, что $bz+ac = xy$. (Отметим, что это равенство непосредственно следует также из теоремы Птолемея.) С другой стороны, применяя теорему Пифагора для прямоугольных треугольников ABD и ACD, получим $ac + zb = \sqrt{(z^2 - c^2)(z^2 - a^2)}$. Поэтому $z^4-(a^2+b^2+c^2)z^2-2abcz = 0$, и так как $z \neq 0$, то $z^3-(a^2+b^2+c^2)z-2abc = 0$.

Заметим, что значение z не зависит от того какие значения принимают длины сторон AB, BC и CD, поэтому не нарушая общности, считаем $a = 2$, $b = 7$, $c = 11$. Подставляя числовые значения, получаем уравнение

$$z^3 - 174z - 308 = 0. \qquad (1)$$

Подбором находим один корень этого уравнения: $z = 14$. Два остальных корня уравнения (1) – отрицательные числа.

Применяя теорему синусов к треугольнику BCD, получаем $7 = b = z\sin\angle BDC = 14\sin\angle BDC$, откуда $\sin\angle BDC = 1/2$, т.е. $\angle BDC = 30°$. Поэтому угол между диагоналями AC и BD равен $\angle COD = 90° - \angle BDC = 90° - 30° = 60°$. Используя числовые данные, находим

$$AC = x = \sqrt{z^2 - c^2} = \sqrt{196 - 121} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3},$$

$$BD = y = \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{196 - 4} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$S(ABCD) = 0,5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle COD = 0,5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 30\sqrt{3}.$$

10.8. Ответ : любое целое число от 1 до $[N/2]$ включительно.

Первое решение. Пусть N мальчиков, никакие два из которых не равны по росту, выстроились по кругу. Без нарушения общности считаем, что все они стоят лицом к центру — тогда каждый мальчик является соседом справа только у одного мальчика.

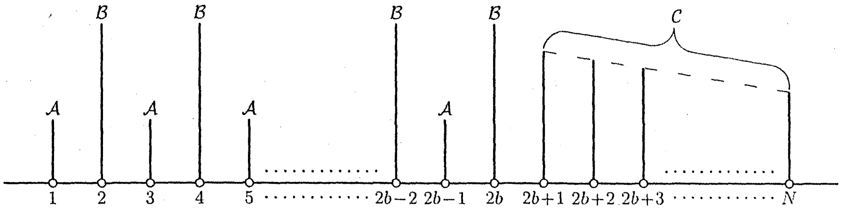
Если некоторый мальчик m является высоким в данной расстановке по кругу, то оба его соседа высокими в этой расстановке не являются: их сосед m выше (точнее, длиннее) их. В частности, у мальчика m его сосед справа не является высоким. Отметим всех высоких мальчиков в данной расстановке и объединим в одну пару каждого высокого мальчика и его соседа справа. Ясно, что никакой мальчик не входит в две такие пары. Следовательно, количество пар не превосходит $[N/2]$, а так как в каждой паре ровно один высокий мальчик, то в расстановке высоких мальчиков не более $[N/2]$ (здесь $[\ldots]$ – целая часть числа). Несколько короче, это можно было бы доказать методом от противного: если бы среди N мальчиков высоких было больше чем $[N/2]$, то какие-то два высоких мальчика были бы соседями, а значит, один из них не мог бы быть высоким.

С другой стороны, в любой расстановке всегда есть хотя бы один высокий мальчик — это самый высокий из N мальчиков. Итак, в любой расстановке N мальчиков по кругу число b высоких мальчиков не менее одного и не более $[N/2]$.

Остаётся для любого натурального b из отрезка $\left[1, [N/2]\right]$ привести пример такой расстановки N мальчиков по кругу, в которой ровно b высоких мальчиков.

Перенумеруем мальчиков в порядке возрастания их роста: $1, 2, 3, \ldots, N$. Фиксируем какое-либо натуральное $b \in \left[1, [N/2]\right]$. Разобьём N мальчиков на три группы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$: группа $\mathcal{A}$ состоит из b мальчиков самого низкого роста, т. е. из мальчиков $1, 2, \ldots, b$; группа $\mathcal{B}$ состоит из b мальчиков самого высокого роста, т. е. из мальчиков $N-b+1$, $N-b+2$, $\ldots$, N (так как $b \leqslant [N/2]$, т. е. $2b \leqslant N$, то группы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ организовать можно); наконец, группа $\mathcal{C}$ состоит из всех остальных мальчиков, т. е. из мальчиков $b+1$, $\ldots$, $N-b$ (если N чётно и $b = N/2$, то группа $\mathcal{C}$ окажется пустой).

Места, на которые можно ставить мальчиков по кругу, также пронумеруем, начав с какого-либо места, подряд по ходу часовой стрелки: $1, 2, \ldots, N$. Поставим на первые b нечётных мест (т. е. на места с номерами $2k-1$, где $k = 1, \ldots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{A}$ в каком-либо порядке, а на первые b чётных мест (т. е. на места с номерами $2k$, где $k = \ = 1, \ldots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{B}$ в каком-либо порядке, и на оставшиеся места $2b+1, \ldots, N$ поставим мальчиков из группы $\mathcal{C}$ в порядке убывания их роста (т. е. на место с номером $2b+1$ станет мальчик $N-b, \ldots$, на место с номером N — мальчик $b+1$). В такой расстановке будет ровно b высоких мальчиков — ими будут в точности все мальчики из группы $\mathcal{B}$. В самом деле, никакой мальчик из группы $\mathcal{A}$ или группы $\mathcal{C}$ не является в этой расстановке высоким: по построению хотя бы один его сосед (а для мальчика из $\mathcal{A}$ оба его соседа) выше его. Мальчики же из группы $\mathcal{B}$ — все высокие в этой расстановке: их соседи — это мальчики из групп $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$, а они ниже ростом.



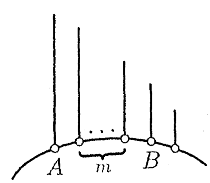
Чтобы проиллюстрировать на рисунке описанную выше расстановку мальчиков, разорвём для наглядности окружность, вдоль которой стоят мальчики, между местами 1 и N и распрямим её (вместе со стоящими на ней мальчиками) в отрезок — см. рисунок, на котором числа числа под горизонтальным отрезком (бывшим ранее окружностью) — номера мест, на которых стоят мальчики, вертикальные отрезки схематично показывают их относительный рост, а буквы над этими отрезками — группу, которой принадлежит мальчик.

Второе решение. Вначале индукцией по числу $N \geqslant 3$ докажем, что в любой расстановке N мальчиков по кругу не более $[N/2]$ высоких.

База индукции $N = 3$ и $N = 4$ очевидна.

Предположим, что сформулированное утверждение справедливо для всех $N = 3, \ldots, k$, т. е. в любой расстановке l мальчиков, где $3 \leqslant l \leqslant k$, по кругу не более $[l/2]$ высоких.

Докажем, что утверждение верно и для $N = k+1$. Рассмотрим какую-либо расстановку $\mathcal{R}$ этих $k+1$ мальчиков по кругу. Если в ней нет высокого или высокий только один, то доказывать нечего. Пусть поэтому в расстановке $\mathcal{R}$ число высоких мальчиков $b \geqslant 2$. Рассмотрим какого-либо высокого в расстановке $\mathcal{R}$ мальчика A, и пусть B — первый следующий за ним по ходу часовой стрелки высокий мальчик в этой расстановке. Без нарушения общности считаем, что A выше B. Пусть между мальчиками A и B, если двигаться по ходу часовой стрелки,



располагаются m мальчиков. Ясно, что $m \geqslant 1$. Ни один из этих m мальчиков не является высоким в расстановке $\mathcal{R}$ (A и B — ближайшие по ходу часовой стрелки высокие мальчики в $\mathcal{R}$). Удалим из расстановки $\mathcal{R}$ этих m мальчиков и мальчика B — получим новую расстановку $\mathcal{R}^*$, в которой не более $(k+1)-(m+1) = k-m \leqslant k-1$ мальчиков. Из удалённых мальчиков в расстановке $\mathcal{R}$ только один являлся высоким

— это мальчик B. В получившейся расстановке $\mathcal{R}^*$ статус оставшихся мальчиков, как легко видеть, не изменится: A останется высоким, а не удалённый сосед мальчика B (поскольку A выше B и B был высоким) не будет высоким и в расстановке $\mathcal{R}^*$. Стало быть, в расстановке $\mathcal{R}^*$ высоких мальчиков будет на одного меньше, чем в расстановке $\mathcal{R}$, т. е. их будет $b-1$. В силу предположения индукции $b-1 \leqslant [(k-1)/2]$, а значит, $b \leqslant [(k-1)/2]+1 = [(k+1)/2]$. Утверждение доказано.

С другой стороны, в любой расстановке всегда есть хотя бы один высокий мальчик — это самый высокий из N мальчиков. Итак, в любой расстановке N мальчиков по кругу число b высоких мальчиков не менее одного и не более $[N/2]$.

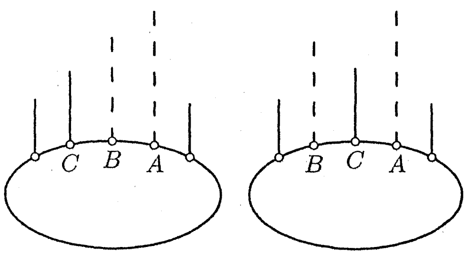
Теперь методом математической индукции по числу N мальчиков покажем, что для любого натурального $b \in \big[1, [N/2]\big]$ найдётся такая расстановка N мальчиков по кругу, в которой ровно b высоких мальчиков.

База индукции $N=3$ и $N=4$ очевидна.

Допустим, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого $N=k$, т. е. какое бы натуральное число $b \in \big[1, [k/2]\big]$ ни взять, найдётся такая расстановка k мальчиков, в которой ровно b высоких.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k+2$. Зафиксируем любое натуральное b из отрезка $\big[1, [(k+2)/2]\big]$. Могут представиться только две возможности: либо **а)** $b \in \big[1, [k/2]\big]$, либо **б)** $b = [k/2]+1$. Пусть A — самый высокий из $k+2$ мальчиков, а B — следующий за ним по росту. Временно удалим этих двух мальчиков — останутся k мальчиков.

В случае **а)** рассмотрим какую-либо такую существующую по предположению индукции расстановку оставшихся k мальчиков, в которой ровно b высоких. Выберем в



этой расстановке какого-нибудь высокого мальчика (обозначим его C) и поставим рядом с ним с одной стороны от него мальчиков A и B (см. рис. 1). Легко видеть, что в получившейся расстановке $k+2$ мальчиков число высоких мальчиков не изменится, т. е. равно b. В случае **б)** рассмотрим какую-либо такую существующую по предположению индукции расстановку оставшихся k мальчиков, в которой ровно $[k/2]$ высоких. Выберем в этой расстановке какого-нибудь высокого мальчика (обозначим его C) и поставим рядом с ним с одной стороны от него мальчика A, а с другой — мальчика B (см. рис. 2). В получившейся расстановке $k+2$ мальчиков мальчик C не будет высоким, мальчики A и B будут высокими, а из остальных мальчиков высокими будут те же мальчики, которые были высокими и в выбранной расстановке k мальчиков. Стало быть, в полученной расстановке высоких мальчиков будет ровно $[k/2]+1$.

11 класс

11.5. б) Ответ: $S = 27/4$.

Найдем координаты $(x_T; y_T)$ точки пересечения графиков параболы $y = ax^2$ и гиперболы $y = 1/x$. Имеем $ax_T^2 = 1/x_T$, откуда $x_T = 1/\sqrt[3]{a} = t$ и $y_T = 1/x_T = t$. Уравнение касательной к графику параболы в точке $P(x_P; y_P)$ имеет вид $y - y_P = 2a(x - x_P)$, x_P а уравнение касательной к графику гиперболы в точке $Q(x_Q; y_Q)$ имеет вид $y - y_Q = (-1/x_Q^2)(x - x_Q)$. Так как эта касательная является общей для обоих графиков, то

$$2ax_P = -1/x_Q^2, \qquad (1)$$

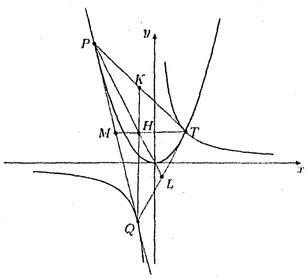
$$-2ax_P^2 + y_P = 1/x_Q + y_Q.$$

Так как $y_P = ax_P^2$ и $y_Q = 1/x_Q$, то полученное равенство примет вид

$$-ax_P^2 = 2/x_Q. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), находим $x_Q = -1/(2t)$, $x_P = -2/t$, и тогда $y_Q = -2t$, $y_P = 4t$. Таким образом

$$T(\frac{1}{t}; t), \quad P(-\frac{2}{t}; 4t), \quad Q(-\frac{1}{2t}; -2t). \qquad (3)$$



Пусть M, K, L — середины сторон PQ, PT, TQ соответственно. Тогда

$$M(-\frac{5}{4t}; t), \quad K(-\frac{1}{2t}; \frac{5}{2}t); \quad L(\frac{1}{4t}; -\frac{t}{2}).$$

Сравнивая полученные значения с (3), замечаем, что отрезок MT параллелен оси Ox, так как $y_M = y_T$, а отрезок QK параллелен оси Oy, так как $y_Q = y_K$. Следовательно медианы MT и QK в треугольнике PQT перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Пусть H — точка пересечения медиан треугольника PQT. Тогда

$$S(PQT) = 2S(QKT) = [TH \perp QK] = 2 \cdot \frac{1}{2} QK \cdot TH = [TH = \frac{2}{3}MT] = \frac{2}{3} QK \cdot TM.$$

Поскольку $TM \parallel Ox$, то $TM = 1/t - (-5/(4t)) = 9/(4t)$, Аналогично, так как $QK \parallel Oy$, то $QK = 5t/2 - (-2t) = 9t/2$. Таким образом,

$$S(PQT) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4t} \cdot \frac{9t}{2} = \frac{27}{4}.$$

11.6. Ответ: $\sqrt{5}$.

Так как квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ по условию имеет корни, то его дискриминант $D = p^2 - 4q$ неотрицателен. Поскольку $p^2 = 4q + D$ и по условию p и q — целые, а квадрат целого числа при делении на 4 не может давать остатки 2 и 3, то $D \neq 2$ и $D \neq 3$.

Чтобы ещё ограничить возможные значения D, воспользуемся тем, что по условию квадратный трёхчлен x^2+px+q иррационален. Корни этого трёхчлена

$$\alpha_1 = 2^{-1}\left(-p-\sqrt{D}\,\right) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 2^{-1}\left(-p+\sqrt{D}\,\right). \qquad (*)$$

Для того чтобы α_1 и α_2 были иррациональны, необходимо и достаточно, чтобы D был отличен от квадрата целого числа. Значит, в частности, $D \neq 0$, $D \neq 1$ и $D \neq 4$. Эти неравенства вместе с двумя полученными выше неравенствами дают для дискриминанта D иррационального трёхчлена оценку: $D \geqslant 5$.

Так как корни α_1 и α_2 иррационального трёхчлена отличны от нуля, то для них могут представиться только две возможности: они либо 1) одного знака, либо 2) разных знаков. Рассмотрим отдельно каждую из этих возможностей.

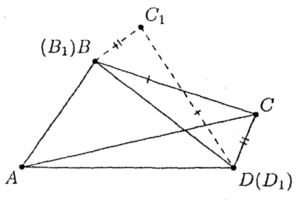
В случае 1) по теореме Виета $q = \alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$. Поэтому в этом случае $q \geqslant 1$. В случае 1) из $(*)$ получаем: $|\alpha_1| + |\alpha_2| = |p|$. Поскольку, как показано выше, $D \geqslant 5$, то $p^2 = 4q + D \geqslant\ \geqslant 4 \cdot 1 + 5 = 9$, т. е. $|p| \geqslant 3$. Итак, в случае 1) сумма $|\alpha_1| + |\alpha_2| \geqslant 3$.

В случае 2) из $(*)$ получаем: $|\alpha_1| + |\alpha_2| = \sqrt{D} \geqslant \sqrt{5}$. Так как оценка, полученная в случае 2), меньше оценки, полученной в случае 1), т. е. $\sqrt{5} < 3$, то для того чтобы утверждать, что $\sqrt{5}$ — искомое наименьшее значение, достаточно показать, что оценка $\sqrt{5}$ в случае 2) достижима. Другими словами, достаточно в случае 2) найти хотя бы один иррациональный квадратный трёхчлен с $D = 5$. Найдём все такие иррациональные трёхчлены. По теореме Виета корни α_1 и α_2 будут разных знаков, если и только если $q = \alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0$, т. е. случай 2) имеет место, если и только если $q \leqslant -1$. Если $q = -1$, то $D = 5$ только при $p^2 = 1$, а если $q \leqslant -2$, то $D = p^2 - 4q \geqslant -4q \geqslant -4 \cdot (-2) = 8$. Стало быть, существует ровно два иррациональных квадратных трёхчлена с $D = 5$ и корнями разных знаков — это $x^2 - x - 1$ и $x^2 + x - 1$.

Таким образом, наименьшее значение, которое может принимать сумма модулей корней иррациональных квадратных трёхчленов, равно $\sqrt{5}$.

11.7. Ответ: 12.

Пусть $ABCD$ данный в условии четырехугольник. Построим четырехугольник $AB_1C_1D_1$, равный ему по площади, следующим образом, на диагонали BD построим треугольник $B_1C_1D_1$ равный треугольнику BCD так, что положим $AB_1 = AB$, $AD_1 = AD$, $B_1D_1 = BD$, $D_1C_1 = BC$, $C_1B_1 = CD$ (см. рис.). Если при этом четырехугольник $AB_1C_1D_1$ получится невыпуклым, то нетрудно показать, что аналогичное построение проведенное на диагонали AC даст выпуклый четырехугольник. Заметим, что у вновь построенного четырехугольника будут заданы суммы длин смежных сторон. Таким образом, имеем взаимно однозначное соответствие между выпуклыми четырехугольниками максимальной площади с заданными суммами длин противоположных сторон и выпуклыми четырехугольниками максимальной площади с заданными суммами длин смежных сторон. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что у исходного четырехугольника максимальной площади фиксированы суммы длин смежных сторон.



Лемма. *Треугольник с заданным основанием длиной c и заданной суммой длин двух других его сторон, $a + b = L$, имеет максимальную площадь, если является равнобедренным, т.е. $a = b = L/2$.*

Доказательство. По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Так как по условию полупериметр $p = (c+L)/2$ и сторона c фиксированы, то площадь треугольника максимальна, если произведение $(p-a)(p-b)$ принимает максимальное значение для $0<a<L$, $0<b<L$, $a+b=L$. Имеем

$$(p-a)(p-b)=(p-a)(p-(L-a))=(p-a)(p-L+a)=-a^2+aL+p(p-L)=$$

$$=-(a-L/2)^2+L^2/4+p(p-L).$$

Очевидно, что максимальное значение рассматриваемое произведение принимает при $a=L/2$, что и доказывает лемму.

Из леммы теперь следует, что у рассматриваемого четырехугольника $AB=BC=3$, $AD=DC=4$. Тогда

$$S(ABCD)=S(ABD)+S(BDC)=2S(ABD)=2\cdot0.5\cdot AB\cdot AD\sin\angle BAD=12\sin\angle BAD,$$

а так как по условию его площадь максимальна, то $\angle BAD=90^\circ$ и $S(ABCD)=12$.

11.8. Ответ: любое целое число от 0 до $N-2$ включительно одинаковой чётности с N.

Первое решение. Рассмотрим любую расстановку мальчиков по кругу. Поставим

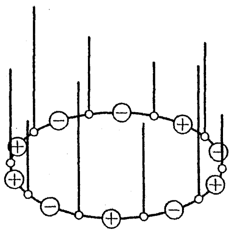


Рис. 1

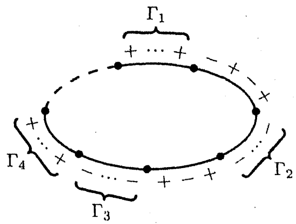


Рис. 2

между каждыми двумя соседними мальчиками знак „ + “ или „ − “ по следующему правилу: будем двигаться по кругу по ходу часовой стрелки, начав с какого-нибудь мальчика, и ставить перед очередным мальчиком знак „ + “, если он выше предыдущего, и знак „ − “, если он ниже (см. рис. 1). Расстановку знаков прекращаем, как только мы дойдём до мальчика, с которого её начали.

Вследствие такой расстановки знаков между мальчиками ясно, что мальчик будет средним, если и только если с обеих его сторон стоят одинаковые знаки: либо оба „ + “, либо оба „ − “.

Если среди расставленных знаков встречается более одного подряд идущих одинаковых знаков, то каждую такую последовательность подряд идущих одинаковых знаков объединим в одну (свою для каждой последовательности) группу, содержащую все знаки этой последовательности (см. рис. 2). Возможно, что таких групп не будет вовсе (рассуждения этот случай не исключают). Пусть в результате мы получили k групп Γ_1, $\ldots$, Γ_k, содержащих соответственно m_1, $\ldots$, m_k знаков ($m_i\geqslant 2$, $l=1,\ldots,k$). Так как средние мальчики — это в точности те мальчики, с обеих сторон от которых стоят одинаковые знаки, то такие мальчики находятся только между знаками каждой из групп Γ_1, $\ldots$, Γ_k, а значит, число s средних мальчиков равно $s=(m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_k-1)=m_1+m_2+\ldots+m_k-k$.

Если некоторая группа Γ_i состоит из „ + “, то с обеих сторон от неё стоит по одному знаку „ − “, а если из „ − “, то с обеих сторон от неё — по одному знаку „ + “ (если бы это было не так, то эти знаки были бы отнесены к группе Γ_i). Пусть m — число знаков, не попавших ни в одну из групп (возможно, $m = 0$). Знаки, стоящие между соседними группами чередуются (если бы это было не так, то какие-то из них образовали бы новую группу, чего быть не может, поскольку $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ — все группы). Поэтому, если мы в каждой группе вытрем все знаки, кроме одного, то получим такую расстановку знаков, в которой знаки „ + “ и „ − “ чередуются, а их число будет $m+k$, и, значит, число $m+k$ чётно.

С другой стороны, $N = m_1+m_2+\ldots+m_k+m$, или $N = (m_1+m_2+\ldots+m_k-k)+ +(m+k)$, т. е. $N = s+(m+k)$. Поскольку число $m+k$, как доказано, чётно, то число s средних мальчиков и число N всех мальчиков имеют одинаковую чётность. Ясно, что $s \leqslant N-2$, поскольку два мальчика — самый высокий и самый низкий из N мальчиков — не могут быть средними ни в какой расстановке. Итак, в любой расстановке N мальчиков по кругу число s средних мальчиков имеет ту же чётность, что и число N, и не превосходит $N-2$.

Остаётся для любого натурального s из отрезка $[0, N-2]$ и такого, что $s \equiv N \pmod 2$, привести пример такой расстановки N мальчиков по кругу, в которой ровно s высоких мальчиков.

Перенумеруем мальчиков в порядке возрастания их роста: $1, 2, 3, \ldots, N$. Фиксируем какое-либо натуральное $s \in [0, N-2]$, такое, что $s \equiv N \pmod 2$. Так как $s \equiv N \pmod 2$ и $s \leqslant N-2$, то число $N-s$ чётно и положительно; обозначим $2b = N-s$, $b \in \mathbb{N}$. Разобьём N мальчиков на три группы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$: группа $\mathcal{A}$ состоит из b мальчиков самого низкого роста, т. е. из мальчиков $1, 2, \ldots, b$; группа $\mathcal{B}$ состоит из b мальчиков самого высокого роста, т. е. из мальчиков $N-b+1$, $N-b+2$, $\ldots$, N; наконец, группа $\mathcal{C}$ состоит из всех остальных $s = N-2b$ мальчиков, т. е. из мальчиков $b+1, \ldots, N-b$.

Места, на которые можно ставить мальчиков по кругу, также пронумеруем, начав с какого-либо места, подряд по ходу часовой стрелки: $1, 2, \ldots, N$. Поставим на первые b нечётных мест (т. е. на места с номерами $2k-1$, где $k = 1, \ldots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{A}$ в каком-либо порядке, а на первые b чётных мест (т. е. на места с номерами $2k$, где $k = \ = 1, \ldots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{B}$ в каком-либо порядке, и на оставшиеся места $2b+1, \ldots, N$ поставим мальчиков из группы $\mathcal{C}$ в порядке убывания их роста (т. е. на место с номером $2b+1$ станет мальчик $N-b$, $\ldots$, на место с номером N — мальчик $b+1$). В такой расстановке будет ровно s средних мальчиков — ими будут в точности все мальчики из группы $\mathcal{C}$. В самом деле, никакой мальчик из группы $\mathcal{A}$ или группы $\mathcal{B}$ не является в этой расстановке средним: по построению для мальчика из группы $\mathcal{A}$ оба соседа выше его, а для мальчика из группы $\mathcal{B}$ Оба соседа ниже его. Мальчики же из группы $\mathcal{C}$ все средние.

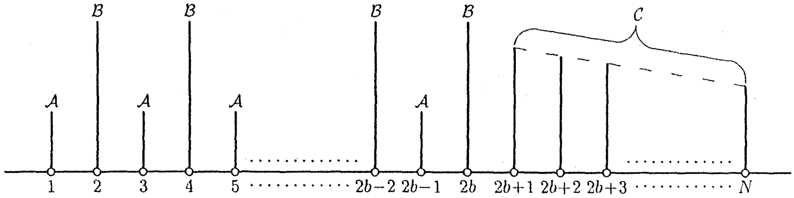


Рис. 3

Чтобы проиллюстрировать на рисунке описанную выше расстановку мальчиков, разорвём для наглядности окружность, вдоль которой стоят мальчики, между местами 1 и N и распрямим её (вместе со стоящими на ней мальчиками) в отрезок — см. рисунок, на котором числа числа под горизонтальным отрезком (бывшим ранее окружностью) — номера мест, на которых стоят мальчики, вертикальные отрезки схематично показывают их относительный рост, а буквы над этими отрезками — группу, которой принадлежит мальчик.

Второе решение.

Третье решение. Назовём мальчика высоким в расстановке, если он выше каждого из обоих своих соседей, и низким, если он ниже каждого из обоих своих соседей. Ясно, что в расстановке любой мальчик является только либо высоким, либо низким, либо средним.

Вначале методом математической индукции по числу N ($N \geqslant 3$) мальчиков докажем, что число средних мальчиков в любой расстановке N мальчиков по кругу не превосходит $N-2$ и имеет ту же чётность, что и N.

База индукции $N = 3$ очевидна.

Допустим, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого $N = k$, т. е. в любой расстановке k мальчиков по кругу число средних не превосходит $k-2$ и имеет такую же чётность как и k.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k+1$. Рассмотрим $k+1$ мальчиков и некоторую их расстановку $\mathcal{R}$ по кругу. Пусть A — самый высокий из N мальчиков, и пусть мальчик B — сосед мальчика A, а мальчик C — другой (отличный от A) сосед

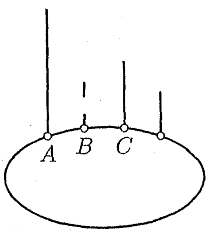


Рис. 1

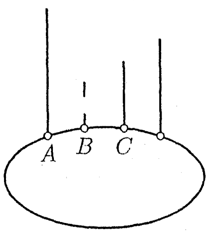


Рис. 2

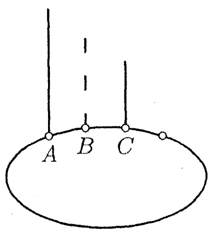


Рис. 3

мальчика B. Удалим мальчика B из расстановки $\mathcal{R}$ — получим некоторую расстановку $\mathcal{R}^*$ оставшихся k мальчиков по кругу. Найдём, как могло измениться число t средних мальчиков в расстановке $\mathcal{R}^*$ по сравнению с их числом s в расстановке $\mathcal{R}$. Свой статус (высокий, средний или низкий) в расстановке $\mathcal{R}^*$ по сравнению с расстановкой $\mathcal{R}$ мог изменить только мальчик C. Если мальчик B был низкий в $\mathcal{R}$, то в расстановке $\mathcal{R}^*$ число средних мальчиков по сравнению с расстановкой $\mathcal{R}$ изменяется на 1 (либо C не был средним в $\mathcal{R}$, но стал средним $\mathcal{R}^*$, т. е. $s = t + 1$ (см. рис. 1), либо он был средним в $\mathcal{R}$, но перестал им быть в $\mathcal{R}^*$, т. е. $s = t - 1$ (см. рис. 2)). Если же B был средним в расстановке $\mathcal{R}$, то статус C в расстановке $\mathcal{R}^*$ по сравнению с расстановкой $\mathcal{R}$ не изменяется (если он был средним, то средним и останется, а если низким — то останется низким (см. рис. 3)). В этом случае $s = t - 1$. Итак, либо $s = t - 1$, либо $s = t + 1$. Следовательно, так как по предположению индукции $t \equiv k \pmod 2$, то $s \equiv k+1 \pmod 2$, а так как $t \leqslant k - 2$, то $s \leqslant k - 1 = (k + 1) - 2$. Утверждение доказано.

Теперь методом математической индукции по числу N мальчиков покажем, что для любого целого $s \in [0, N - 2]$, такого, что $s \equiv N \pmod 2$, найдётся такая расстановка N мальчиков по кругу, в которой ровно s средних мальчиков.

База индукции $N = 3$ очевидна.

Допустим, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого $N = k$, т. е. для любого $s \in [0, k - 2]$, такого, что $s \equiv k \pmod 2$, найдётся такая расстановка k мальчиков по кругу, в которой ровно s средних мальчиков.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо для $N = k + 1$. Пусть A — самый высокий из $k + 1$ мальчика. Временно удалим его из числа мальчиков, останутся k мальчиков. Рассмотрим какую-либо расстановку $\mathcal{R}$ оставшихся k мальчиков по кругу, в которой ровно s средних мальчиков ($s \leqslant k - 2$ и $s \equiv k \pmod 2$). Пусть G — какая-либо группа подряд стоящих мальчиков в этой расстановке, в которой все мальчики, кроме крайних, являются средними. Обозначим крайних мальчиков из группы G через B и C, и пусть B выше C. Тогда, поставив мальчика A между мальчиком C и его соседом из группы G, получим расстановку $\mathcal{R}'$ из $k + 1$ мальчика, в которой ровно $s - 1$ средних, а поставив мальчика A между мальчиком B и тем его соседом, который не входит в группу G, получим расстановку $\mathcal{R}''$ из $k+1$ мальчика, в которой ровно $s+1$ средних мальчиков. Так как по предположению индукции целое неотрицательное число s может быть взять любым, таким, что $s \leqslant k-2$ и $s \equiv k \pmod 2$, то, следовательно, для любого натурального $m \in [0, k - 1]$, такого, что $m \equiv k + 1 \pmod 2$, существует расстановка $k + 1$ мальчиков по кругу, в которой ровно m средних мальчиков. Утверждение доказано.