Министерство образования Республики Беларусь

« LXII »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Гомель 2012

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 62-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Барабанов Е.А. (9.3)
Берник В.И. (8.4, 9.3)
Войделевич А.С. (10.3, 11.3)
Городнин И.И. (8.2, 9.1, 10.2, 11.2)
Карамзин В.П. (9.2)
Каскевич В.И. (8.1)
Мазаник С.А. (8.3)
Миротин А.Р. (9.4)
Жюри (10.1, 10.4, 11.1, 11.4)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

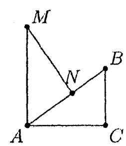
8 класс

8.1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист одновременно с постоянными скоростями направляются из пункта A в пункт B. Достигнув пункта B, каждый из них разворачивается и движется обратно к A; достигнув A, снова разворачивается и направляется к B, и т.д. Первыми после начала движения встретились велосипедист с мотоциклистом в некотором пункте C. К этому времени пешеход прошел только шестую часть пути от A до B. Через 6 минут после указанной встречи произошла вторая встреча — пешехода с мотоциклистом. Велосипедист с пешеходом впервые встретился также в пункте C.

Через какое время после начала движения встретились все трое названных участника движения ?

8.2. Найдите все пары $(n,\ m)$ целых чисел n и m, для которых выполняется равенство $n^2+n=m^2+2m-9$.

8.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен равный ему треугольник AMN, $\angle ANM=90°$, $AN=BC$ (см. рис.). Окружность Γ_1, вписанная в треугольник AMN, касается гипотенузы AM в точке P, а окружность Γ_2, вписанная в треугольник ABC, касается катета BC в точке Q.



Докажите, что отрезок PQ, гипотенуза AB и отрезок, соединяющий центры окружностей Γ_1 и Γ_2, пересекаются в одной точке.

8.4. В однокруговом турнире по футболу (т. е. каждая команда сыграла с каждой из остальных ровно один матч) участвовало 6 команд. В футболе команда получает 3 очка за победу, 1 очко за ничью и 0 очков за поражение. Известно, что количества набранных командами очков в турнире равны 10, 9, 6, 6, 4 и 2 соответственно.

а) Докажите, что команда, занявшая в турнире второе место (т. е. набравшая 9 очков), не проиграла свой матч команде, занявшей в турнире первое место (т. е. набравшей 10 очков).

б) Можно ли однозначно определить, как закончился матч между командами, занявшими в турнире первое и второе места?

9 класс

9.1. Найдите все пары $(n; m)$ натуральных чисел n и m, удовлетворяющих равенству $n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5)$.

M не лежит на диагонали

9.2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M, отличная от точки пересечения его диагоналей AC и BD, так, что отношение площадей треугольников AMC и BMD равно отношению тангенсов углов AMC и BMD, т.е. $S(AMC) : S(BMD) = \operatorname{tg}\angle AMC : \operatorname{tg}\angle BMD$.

Докажите, что $AM^2 + MC^2 + BD^2 = AC^2 + BM^2 + MD^2$.

9.3. В шахматном турнире приняло участие 10 шахматистов. Каждый шахматист с каждым из остальных сыграл одну встречу. Итоги турнира определялись по новой системе подсчёта очков: 3 очка за победу, 1 очко за ничью и 0 очков за поражение (в отличие от обычной системы, по которой за победу дается 1 очко, за ничью $0,5$ очка и за поражение 0 очков). Набрав больше всех очков и выиграв более половины своих встреч, первое место на турнире занял гроссмейстер N. Гроссмейстер A заметил гроссмейстеру N, что по обычной системе подсчёта очков N не попал бы даже в семёрку лучших игроков турнира, а гроссмейстер B сказал, что N не попал бы даже в восьмёрку лучших.

Мог ли быть прав **а)** гроссмейстер A? **б)** гроссмейстер B?

9.4. Дана прямоугольная таблица $m \times n$ клеточек ($m \geqslant 4$, $n \geqslant 4$), в каждую клетку которой записано по одному целому числу. Для каждой клетки число, записанное в эту клетку, равно среднему арифметическому чисел, записанных в каких-то двух соседних с ней по стороне клетках.

Найдите наибольшее возможное количество различных чисел, которые может содержать такая таблица.

10 класс

10.1. Найдите все тройки $(x; n; p)$ натуральных x и n и простых p, для которых $2x^3 + x^2 + 10x + 5 = 2 \cdot p^n$.

10.2. Существует ли функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α, такие, что $f(\alpha) = -2$ и

$$f(f(x)) = xf(x) + 2x$$

для любого действительного x?

10.3. В остроугольном $\triangle ABC$ на сторонах AB и AC во внешнюю сторону построены квадраты с центрами C_1 и B_1 соответственно. На отрезке C_1B_1 построен квадрат C_1B_1DE, так что точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно C_1B_1.

Докажите, что центр квадрата C_1B_1DE лежит на прямой BC.

10.4. а) Можно ли при некотором n в квадратной таблице $n \times n$ расставить 100 фишек так, чтобы в каждой клетке стояло не более одной фишки, а в каждом квадрате 2×2 стояло ровно 2 фишки?

б) Можно ли то же самое сделать для 110 фишек?

11 класс

11.1. Найдите все тройки $(x; n; p)$ натуральных x и n и простых p, для которых

$$x^3 + 3x^{\cancel{2}} + 14 = 2 \cdot p^n.$$

11.2. Найдите все действительные значения параметра a, при которых существует функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α, такие, что $f(\alpha) = 0$ и

$$f(f(x)) = xf(x) + a$$

для любого действительного x.

11.3. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Пусть Γ_1 — окружность проходящая через точки A и B, и касающаяся стороны CD в точке E; Γ_2 — окружность проходящая через точки B и C, и касающаяся стороны DA в точке F; Γ_3 — окружность проходящая через точки C и D, и касающаяся стороны AB в точке G; наконец, Γ_4 — окружность проходящая через точки D и A, и касающаяся стороны BC в точке H.

Докажите, что $EG \perp FH$.

11.4. Дана квадратная таблица $n \times n$, где $n \geqslant 2$. В каждую из некоторых k клеток таблицы ставится по одной фишке так, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно 2 фишки.

Найдите все значения k, при которых это можно сделать.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ: через 1,5 часа.

Пусть расстояние между A и B равно S (км), скорости пешехода, велосипедист и мотоциклиста — соответственно a, b и c (км/ч). Из условия следует (первыми встретились мотоциклист и велосипедист, а затем мотоциклист и пешеход), что $a < b < c$. Пусть D — точка на пути от A до B, в которой оказался пешеход в момент первой встречи велосипедиста и мотоциклиста. По условию $AD = \frac{S}{6}$. Тогда Расстояние AD пешеход преодолел за время $t_1 = \frac{S}{6a}$. За это время велосипедист и мотоциклист до их первой встречи в точке C вместе проехали расстояние $2S$ и сближались со скоростью $b + c$. Поэтому $t_1 = \frac{2S}{b+c}$. В результате, получаем: $\frac{S}{6a} = \frac{2S}{b+c}$, откуда

$$b + c = 12a. \tag{1}$$

Кроме того, так как за время t_1 велосипедист проехал расстояние $t_1 b = \frac{Sb}{6a}$, то $AC = \frac{Sb}{6a}$ и, значит, $CD = AC - AD = \frac{Sb}{6a} = \frac{S}{6} = \frac{S(b-a)}{6a}$. Согласно условию это расстояние пешеход и мотоциклист вместе, двигаясь на встречу со скоростью $a + c$, преодолели за 6 мин, т.е. за $\frac{1}{10}$ часа. Поэтому

$$\frac{S(b-a)}{6a} = \frac{(a+c)}{10}. \tag{2}$$

Далее, пешеход расстояние AC до первой встречи с велосипедистом преодолел за время $t_2 = \frac{AC}{a} = \frac{Sb}{6a^2}$. С другой стороны, за это время пешеход и велосипедист вместе преодолели расстояние $2S$, двигаясь навстречу со скоростью $a+b$. Поэтому $\frac{Sb}{6a^2} = \frac{2S}{a+b}$, откуда $b(a+b) = 12a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + ab - 12a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b+4a)(b-3a) = 0$. Следовательно, так как $b + 4a > 0$ (a и b — положительные величины), то $b - 3a = 0$, т.е. $b = 3a$. Тогда из (1) находим $c = 9a$, а из (2) находим $S = 3a$. поэтому $AC = \frac{Sb}{6a} = \frac{Sb}{6a} = \frac{3a \cdot 3a}{6a} = 1,5a$ и, значит, пешеход и велосипедист встретились в точке C через $t_2 = \frac{1,5a}{a} = 1,5$ часа после начала движения. За это время мотоциклист проехал расстояние $1,5 \cdot c = 13,5 \cdot a = 4 \cdot 3a + 1,5 \cdot a = 4S + 1,5a = AB + BA + AB + BA + AC$, т.е. через 1,5 часа после начала движения он оказался в точке C. Стало быть, впервые все трое участников движения встретились через $1,5$ часа после начала движения.

8.2. Ответ: $(-10, -11)$, $(-10, 9)$, $(-3, -5)$, $(-3, -3)$, $(2, -5)$, $(2, 3)$, $(9, -11)$, $(9, 9)$.

Умножив обе части данного равенства на 4, получим равносильное равенство

$$4n^2 + 4n = 4m^2 + 8m - 36 \quad \Leftrightarrow \quad 4n^2 + 4n + 1 = 4m^2 + 8m + 2 - 39 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2n+1)^2 = (2m+2)^2 - 39 \quad \Leftrightarrow \quad (2m+2)^2 - (2n+1)^2 = 39 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2m + 2 - 2n - 1)(2m + 2 + 2n + 1) = 39 \quad \Leftrightarrow \quad (2m - 2n + 1)(2m + 2n + 3) = 39.$$

Так как $39 = 1 \cdot 39 = 39 \cdot 1 = 3 \cdot 13 = 13 \cdot 3 = (-1)\cdot(-39) = (-39)\cdot(-1) = (-3)\cdot(-13) = (-13)\cdot(-3)$ — единственные разложения числа 39 на целые множители, то достаточно рассмотреть следующие случаи.

1) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = 1, \\ 2m + 2n + 3 = 39 \end{cases}$ откуда, складывая и вычитая уравнения системы, получим $\begin{cases} 4m + 4 = 40, \\ 4n + 2 = 38 \end{cases}$ и в результате $\begin{cases} m = 9, \\ n = 9. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = 3, \\ 2m + 2n + 3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = 16, \\ 4n + 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = 39, \\ 2m + 2n + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = 40, \\ 4n + 2 = -38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9, \\ n = -10. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = 13, \\ 2m + 2n + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = 16, \\ 4n + 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = -3. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = -1, \\ 2m + 2n + 3 = -39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -40, \\ 4n + 2 = -38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11, \\ n = -10. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = -3, \\ 2m + 2n + 3 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -16, \\ 4n + 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5, \\ n = -3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = -39, \\ 2m + 2n + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -40, \\ 4n + 2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11, \\ n = 9. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2m - 2n + 1 = -13, \\ 2m + 2n + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -16, \\ 4n + 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5, \\ n = 2. \end{cases}$

8.3. Заметим, что $\angle MAN = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABC$. Поэтому $MN = AC$, $AN = BC$ и, кроме того, $AP = PQ$. Пусть R — середина гипотенузы AB. Тогда $\Delta APR = \Delta BQR$ (по двум сторонам $AP = BQ$, $AR = BR$ и углу между ними $\angle PAR = \angle QBR$). Но тогда $\angle PRA = \angle BRQ$, и, следовательно, углы PRA и BRQ вертикальные. Значит, отрезок PQ пересекает гипотенузу AB в ее середине, точке R (см. рис. 1).

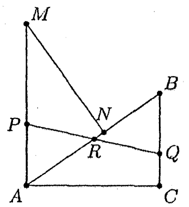


Рис. 1

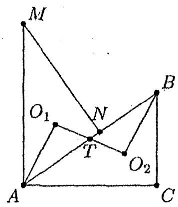


Рис. 2

С другой стороны, пусть T — точка пересечения гипотенузы AB и отрезка, соединяющего центры Q_1 и Q_2 окружностей Γ_1 и Γ_2. Тогда

$$\angle O_1AT = 0,5\angle MAN = 0,5\angle ABC = \angle TBO_2,$$

откуда $AO_1 \parallel BO_2$. Поскольку, кроме того, $AO_1 = BO_2$, то AO_1BO_2 — параллелограмм, и точка пересечения его диагоналей, точка T, делит их пополам, т.е. $AT = TB$. Значит, T — середина гипотенузы AB, т.е. точки T и R совпадают (см. рис. 2).

Таким образом, все три отрезка AB, PQ, O_1O_2 пересекаются в одной точке, середине гипотенузы AB.

8.4. Ответ: **б)** нет, нельзя.

а) Считаем, что из двух команд, набравших по 6 очков, какая-то одна команда заняла в турнире 3-е место, а тогда другая из них — 4-е (например, по разнице забитых и пропущенных мячей). Пронумеруем команды в том же порядке, в каком они заняли места в турнире: № 1, № 2, № 3, № 4, № 5, № 6.

Первое решение. Покажем сначала, что команда № 1 проиграла в турнире хотя бы один матч. В самом деле, если бы это было не так, то в каждой из 5-и игр турнира она набирала бы нечётное число очков (1 или 3), но тогда и сумма набранных ею очков была бы нечётной, что по условию не так.

Такими же рассуждениями покажем теперь, что если команда № 2 проиграла хотя бы один матч, то тогда она проиграла не менее двух матчей. Действительно, если бы она проиграла ровно 1 матч, то в каждой из остальных 4-х игр турнира она набирала бы нечётное число очков (1 или 3), но тогда сумма набранных ею очков была бы чётной, что не так по условию.

Наконец заметим, что поскольку согласно условию команда № 6 набрала в турнире 2 очка, то, значит, она 2 встречи в турнире свела вничью, а остальные проиграла.

После этих предварительных замечаний докажем, что команда № 2 не проиграла команде № 1. Предположим противное, т. е. что команда № 1 выиграла у команды № 2. Рассмотрим команды № 3, № 4 и № 5 и обозначим через S сумму набранных ими в турнире очков. Согласно условию $S = 6 + 6 + 4 = 16$. Оценим теперь S по-другому, исходя из сделанного предположения. Так как по доказанному выше команда № 1 проиграла какой-то команде, а этой командой не может быть ни команда № 2 (по предположению), ни команда № 6 (она не выиграла ни одного матча), то этой командой является одна из команд № 3, № 4 или № 5. Значит, $S \geqslant 3$. Так как по сделанному предположению команда № 2 проиграла матч, то, как доказано выше, она проиграла не менее 2-х матчей. Один матч она проиграла согласно предположению команде № 1, а так как команде № 6, поскольку эта команда не выиграла ни одного матча, команда № 2 проиграть не могла, то ещё хотя бы один матч она проиграла одной из команд № 3, № 4 или № 5. Значит, $S \geqslant 3 + 3 = 6$. Далее, в трёх встречах между собой команды № 3, № 4 и № 5, поскольку в каждой встрече разыгрываются не менее 2-х очков, набрали не менее $2 + 2 + 2 = 6$ очков. Значит, $S \geqslant 6 + 6 = 12$. Наконец, во встречах с командой № 6 команды № 3, № 4 и № 5, поскольку команда № 6 ни одной встречи не выиграла и только 2 свела вничью, набрали не менее $1 + 1 + 3 = 5$ очков. Следовательно, $S \geqslant 12 + 5 = 17$, но по условию $S = 16$. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно, а значит, команда № 2 свою встречу с командой № 1 не проиграла.

Второе решение. Поставим в соответствие команде № k упорядоченную пару (a_k, b_k) целых неотрицательных чисел, где a_k — число встреч турнира, которые команда № k выиграла, а b_k — число встреч, которые она проиграла, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Поскольку каждая из сумм $a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_6$ равна числу матчей турнира, закончившихся результативно (т. е. победой одной и поражением другой команд-участниц матча), то эти суммы равны:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = b_1 + b_2 + \ldots + b_6. \qquad (1)$$

Соотношение (1) будет основным в дальнейшем.

Докажем больше, чем требуется в условии п. **а)** задачи — докажем, что команда № 2 не могла потерпеть в турнире ни одного поражения и, следовательно, в частности, не могла проиграть команде № 1. Обозначим через O_k число очков, набранных в турнире командой № k, $k = 1, 2, \dots, 6$, т. е. $O_1 = 10$, $O_2 = 9$, $O_3 = O_4 = 6$, $O_5 = 4$ и $O_6 = 2$. Так как команда № k в турнире выиграла ровно a_k своих матчей и ровно b_k проиграла, то, следовательно, ровно $5 - a_k - b_k$ матчей она свела вничью, а значит, всего в турнире она набрала $3 \cdot a_k + 1 \cdot (5 - a_k - b_k) = 2a_k - b_k + 5$ очков. Поэтому целые неотрицательные числа a_k и b_k необходимо должны удовлетворять двум условиям:

$$a_k + b_k \leqslant 5 \quad \text{и} \quad 2a_k - b_k = O_k - 5, \tag{2}$$

$k = 1, 2, \dots, 6$. Используя соотношения (2), найдём, какие значения могут при каждом $k = \; = 1, 2, \dots, 6$ принимать величины a_k и b_k.

Пусть $k = 1$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_1 - b_1 = 5$. Записав это равенство в виде $b_1 = 2a_1 - 5$, получаем в силу неотрицательности b_1 неравенство $2a_1 - 5 \geqslant 0$, т. е. $a_1 \geqslant 3$. Записав же его в виде $a_1 + b_1 = 3a_1 - 5$, получим в силу неравенства в (2) при $k = 1$, что $3a_1 - 5 \leqslant 5$, т. е. $a_1 \leqslant 3$. Итак, $a_1 = 3$ и $b_1 = 2a_1 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Пусть $k = 6$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_6 - b_6 = -3$. Записав это равенство в виде $3a_6 + 3 = a_6 + b_6$, видим, что $3a_6 + 3 \leqslant 5$, т. е. $a_6 = 0$, а тогда $b_6 = 2a_6 + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Для остальных команд, т. е. для команд № 2, № 3, № 4 и № 5, такие же рассуждения не дают однозначного ответа о значении величин a_k и b_k.

Пусть $k = 2$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_2 - b_2 = 4$. Записав это равенство в виде $b_2 = 2a_2 - 4$, заключаем, что $2a_2 - 4 \geqslant 0$, т. е. $a_1 \geqslant 2$, а записав его в виде $a_2 + b_2 = 3a_1 - 4$ — что $3a_2 - 4 \leqslant 5$, т. е. $a_2 \leqslant 3$. Итак, для команды № 2 возможны только два варианта: либо **а)** $a_2 = 2$ и $b_2 = 0$, либо **б)** $a_2 = 3$ и $b_2 = 2$.

Пусть $k = 3$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_3 - b_3 = 1$. Записав это равенство в виде $b_3 = 2a_3 - 1$, получаем, что $2a_3 - 1 \geqslant 0$, или $a_3 \geqslant 1$, а записав его в виде $a_3 + b_3 = 3a_3 - 1$ — что $3a_3 - 1 \leqslant 5$, или $a_3 \leqslant 2$. Итак, для команды № 3 возможны также только два варианта: либо $a_3 = 1$ и $b_3 = 1$, либо $a_3 = 2$ и $b_3 = 3$. В частности, в любом случае справедливо неравенство $a_3 \leqslant b_3$.

Пусть $k = 4$. Так как $O_4 = O_3 = 6$, то для команды № 4 возможны только те же варианты, что и для команды № 3, т. е. либо $a_4 = 1$ и $b_4 = 1$, либо $a_4 = 2$ и $b_4 = 3$. В частности, в любом случае справедливо неравенство $a_4 \leqslant b_4$.

Пусть $k = 5$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_5 - b_5 = -1$. Записав это равенство в виде $a_5 + b_5 = 3a_5 + 1$, получаем в силу неравенства в (2) при $k = 5$, что $3a_5 + 1 \leqslant 5$, т. е. $a_5 \leqslant 1$. Итак, для команды № 5 возможны также только два варианта: либо $a_5 = 0$ и $b_5 = 1$, либо $a_5 = 1$ и $b_5 = 3$. В частности, в любом случае справедливо неравенство $a_5 < b_5$.

Докажем теперь, что для команды № 2 вариант **б)** $a_2 = 3$ и $b_2 = 2$ невозможен. В самом деле, если бы имел место случай **б)**, то, поскольку $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ и $a_6 = 0$, $b_6 = 3$, выполнялись бы равенства: $a_1 + a_2 + a_6 = 3 + 3 + 0 = 6$ и $b_1 + b_2 + b_6 = 1 + 2 + 3 = 6$. Так как эти суммы равны, то вследствие (1) должны быть равны и суммы $a_3 + a_4 + a_5$ и $b_3 + b_4 + b_5$. Но равенство этих сумм невозможно, поскольку, как показано выше, справедливы неравенства: $a_3 \leqslant b_3$, $a_4 \leqslant b_4$ и $a_5 < b_5$. Следовательно, для команды № 2 вариант **б)** невозможен, а поэтому для неё выполнен вариант **а)** $a_2 = 2$ и $b_2 = 0$. Так как $b_2 = 0$, то, по-другому, команда № 2 не проиграла в турнире ни одного своего матча и, в частности, не проиграла команде № 1.

Хотя для решения задачи это не нужно, отметим, что проведённые рассуждения позволяют однозначно определить число выигранных и проигранных встреч каждой командойучастницей. Для команд №1, №2 и №6 это сделано в решении: $a_1 = 3$, $b_1 = 1$; $a_2 = 2$, $b_2 = 0$ и $a_6 = 0$, $b_6 = 3$. Значит, $a_1 + a_2 + a_6 = 5$ и $b_1 + b_2 + b_6 = 4$. Поэтому вследствие (1) должно выполняться равенство $a_3 + a_4 + a_5 + 1 = b_3 + b_4 + b_5$, т. е. равенство $(a_3 - b_3) + (a_4 - b_4) + 1 = b_5 - a_5$. Поскольку, как доказано выше, слагаемые $a_3 - b_3$ и $a_4 - b_4$ в левой части этого равенства неположительны, а правая его часть $b_5 - a_5 \geqslant 1$, то это равенство может быть выполнено, только если $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$ и $b_5 - a_5 = 1$, т. е. только в случае $a_3 = b_3 = 1$, $a_4 = b_4 = 1$ и $a_5 = 0$, $b_5 = 1$.

Третье решение. Пусть x игр турнира закончилось результативно, а y — вничью. Поскольку всего было сыграно $(6 \cdot 5)/2 = 15$ игр, то $4x + y = 15$. С другой стороны, общее количество очков, разыгранных в турнире равно $3x + 2y = 10 + 9 + 6 + 6 + 4 = 27$. Поэтому $x = 7$, $y = 8$.

Составим таблицу возможных результатов турнира.

Победы	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Ничьи	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
Поражения	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
Очки	0	1	2	3	4	5	3	4	5	6	7	6	7	8	9	9	10	11	12	13	15

Из этой таблицы видно, что команда, набравшая 10 очков и занявшая первое место, победила в трех играх, одну сыграла вничью и одну проиграла, т.е провела 4 результативные игры. Если бы команда, получившая 9 очков и занявшая второе место, проиграла команде, занявшей первое место, то результаты ее игр — 3 победы, 2 поражения, т.е она сыграла 5 результативных игр. Следовательно, число результативных игр, сыгранных командами, занявшими первое и второе места, равно 9, однако только одна из этих игр была общей. Таким образом, всего в турнире было сыграно не менее 8 результативных игр, однако, как было показано выше, в турнире всего было сыграно 7 результативных игр, противоречие.

Следовательно, команда, занявшая в турнире второе место, не проиграла свой матч команде, занявшей в турнире первое место.

б) Для того чтобы доказать, что нельзя однозначно определить, как закончился матч между командами №1 и №2, достаточно привести пример двух турниров, удовлетворяющих условиям задачи, но в которых матчи между командами №1 и №2 закончились по-разному — см. таблицы таких турниров, показанных на рис. 1 и рис. 2 соответственно: в турнире, показанном на рис. 1, команда №2 выиграла у команды №1, а в турнире, показанном на рис. 2, матч между командами №1 и №2 закончился вничью.

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	Σ
№1	•	0	3	3	3	1	10
№2	3	•	1	1	1	3	9
№3	0	1	•	1	1	3	6
№4	0	1	1	•	1	3	6
№5	0	1	1	1	•	1	4
№6	1	0	0	0	1	•	2

Рис. 1

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	Σ
№1	•	1	0	3	3	3	10
№2	1	•	3	1	1	3	9
№3	3	0	•	1	1	1	6
№4	0	1	1	•	1	3	6
№5	0	1	1	1	•	1	4
№6	0	0	1	0	1	•	2

Рис. 2

9 класс

9.1. Ответ: $(n, m) = (4, 2)$.

Из условия получаем

$$n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5) = m^4 + m^2 + 8m - 15.$$

Рассмотрим полученное уравнение

$$n^2 + n - (m^4 + m^2 + 8m - 16) = 0 \qquad (1)$$

как квадратное относительно n. Для того чтобы существовали натуральные решения этого уравнения необходимо, чтобы его дискриминант $D = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63$ являлся квадратом некоторого целого числа. Однако, при всех натуральных m

$$D = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63 = (2m^2 + 2)^2 - 4(m-1)^2 - 59 < (2m^2 + 2)^2$$

и при всех натуральных $m > 2$

$$D = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63 = (2m^2 + 1)^2 + 32(m - 2) > (2m^2 + 1)^2.$$

Следовательно, натуральные решения уравнения (1) могут существовать лишь при натуральных $m = 1$ Или $m = 2$.

Если $m = 1$, то $n^2 + n + 6 = 0$, откуда $n = -2$ или $n = -3$.

Если $m = 2$, то $n^2 + n - 20 = 0$, откуда $n = -5$ или $n = 4$.

Таким образом единственной парой натуральных чисел, удовлетворяющей условию, является пара $(4, 2)$.

9.2. Так как

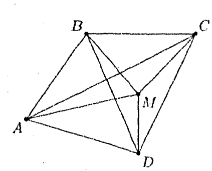
$$S(AMC) = 0,5AM \cdot MC \sin\angle AMC, \qquad S(BMD) = 0,5BM \cdot MD \sin\angle BMD,$$

то

$$S(AMC) = 0,5AM \cdot MC \sin\angle AMC, \qquad S(BMD) = 0,5BM \cdot MD \sin\angle BMD,$$

$$AM \cdot MC = 2S(AMC)/\sin\angle AMC, \qquad BM \cdot MD = 2S(BMD)/\sin\angle BMD. \qquad (1)$$

По теореме косинусов



$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cos\angle AMC,$$

$$BD^2 = BM^2 + MD^2 - 2BM \cdot MD \cos\angle BMD.$$

Из (1) получаем

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 4S(AMC)\cos\angle AMC/\sin\angle AMC =$$

$$AM^2 + MC^2 - 4S(AMC)/\operatorname{tg}\angle AMC, \qquad (2)$$

$$BD^2 = BM^2 + MD^2 - 4S(BMD)\cos\angle BMD/\sin\angle BMD =$$

$$BM^2 + MD^2 - 4S(BMD)/\operatorname{tg}\angle BMD. \qquad (3)$$

Поскольку из условия следует, что

$$S(AMC)/\operatorname{tg}\angle AMC = S(BMD)/\operatorname{tg}\angle BMD,$$

то требуемое равенство следует теперь из (2) и (3).

9.3. Ответ: **а)** да; **б)** нет.

а) Приведём пример турнира, удовлетворяющего условиям задачи, такого, что по старой системе подсчёта очков N не попадает в семёрку лучших (см. рис., на котором шахматисты, отличные от N, обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а баллы в таблице турнира выставлены по старой системе).

	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Очки (Σ) Новая система	Очки (Σ) Старая система
N	•	0	0	0	1	1	1	0	1	1	*15*	5
1	1	•	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,5	1	1	*14*	5,5
2	1	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0	0,5	1	1	*14*	5,5
3	1	0,5	0,5	•	0	0,5	0,5	0,5	1	1	*14*	5,5
4	0	0,5	0,5	1	•	0,5	0,5	0,5	1	1	*14*	5,5
5	0	1	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	1	1	*14*	5,5
6	0	0,5	1	0,5	0,5	0,5	•	0,5	1	1	*14*	5,5
7	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	1	*13*	5,5
8	0	0	0	0	0	0	0	0,5	•	1	*4*	1,5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	•	*0*	0

б) Так как по условию гроссмейстер N выиграл более половины своих встреч, т. е. N выиграл не менее 5 своих встреч, то по старой системе подсчёта очков он набрал не менее 5 очков. Поэтому, если бы N по старой системе занял место не выше девятого (т. е. не попал бы в восьмёрку лучших), то не менее 8-и участников турнира набрали бы по старой системе подсчёта больше очков чем N, т. е. не менее $5{,}5$ очков каждый. Значит, сумма очков, набранных шахматистами по старой системе, была бы не менее $8 \cdot 5{,}5 + 5 = 44 + 5 = 49$, тогда как всего в турнире по старой системе разыгрывается $1 \cdot \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ очков. Противоречие. Следовательно, N по старой системе подсчёта очков не мог занять место ниже восьмого.

9.4. Ответ: $mn - 6$.

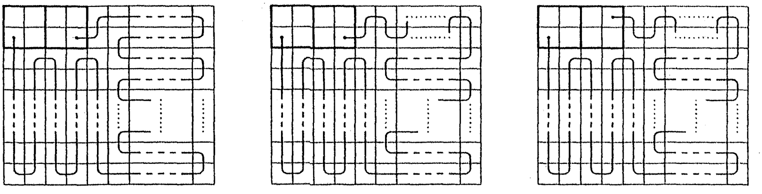
Пусть A — наибольшее число в таблице, а a — наименьшее.

Рассмотрим любую клетку k таблицы, в которой записано число A. Оно равно среднему арифметическому чисел в каких-то двух соседних с ней по стороне клетках k_1 и k_2. Но все числа в таблице не превосходят A, поэтому числа в этих двух клетках равны A. Так как клетки k_1 и k_2 — соседние по стороне с одной и той же клеткой k, то между собой они не соседние. Поскольку в клетке k_1 записано число A, то оно записано и в каких-то двух соседних с ней по стороне клетках. Одна из этих клеток — клетка k, а другая, поскольку клетки k_1 и k_2 — не соседние, отлична от клетки k_2. Значит, число A стоит по крайней мере в четырёх различных клетках.

Рассмотрим таблицу, полученную из данной таблицы заменой каждого её числа на противоположное. Полученная таблица тоже удовлетворяет условию задачи, следовательно, наибольшее число встречается в ней по крайней мере четыре раза. Так как a

— наименьшее число в исходной таблице, то $(-a)$ — наибольшее число в полученной таблице, и поэтому в ней число $(-a)$ встречается по крайней мере четыре раза. Следовательно, в исходной таблице число a стоит по крайней мере в четырёх различных клетках.

Таким образом, максимальное и минимальное числа занимают по крайней мере восемь клеток. Остальных клеток в таблице всего $mn-8$. Значит, в таблице может стоять не больше, чем $mn-8+2=mn-6$ различных чисел. Остаётся показать, что в таблице может стоять ровно $mn-6$ различных чисел.



Отметим в нашей таблице два соседних квадратика 2×2, один из которых — угловой (см.рис.), и соединим эти квадратики линией, проходящей через каждую клетку таблицы ровно по одному разу, как показано на рисунках, в зависимости от чётности m и n. Во все клетки одного из отмеченных квадратиков поставим число 1, а во все клетки другого — число $mn-6$. Будем двигаться от того конца проведённой нами линии, на котором стоит число 1, к другому её концу, и в каждую следующую клетку, через которую проходит эта линия, будем ставить число, которое на 1 больше числа из предыдущей клетки. Так как вне отмеченных квадратиков ровно $mn-8$ клеток, то мы расставим на проведённой нами линии все целые числа от 2 до $mn-7$, а значит, последнее число на этой линии тоже будет на 1 больше предпоследнего. Таким образом мы заполним всю таблицу.

Докажем, что это заполнение удовлетворяет условию. В каждом из отмеченных квадратиков 2×2 все числа равны, следовательно, любое число, которое стоит внутри отмеченного квадратика 2×2, равно среднему арифметическому тех двух соседних чисел, которые стоят внутри того же квадратика. Любое другое число стоит на проведённой нами линии, но не на её концах, и поэтому оно на 1 больше предыдущего числа на этой линии и на 1 меньше следующего, а значит, оно является средним арифметическим этих двух чисел. Таким образом, это заполнение удовлетворяет условию.

10 класс

10.1. Ответ: $(x;n;p)=(1;2;3)$, $(x;n;p)=(3,2,7)$.

Легко видеть, что $2x^3+x^2+10x+5=(x^2+5)(2x+1)$, поэтому исходное равенство перепишется в виде

$$(x^2+5)(2x+1)=2\cdot p^n. \tag{1}$$

Поскольку $(2x+1)$ — нечетное число при любых натуральных x, то $p\neq 2$ и $2x+1=p^k$, $x^2+5=2\cdot p^{n-k}$. При этом, так как очевидно, что $x^2+5>2x+1$ при всех $x\in\mathbb{N}$ и $p\geqslant 3$, то $n-k\geqslant k$. Следовательно, число $(x^2+5)\,\vdots\,(2x+1)$. Поэтому число $(x^2+5)/(2x+1)$ целое, но тогда и число $2(x^2+5)/(2x+1)$ целое. Так как $2(x^2+5)=x(2x+1)+(10-x)$, то число $(10-x)/(2x+1)$ также должно быть целым, а вместе с ним должно быть целым число $2(10-x)/(2x+1)$. Однако, $2(10-x) = -(2x+1)+21$, следовательно, должно быть целым число $21/(2x+1)$. Последнее возможно лишь при $2x+1 = 1,\ 3,\ 7,\ 21$, т.е. при натуральных $x=1,\ x=3,\ x=20$.

При $x=1$ имеем $(x^2+5)(2x+1) = 6\cdot 3 = 18 = 2\cdot 3^2$, откуда $p=3,\ n=2$.

При $x=3$ имеем $(x^2+5)(2x+1) = 14\cdot 7 = 2\cdot 7^2$, откуда $p=7,\ n=2$.

При $x=20$ имеем $(x^2+5)(2x+1) = 405\cdot 21 = 5\cdot 7\cdot 3^5$, т.е. не имеет вид $2\cdot p^n$ ни при каких натуральных n и простых p.

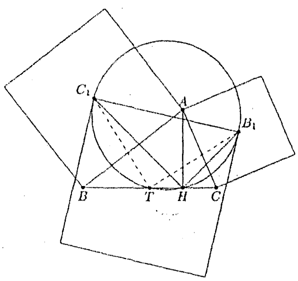
10.2. Ответ : нет, не существует.

Допустим, что существует функция, удовлетворяющая равенству $f(f(x)) = xf(x)+2x$ при любом действительном x, причем $f(\alpha)=-2$ при некотором α. Имеем:

$$f(-2) = f(f(\alpha)) = \alpha f(\alpha) + 2\alpha = -2\alpha + 2\alpha = 0.$$

Тогда $f(0) = f(f(-2)) = -2f(-2) - 4 = -4$.
Далее $f(-4) = f(f(0)) = 0\cdot f(0) + 2\cdot 0 = 0$.
В результате, $f(0) = f(f(-4)) = -4f(-4) - 8 = 4\cdot 0 - 8 = -8$. Однако $f(0) = -4$ — противоречие.

10.3. Пусть точка H — основание высоты опущенной из вершины A на сторону BC.



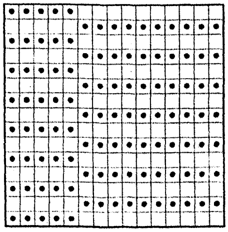
Так как $\angle AB_1C = 90^0$, то $\angle AHC + \angle AB_1C = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Таким образом, точки A, B_1, C, H лежат на одной окружности. Так как $AB_1 = B_1C$, то HB_1 — биссектриса угла $\angle AHC$, следовательно $\angle AHB_1 = \angle B_1HC = 90^0/2 = 45^0$. Аналогично показываем, что $\angle AHC_1 = \angle C_1HB = 45^0$.

Далее рассмотрим окружность ω построенную на отрезке C_1B_1 как на диаметре. Так как $\angle C_1HB_1 = \angle C_1HA + \angle AHB_1 = 45^0 + 45^0 = 90^0$, то получаем, что $H \in \omega$. Пусть точка T — вторая точка пересечения окружности ω и BC, тогда $\angle C_1B_1T = \angle C_1HT = 45^0$ и $\angle TC_1B_1 = \angle B_1HC = 45^0$. Таким образом $\triangle C_1TB_1$ — прямоугольный равнобедренный треугольник, стало быть точка $T \in BC$ будет совпадать с центром квадрата C_1B_1DE.

В случае, когда точка T совпадает с H, то есть ω касается прямой BC, имеем, $\angle C_1B_1H = \angle C_1HB = 45^0$ и $\angle B_1C_1H = \angle B_1HC = 45^0$. Таким образом точка H — центр квадрата C_1B_1DE.

10.4. Ответ : а) нет, нельзя; б) да, можно.

а) При $n=14$ вся таблица разбивается на 49 квадратов 2×2. Поэтому, если в каждом из них находится ровно 2 фишки, то общее число фишек в таблице равно $2\cdot 49 = 98$. Поскольку фишек больше, то $n > 14$. С другой стороны, если $n \geqslant 15$, то число фишек в таблице не менее 105 (см. решение задачи 11.4). Поэтому 100 фишек расставить 100 фишек с соблюдением условий нельзя.



б) Нужная расстановка имеет место при $n=15$ и приведена в следующем примере.

11 класс

11.1. Ответ: $(x;n;p) = (1;2;3)$, $(x;n;p) = (3;2;5)$.

Легко видеть, что $x^3 + 3x + 14 = (x+2)(x^2 - 2x + 7)$, поэтому исходное равенство перепишется в виде

$$(x+2)(x^2 - 2x + 7) = 2 \cdot p^n. \tag{1}$$

Очевидно, что $x^2 - 2x + 7 > x + 2$ при всех $x \in \mathbb{N}$. Поэтому и в случае $x + 2 = 2 \cdot p^k$, $x^2 - 2x + 7 = p^{n-k}$, и в случае $x + 2 = p^k$, $x^2 - 2x + 7 = 2 \cdot p^{n-k}$, имеем $n - k \geqslant k \geqslant 0$. Это означает, что в обоих случаях число $2(x^2 - 2x + 7) \vdots (x+2)$. Следовательно, число $2(x^2 - 2x + 7)/(x+2)$ целое, но так как $2(x^2 - 2x + 7) = 2x(x+2) - 8(x+2) - 30$, то должно быть целым число $30/(x+2)$. Последнее возможно лишь если $(x+2)$ является делителем 30. Однако из (1) следует, что число $x + 2$ имеет не более двух простых делителей, причем один из них в этом случае равен 2. Поэтому при натуральном x число $x + 2$ может принимать лишь значения 3, 5, 6, 10, т.е. x может принимать лишь значения $1, 3, 4, 8$.

При $x = 1$ имеем $(x+2)(x^2 - 2x + 7) = 3 \cdot 6 = 18 = 2 \cdot 3^2$, откуда $p = 3$, $n = 2$.

При $x = 3$ имеем $(x+2)(x^2 - 2x + 7) = 5 \cdot 10 = 2 \cdot 5^2$, откуда $p = 5$, $n = 2$.

При $x = 4$ имеем $(x+2)(x^2 - 2x + 7) = 6 \cdot 15 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, т.е. не имеет вид $2 \cdot p^n$ ни при каких натуральных n и простых p.

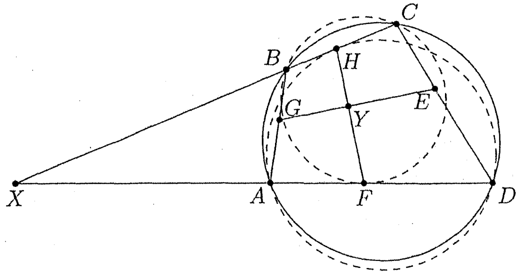
При $x = 8$ имеем $(x+2)(x^2 - 2x + 7) = 10 \cdot 55 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$, т.е. не имеет вид $2 \cdot p^n$ ни при каких натуральных n и простых p.

11.2. Ответ: $a = 0$.

Действительно, если $a = 0$, то функция $f \equiv 0$ (т. е. константа 0) удовлетворяет условию. Пусть теперь $a \neq 0$ и допустим, что $f(\alpha) = 0$ при некотором α. Имеем: $f(0) = f(f(\alpha)) = \alpha \cdot f(\alpha) + a = a$. Тогда $f(a) = f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + a = a$. Поэтому $a = f(a) = f\big(f(a)\big) = a \cdot f(a) + a = a \cdot a + a = a^2 + a$, т. е. $a = a^2 + a$, и тогда $a = 0$ — противоречие.

11.3. Если четырёхугольник $ABCD$ имеет пару параллельных сторон, то доказательство следует из симметрии конструкции. Далее будем предполагать, что четырёхугольник $ABCD$ отличен от трапеции и прямоугольника.

Пусть $X = BC \cap AD$, так как Γ_2 касается AD в точке F, то $XF^2 = XB \cdot XC$.



Аналогично $XH^2 = XA \cdot XD$. Но так как четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, то $XB \cdot XC = XA \cdot XD$, откуда $XF = XH$, таким образом $\triangle XHF$ — равнобедренный. Значит $\angle BHF = 0,5(180^0 - \angle CXD) = 0,5(\angle C + \angle D)$. Аналогично $\angle BGE = 0,5(\angle A + \angle D)$. Пусть $GE \cap HF = Y$, тогда $\angle GYH = 360^0 - (\angle B + 0,5(\angle C + \angle D) + 0,5(\angle A +$

$\angle D)) = 360^0 - (\angle B + \angle D) - 0,5(\angle A + \angle C)$. В силу того, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$, получаем, что $\angle GYH = 360^0 - 180^0 - 90^0 = 90^0$, таким образом $EG \perp FH$.

11.4. Ответ: $n^2/2$ при четном n; любое число из промежутка $[2k^2 + k,\ 2k^2 + 3k + 1]$ при нечетном $n = 2k + 1$.

Если $n = 2k$ — четное число, то вся таблица разбивается на $k^2 = n^2/4$ квадратов 2×2, в каждом из которых находится ровно 2 фишки. Поэтому общее число фишек равно $2k^2 = n^2/2$.

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Разобьем таблицу на квадраты 2×2 и фигуры вида, указанного на рисунке 1, так, как показано на рисунке 2. В любой такой фигуре должна стоять хотя бы одна фишка, иначе в квадрате 2×2, примыкающем к данной, должно быть не менее 3 фишек (см. рис. 3) — противоречие. Таким образом, общее число фишек в таблице не менее $2k^2 + k$.

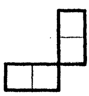


Рис. 1

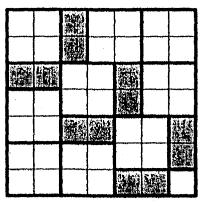


Рис. 2

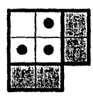


Рис. 3

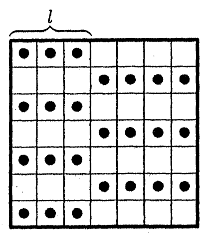


Рис. 4

С другой стороны, поскольку в любом квадрате 2×2 должно быть ровно 2 пустых клетки (незанятых фишками), то аналогично получаем, что пустых клеток в таблице также не менее $2k^2 + k$. И значит, фишек в таблице не более $(2k + 1)^2 - (2k^2 + k) = 2k^2 + 3k + 1$. Пример, приведенный на рисунке 4, показывает, что любое значение числа фишек из указанного промежутка достигается. (В этом примере число фишек равно $2k^2 + k + l$, где $0 \leqslant l \leqslant 2k + 1$.)