Министерство образования Республики Беларусь

« LXI »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Гомель 2011

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 61-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Базылев Д.Ф. (10.8)
Барабанов Е.А. (9.6,)
Войделевич А.С. (10.7)
Воронович И.И. (8.8, 9.8, 10.6, 10.7, 10.8, 11.5, 11.7)
Каскевич В.И. (8.5, 8.6, 9.6)
Константиновский Я.С. (11.8)
Ласый Т.П. (11.6)
Мазаник С.А. (8.7, 9.6)
Пирштук Д.И. (9.5, 9.7)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Пусть a, b, c — целые числа.

Докажите, что если число $3a^2 + 2ab - 2b^2$ делится на 7, то число $10a^2 + 23ab + 12b^2$ делится на 49.

8.6. У Васи есть n гирек общим весом 300 граммов. Каждая гирька весит целое положительное число граммов.

При каком наименьшем n можно гарантировать, что каков бы ни был набор гирек у Васи, их можно разбить на три группы так, что в каждой группе общий вес гирек будет равен 100 граммов?

8.7. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на стороне BC такова, что $\angle MKC = \angle BKM$.

Найдите величину угла MLC, если известно, что точка L лежит на биссектрисе угла KMB.

8.8. В клетках таблицы 20×20 стоят знаки "$+$" или "$-$" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоят семь знаков "$-$", а в остальных клетках таблицы —
знаки "$+$". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит 47 знаков "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$".

Докажите, что в тех клетках, где в начальной таблице стояли знаки "$-$", по-прежнему стоят знаки "$-$".

9 класс

9.5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что $a + b + c \geqslant ab + bc + ca$.

9.6. У Васи есть n гирек общим весом 300 граммов. Каждая гирька весит целое положительное число граммов. Петя указывает три натуральных числа k, l и m, сумма которых равна 300.

При каком наименьшем n можно гарантировать, что, каков бы ни был набор гирек у Васи, и какие бы числа ни указал Петя, все гирьки можно разбить на три группы так, что в первой группе общий вес гирек будет равен k граммов, во второй — l граммов, а в третьей — m граммов?

9.7. Пусть P — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $ABCD$. На биссектрисах углов APD и BPC отмечены точки K и L соответственно, такие, что $AP = PK$ и $BP = PL$. Обозначим через M точку пересечения прямых AK и BL, а через N — прямых KD и LC.

Докажите, что прямые KL и MN перпендикулярны.

9.8. В клетках таблицы 20×20 стоят знаки "$+$" или "$-$" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоят восемь знаков "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит 50 знаков "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$".

Докажите, что ровно в одной из клеток, где в начальной таблице стояли знаки "$-$", по-прежнему стоит знак "$-$".

10 класс

10.5. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющих равенству

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

10.6. В клетках таблицы $3n \times 3n$ стоят знаки "$+$" или "$-$" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоит один знак "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит 36 знаков "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$".

Найдите все возможные значения, которые может принимать число n.

10.7. Точка M — середина стороны AB остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника, а I — центр вписанной в треугольник окружности.

Докажите, что если точки M, I и H лежат на одной прямой, то длина отрезка CH равна радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

10.8. На параболе $y = x^2$ отмечены четыре точки A, B, C, D, так, что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Пусть m и n — расстояния от точки пересечения диагоналей этой трапеции до середин её оснований AD и BC соответственно.

Найдите площадь трапеции $ABCD$.

11 класс

11.5. На ветви гиперболы $y = 1/x$, лежащей в первой координатной четверти, отмечены точки B и C (абсцисса точки C больше абсциссы точки B). Пусть A — точка пересечения прямой, проходящей через начало координат и точку B, со второй ветвью гиперболы.

Докажите, что угол BAC равен одному из углов, образованных прямой BC с касательной к гиперболе в точке B.

11.6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких что как само число n, так и сумма его цифр $S(n)$ являются квадратами некоторых натуральных чисел и в десятичной записи которых

а) не более одной цифры 0; **б)** отсутствует цифра 0.

11.7. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки "$+$" или "$-$" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоят два знака "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит девять знаков "$-$", а в остальных клетках таблицы — знаки "$+$".

Найдите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать число n.

11.8. Пусть I — центр окружности, вписанной в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, а Q — точка касания вписанной окружности со стороной AB. На стороне AB отмечена точка T, так, что $IT \parallel CQ$. Через точку T проведена прямая, касающаяся вписанной окружности в точке K (отличной от точки Q) и пересекающая прямые CA и CB в точках L и N соответственно.

Докажите, что T — середина отрезка LN.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Так как $3a^2+2ab-2b^2$ делится 7, то

$$10a^2+23ab+12b^2=(3a^2+2ab-2b^2)+7(a^2+3ab+2b^2).$$

также делится на 7. Разложим выражение $10a^2+23ab+12b^2$ на множители:

$$10a^2+23ab+12b^2=10a^2+15ab+8ab+12b^2=5a(2a+3b)+4b(2a+3b)=(2a+3b)(5a+4b).$$

Поскольку 7 — простое число, то произведение двух чисел $(2a+3b)$ и $(5a+4b)$ делится на 7 только, если какое-то из этих чисел делится на 7. Но, заметим, что сумма этих чисел $(2a+3b)+(5a+4b)=7(a+b)$ делится на 7. Потому, если одно из них делится на 7, то тогда и второе также делится на 7, и в результате их произведение делится на $7\cdot 7=49$.

8.6. Ответ: 201.

Заметим, что, если в наборе гирек у Васи есть гирька весом 101 г или больше, то разбить такой набор на три равные по весу части очевидно нельзя. Если $n\leqslant 200$, то в наборе может быть гирька такого веса (например, $n-1$ гирек по 1 г и одна гирька весом $300-n+1\geqslant 301-200=101$ г). Следовательно, $n\geqslant 201$. Покажем, что $n=201$, т. е. каков бы ни был набор из 201 гирек общим весом 300 г, гирьки можно разбить на три равные по весу части.

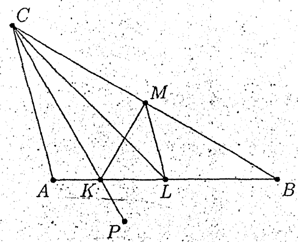
Прежде всего заметим, что если число гирек равно 201, то не менее 102 гирек весят по 1 г. Действительно, если число гирек весом по 1 г равно x, то $201-x$ гирек весят не менее, чем по 2 г. В результате, общий вес всех гирек составляет не менее $x\cdot 1+(201-x)\cdot 2=402-x$. Поэтому согласно условию $402-x\leqslant 300$, откуда $x\geqslant 102$. Покажем теперь, как разбить гирьки нужным образом. В первую группу мы отложим 100 гирек по 1 г. Общий вес оставшихся 101 гирьки будет равен $300-100=200$. Остается составить еще одну (вторую) группу весом в 100 г. Все гирьки, не попавшие в первые две группы, образуют третью группу; весить они будут $300-100-100=100$ г. Пронумеруем рассматриваемые гирьки, и пусть i-тая гирька весит a_i г, $1\leqslant i\leqslant 101$. Рассмотрим следующие 100 сумм:

$$a_1;\ \ a_1+a_2;\ \ a_1+a_2+a_3;\ \ \ldots,\ \ a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}.$$

Либо, какая-то из этих сумм равна 100 (и тогда соответствующие гирьки составят искомую вторую группу), либо среди этих 100 сумм найдутся две с одинаковым остатком при делении на 100. Пусть это суммы $S_i=a_1+a_2+\ldots+a_i$ и $S_j=a_1+a_2+\ldots+a_j$ (для определенности $i<j$). Тогда, с одной стороны, S_j-S_i делится на 100 и, значит, $S_j-S_i=100$, поскольку $S_j-S_i<S_{100}+a_{101}=200$. С другой стороны, $S_j-S_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_j$. Поэтому вторую искомую группу можно составить из гирек с номерами от $i+1$ до j.

8.7. Ответ: 30°.

Так как L лежит на биссектрисе угла KCB, то L равноудалена от его сторон —



лучей CP и CB. Аналогично, так как L лежит на биссектрисе угла KMB, то L равноудалена от его сторон — лучей MK и MB. Следовательно, L равноудалена от лучей KM и KP, и, следовательно лежит на биссектрисе угла PKM. Поэтому $\angle PKL = \angle LKM = \angle MKC$. Тогда каждый из этих углов равен $60°$, так как сумма всех трех равна $180°$.

Пусть $\angle ACB = 3x$. Так как $\angle LKC = 120°$, то $\angle KAC = \angle LKC - \angle ACK = 120° - x$. Поэтому

$$\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle BCA = 180° - (120° - x) - 3x = 60° - 2x.$$

Тогда

$$\angle LMB = 0,5\angle KMB = 0,5(180° - \angle LKM - \angle ABC) =$$
$$= 0,5(180° - 60° - (60° - 2x)) = 30° + x.$$

Поскольку $\angle LMB = \angle LCM + \angle CLM$, то $\angle LCM = 30° + x - x = 30°$.

8.8. Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных — не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $c = 20x + 20y - 2xy$. В частности, c — четное число. Полученное уравнение перепишем в виде

$$|x - 10| \cdot |y - 10| = |100 - c/2|. \qquad (1)$$

Заметим, что число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 40,42,44,46,48,50,52 или 54, в зависимости от того, сколько первоначальных минусов: 0,1,2,3,4,5,6 или 7, изменились на плюсы. Поэтому в равенстве (1) правая часть равна соответственно 80,79,78,77,76,75,74 или 73. Далее, оба сомножителя $|x - 10|$ и $|y - 10|$ не превосходят 10 (так как $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 10$). Из всех приведенных чисел лишь 80 представляется в виде произведения двух натуральных чисел, не превосходящих 10 ($80 = 8 \cdot 10$, например, при $x = 0$, $y = 2$). Это как раз соответствует случаю, когда ровно в 40 клетках знаки изменились, а это значит, что все 7 исходных знаков "$-$" остались на своих местах.

9 класс

9.5. *Первый способ.* Заметим, что требуемое неравенство равносильно тому, что $(a + b + c)^2 \geqslant (ab + bc + ca)^2$. В силу условия $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ достаточно доказать, что

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)^2 \qquad (1).$$

Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Поэтому

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geqslant$$

$$\geqslant (ab+bc+ca)\cdot 3\cdot(ab+bc+ca),$$

что и требовалось.

Второй способ. Заметим, что требуемое неравенство равносильно тому, что $(a+b+c)^2 \geqslant (ab+bc+ca)^2$. Обозначим $x = ab+bc+ca$. Тогда требуемое неравенство равносильно неравенству

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geqslant x^2 \iff 3+2x-x^2 \geqslant 0 \iff (x-3)(x+1) \leqslant 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполнено, поскольку $x \geqslant 0$ и $x = ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2 = 3$.

9.6. Ответ: 201.

Первое решение. Заметим, что, если в наборе гирек у Васи есть гирька весом 101 г или больше, и Петя указал $k = l = m = 100$, то разбить такой набор на три части так, как требуется в условии задачи, невозможно: гирьку весом более 100 г нельзя распределить ни в какую группу. Если $n \leqslant 200$, то в наборе может быть гирька такого веса (например, $n-1$ гирек по 1 г и одна гирька весом $300-n+1 \geqslant 301-200 = 101$ г). Следовательно, $n \geqslant 201$. Покажем, что $n = 201$, т. е. каков бы ни был набор из 201 гирек общим весом 300 г и какие бы числа ни указал Петя, гирьки можно разбить нужным образом на три группы.

Итак, пусть у Васи 201 гирька, общим весом 300 г. Разобьем сначала гирьки на три группы по 100 г каждая (см. решение задачи №6 для 8 класса). Если $k = l = m = 100$, то это — нужное разбиение. В противном случае покажем, как его преобразовать, чтобы в первой группе вес гирек стал равен k грамм, во второй — l грамм, а в третьей — m грамм. Пусть для определенности $k \leqslant l \leqslant m$. При этом, в исходном разбиении первая группа состоит из 100 гирек по 1 г. Во торой и третьей группе вместе 101 гирька. Можно считать, что во второй гирек больше, чем в третьей, т. е. во второй группе не менее 51 гирьки. Рассмотрим два случая.

1). $l \geqslant 100$. Тогда $l = 100+x$, а $m = 100+y$ для некоторых целых x, y, $0 \leqslant x \leqslant y$. При этом, поскольку $l+m < 300$, то $x+y < 100$. Переложив из первой группы x гирек (по 1 г) во вторую группу и y гирек — в третью, получим нужное разбиение.

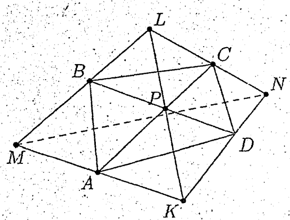
2). $l < 100$. Тогда Тогда $l = 100-x$, а $k = 100-y$ для некоторых целых x, y, $100 \geqslant x \geqslant y \geqslant 1$. Разобьем сначала вторую группу (в ней не менее 51 гирьки общим весом 100 г) на две равные по весу части, т. е. по 50 г. (Это можно сделать так же, как разбить на исходные вторую и третью 100-граммовые группы.) Затем одну из этих частей (т. е. некоторые гирьки общим весом 50 г) переложим из второй группы в первую, а из первой группы во вторую переложим 50 гирек весом по 1 г. Теперь и в первой и во второй группах общим весом по 100 г имеется не менее чем по 50 одnограммовых гирек. В первой группе группе можно выделить часть гирек весом y грамм: если $y \leqslant 50$, то можно взять y однограммовых гирек, а если $y > 50$, можно взять все гирьки, кроме y однограммовых. Точно так же и во второй группе можно выделить часть гирек общим весом x грамм. Переложив выделенные части в y и x грамм соответственно из первой и второй групп в третью группу, получим нужное разбиение.

Второе решение. Как и в первом решении получаем оценку: $n \geqslant 201$ и то, что если $n = 201$, то среди гирек имеется не менее 102 однограммовых. Поэтому при условии, что $k \leqslant l \leqslant m$ и, значит, $k \leqslant 100$, первую группу гирек можно составить из k однограммовых гирек. Останется $201-k$ гирек, общим весом $300-k$ грамм. Оценим сколько среди них однограммовых в зависимости от максимального веса гирек в наборе. Пронумеруем веса гирек в порядке (не строгого) убывания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{201-k}$. Пусть среди рассматриваемых имеется t однограммовых гирек. Тогда общий вес рассматриваемых гирек

$$300 - k \leqslant x_1 + (201 - k - 1 - t) \cdot 2 + s \;\Leftrightarrow\; t \geqslant x_1 + 100 - k.$$

В частности, $t \geqslant x_1$, поскольку $k \leqslant 100$. Покажем, как получить третью группу гирек общим весом m грамм. Легко видеть, что $m \leqslant x_1$. Рассмотрим суммы $S_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Либо какая-то из этих сумм окажется равна m, либо для некоторого j окажется: $S_j < m$, а $S_{j+1} > m$. В частности, $S_{j+1} - S_j \geqslant 2$, т. е. $x_{j=1} \geqslant 2$. Это значит, что среди слагаемых x_1, x_2, ..., x_j в сумме S_J нет единиц и, у этой суммы не хватает до значения m величины, меньшей, чем x_{j+1}, а значит меньшей, чем X_1, и, тем самым, меньшей, чем t. Поэтому к гирькам, вес которых равен S_j можно добавить недостающее количество ($m - S_j < t$) однограммовых гирек так, что получится набор гирек весом m грамм. Ясно, что осле того как построены первая и третья группы, удовлетворяющие условию, все оставшиеся гирьки составят вторую группу.

9.7. Положим $\angle APD = \angle BPC = \varphi$, тогда $\angle PKA = \angle PLB = \frac{\pi - \varphi}{2}$ в силу равнобедренности треугольников APK и BPL. Следовательно, $MK = ML$.



Далее, из условий $AP = PK$ и $BP = PL$ и теоремы о произведении длин отрезков хорд имеем, что $PK \cdot PC = AP \cdot PC = BP \cdot PD = PL \cdot PD$. Отсюда имеем, что $\frac{PK}{PL} = \frac{PD}{PC}$. Кроме того, $\angle KPD = \angle LPC = \frac{\varphi}{2}$. Поэтому треугольники KPD и LPC подобные. Значит, $\angle PKD = \angle PLC$, откуда следует, что $NK = NL$.

Таким образом имеем, что $MK = ML$ и $NK = NL$. Значит, точки M и N лежат на серединном перпендикуляре к отрезку KL, откуда следует требуемое.

9.8. Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных — не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $c = 20x + 20y - 2xy$. В частности, c — четное число. Полученное уравнение перепишем в виде

$$|x - 10| \cdot |y - 10| = |100 - c/2|. \qquad (1)$$

Заметим, что число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 42,44,46,48,50,52,54,56 или 58, в зависимости от того, сколько первоначальных минусов: 0,1,2,3,4,5,6,7 или 8, изменились на плюсы. Поэтому в равенстве (1) правая часть равна соответственно 79,78,77,76,75,74,73,72 или 71. Далее, оба сомножителя $|x - 10|$ и $|y - 10|$ не превосходят 10 (так как $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 10$). Из всех приведенных чисел лишь 72 представляется в виде произведения двух натуральных чисел, не превосходящих 10 ($72 = 8 \cdot 9$, например, при $x = 1$, $y = 2$). Это как раз соответствует случаю, когда ровно 7 исходных знаков " $-$ " поменялись на " $+$ ", т.е. ровно один из первоначальных минусов остался на месте.

10 класс

10.5. Ответ: $(1;\ 0;\ 1)$ и $(2;\ 1;\ 2)$

При $z = 0$, уравнение, очевидно, в целых числах решений не имеет. При $z = 1$, легко видеть, y может равняться только 0, и тогда $x = 1$. При $z = 2$ находим, что уравнению удовлетворяют только $y = 1$ и $x = 2$.

Пусть $z \geqslant 3$. Тогда $3^x + 7^y \ \vdots\ 8$. Покажем, что x — четное. Действительно, в противном случае 3^x имеет остаток 3 при делении на 8. А поскольку 7^y может иметь только остатки 1 или 7 при делении на 8, то сумма $3^x + 7^y$ не может делиться на 8. Итак, $x = 2a$ для некоторого целого неотрицательного a. Тогда $7^y = 4^z - 3^x = 2^{2z} - 3^{2a} = (2^z - 3^a)(2^z + 3^a)$. Следовательно, $2^z - 3^a$ и $2^z + 3^a$ являются степенями числа 7. При этом, так как $2^z + 3^a > 1$, то $2^z + 3^a \ \vdots\ 7$. Если и $2^z - 3^a > 1$, то и $2^z - 3^a \ \vdots\ 7$. А значит, $(2^z + 3^a) + (2^z - 3^a) \ \vdots\ 7$, т. е. $2 \cdot 2^z \ \vdots\ 7$, что невозможно. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $2^z - 3^a = 1$, т. е. $2^z - 1 = 3^a$. Так как $a \geqslant 1$ (поскольку $z \geqslant 3$), то $2^z - 1 \ \vdots\ 3$, что возможно только при четном z. Положим $z = 2c$ для некоторого целого неотрицательного c. Тогда $4^c - 3^a = 1$. При $a = 1$, находим $c = 1$ и, в результате, получаем уже ранее найденное решение: $x = 1$, $z = 2$, $y = 1$. Если $a > 1$, то $4^c = 3^a + 1$ имеет остаток 1 при делении на 9. Степень числа 4 имеет такой остаток только при c, кратном 3. Но тогда, так 4^3 имеет остаток 1 при делении на 7, 4^c будет иметь остаток 1 и при делении на 7. В результате, при таком c выражение $3^a = 4^c - 1$ должно делиться на 7 без остатка — противоречие. Таким образом, других решений, кроме двух ранее найденных, нет.

10.6. Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных — не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $c = 3nx + 3ny - 2xy$, что после домножения на 2 и группировки можно переписать в виде

$$|3n - 2x| \cdot |3n - 2y| = |9n^2 - 2c|. \qquad (1)$$

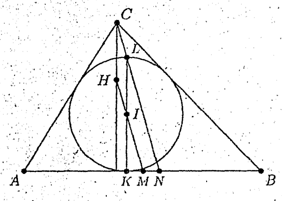
Заметим, что число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 35 или 37, в зависимости от того, сколько первоначальных знаков минусов: 0 или 1, изменились на плюсы. Далее, если бы n было четным, то при любой операции четность числа минусов не менялась бы, тогда как в итоге она поменялась на противоположную ($1 \to 36$). Стало быть n нечетно. Оба сомножителя $|3n - 2x|$ и $|3n - 2y|$ левой части (1) нечетны и не превосходят $3n$ (так как $0 \leqslant x \leqslant 3n$, $0 \leqslant y \leqslant 3n$). Если бы хоть один из них был равен $3n$, то правая часть (1) делилась бы на 3, тогда как ни при $c = 35$, ни при $c = 37$ она на 3 не делится. Поэтому оба сомножителя меньше $3n$, а значит, не превосходят $3n - 2$. Тогда $|9n^2 - 2c| \leqslant (3n - 2)^2$, в частности, $9n^2 - 2c \leqslant 9n^2 - 12n + 4$, откуда $n \leqslant \dfrac{c+2}{6} \leqslant \dfrac{37+2}{6} = \dfrac{13}{2}$, что, учитывая нечетность n, влечет $n \leqslant 5$. Заметим, что случай $n = 1$ не возможен, так как тогда в таблице 3×3 не могут оказаться 36 минусов. Осталось рассмотреть два случая:

1) $n = 3$. Имеем $|9-2x|\cdot|9-2y| = 81-70$ или $|9-2x|\cdot|9-2y| = 81-74$, т.е. $|9-2x|\cdot|9-2y| = 11$, что не возможно, так как оба сомножителя не превосходят 9, или $|9-2x|\cdot|9-2y| = 7$, что возможно (например, при $x=1$, $y=4$).

2) $n = 5$. Имеем $|15-2x|\cdot|15-2y| = 225-70$ или $|15-2x|\cdot|15-2y| = 225-74$, т.е. $|15-2x|\cdot|15-2y| = 155$ или $|15-2x|\cdot|15-2y| = 151$, что не возможно, так как оба сомножителя должны быть не больше 15.

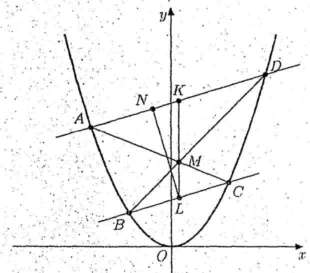
Таким образом единственно возможное значение $n = 3$. Легко видеть, что если в таблице 9×9 единственный минус стоит в левом нижнем углу, и мы поменяем знаки в верхней строке и четырех первых столбцах, то в полученной таблице будет ровно 36 минусов.

10.7. Рассмотрим окружность Γ, вписанную в треугольник ABC. Пусть K — точка касания Γ со стороной AB, и L — точка на окружности Γ, диаметрально противоположная точке K. Пусть N — точка пересечения прямой CL со стороной AB. Известно, что $AK = BN$ (достаточно рассмотреть гомотетию с центром в C, переводящую окружность Γ во вневписанную окружность, которая будет касаться стороны AB в точке N, и воспользоваться теоремой о касательных). Так как M — середина AB, то $KM = AM - AK = BM - BN = MN$. Следовательно, MI — средняя линия треугольника KLN, и поэтому $IM \parallel LN$. Если точки H, I, M лежат на одной прямой, то $HI \parallel CL$, и так как $CH \perp AB$ и $LI \perp AB$, то $CH \parallel LI$. Следовательно, $CHIL$ — параллелограмм, откуда $CH = LI$. Но $LI = r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Таким образом, $CH = r$.



10.8. Ответ: $S = \dfrac{(m+n)^2}{\sqrt{m-n}}$.

Координаты точки R будем обозначать x_R, y_R. Пусть $y = kx + a$ и $y = kx + b$ — уравнения прямых AD и BC соответственно. Тогда



$$\begin{cases} x_A^2 = y_A = kx_A + a, \\ x_D^2 = y_D = kx_D + a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B^2 = y_B = kx_B + b, \\ x_C^2 = y_C = kx_C + b. \end{cases}$$

Поэтому

$$k = x_A + x_D = x_B + x_C, \tag{1}$$

$$a = -x_A x_D, \quad b = -x_B x_C. \tag{2}$$

Так как K и L — середины сторон AD и BC соответственно, то

$$x_K = 0.5(x_A + x_D), \quad x_L = 0.5(x_B + x_C). \tag{3}$$

Известно, что точка M — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ — лежит на отрезке, соединяющим середины его оснований. С учетом (3), это означает, что отрезок KL, содержащий точку M, перпендикулярен оси Ox, и $x_M = x_K = x_L$. Пусть α — угол, образованный прямыми AD и BC с положительным направлением оси Ox, тогда $\operatorname{tg}\alpha = k$. Если LN — высота трапеции $ABCD$, то $\angle NLK = \alpha$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами: $LN \perp AD$, $KL \perp Ox$). Поэтому $LN = KL\cos\alpha$. С другой стороны $AD = (y_D - y_A)/\cancel{\cos}\,\sin\alpha$, $BC = (y_C - y_B)/\cancel{\cos}\,\sin\alpha$. Следовательно искомая площадь

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)LN = \frac{1}{2}(y_D - y_A + y_C - y_B)KL \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = [KL = m + n] =$$

$$= \frac{1}{2}(y_D - y_A + y_C - y_B) \cdot \frac{m+n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_D - y_A}{k} + \frac{y_C - y_B}{k}\right)(m+n) \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}(x_D - x_A + x_C - x_B)(m+n). \tag{4}$$

Пусть $y = k_1 x + c$ — уравнение прямой BD. Тогда

$$\begin{cases} x_B^2 = y_B = k_1 x_B + c, \\ x_D^2 = y_D = k_1 x_D + c, \end{cases} \implies \quad k_1 = x_B + x_D, \quad c = -x_B x_D. \tag{5}$$

Поэтому $y_M = 0.5k_1(x_A + x_D) + c = 0.5k_1(x_B + x_C) + c$. Следовательно, из (1) – (3) и (5) получаем

$$m = y_K - y_M = \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_A + x_D) - x_A x_D - \frac{1}{2}(x_B + x_D)(x_A + x_D) + x_B x_D =$$

$$= \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_A - x_B) - x_D(x_A - x_B) = \frac{1}{2}(x_A - x_B)(x_A - x_D).$$

$$n = y_M - y_L \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(x_B + x_D)(x_A + x_D) - x_B x_D - \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_A + x_D) + x_B x_C =$$

$$= \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_B - x_A) - x_B(x_D - x_C) = [x_D - x_C \overset{(1)}{=} x_B - x_A] = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_A + x_D - 2x_B) =$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_C - x_B).$$

Тогда $m + n = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_C - x_B + x_D - x_A)$. Следовательно, равенство (4) можно переписать в виде

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(m+n)}{x_B - x_A}(m+n) = \frac{(m+n)^2}{x_B - x_A}.$$

Заметим, что

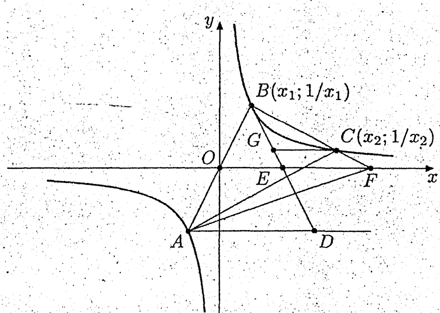
$$m - n = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_D - x_A - x_C + x_B) = [x_D - x_C \overset{(1)}{=} x_B - x_A] = (x_B - x_A)^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$S = \frac{(m+n)^2}{x_B - x_A} = \frac{(m+n)^2}{\sqrt{m-n}}.$$

11 класс

11.5. Пусть F и E — точки пересечения прямой BC и касательной к гиперболе с осью абсцисс соответственно, точка D — точка пересечения касательной с прямой, проходящей через точку A параллельно оси абсцисс (см. рис.).



Так как точек A и B симметричны относительно начала координат, то $A(-x_1; -1/x_1)$. Известно, что производная функции в точке x_1 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_1. Поэтому

$$\operatorname{tg}\angle BEO = \operatorname{tg}(\pi - \angle BEF) = -\operatorname{tg}\angle BEF = -(1/x)'\Big|_{x=x_1} = \frac{1}{x_1^2}.$$

С другой стороны, $\operatorname{tg}\angle BAD = \operatorname{tg}\angle BOE = 1/x_1 : x_1 = 1/x_1^2$, т.е.

$$\angle BAD = \angle BEO. \qquad (1)$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg}\angle BFE = \operatorname{tg}\angle BCG = \frac{1/x_1 - 1/x_2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_1x_2}$$

и

$$\operatorname{tg}\angle CAD = \frac{1/x_2 + 1/x_1}{x_2 + x_1} = \frac{1}{x_1x_2}.$$

Следовательно, $\angle CAD = \angle CFE = \angle BFE$.

Поэтому

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD \overset{(1)}{=} \angle BEO - \angle BFE = \angle FBE = \angle CBE,$$

что и требовалось доказать.

11.6. б) Рассмотрим последовательность чисел

$$X_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4\cdot(10^n - 1)}{9} + 1.$$

В десятичной записи таких чисел нет нулей. Действительно, так как $10^k - 1 = \underbrace{99\ldots99}_{k}$, то

$$X_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4\cdot(10^n - 1)}{9} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{2n} + 4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6.$$

Сразу отметим, что сумма цифр такого числа: $S(X_n) = 1\cdot n + 5\cdot(n-1) + 6 = 6n + 1$. Далее,

$$X_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4\cdot(10^n - 1)}{9} + 1 = \frac{10^{2n} - 1 + 4\cdot(10^n - 1) + 9}{9} =$$

$$= \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2 -$$

квадрат натурального числа. (Поскольку $S(10^n + 2) = 3$, то $10^n + 2$ делится на 3.) Остается заметить, что если $n = 6m^2 + 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), то $S(X_n) = 6n + 1 = 6(6m^2 + 2m) + 1 = (6m + 1)^2$. Поэтому при любом $m \in \mathbb{N}$ числа X_{6m^2+2m} удовлетворяют всем условиям задачи, а таких чисел бесконечно много.

11.7. Ответ: $n = 5$, $n = 11$.

Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных – не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $c = nx + ny - 2xy$, что после домножения на 2 и группировки можно переписать в виде

$$(n - 2x) \cdot (n - 2y) = n^2 - 2c. \qquad (1)$$

Заметим, что число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 7, 9 или 11, в зависимости от того, сколько первоначальных знаков минусов: 0, 1 или 2, изменились на плюсы. Далее, если бы n было четным, то при любой операции четность числа минусов не менялась бы, тогда как в итоге она поменялась на противоположную ($2 \to 9$). Стало быть n нечетно. Оба сомножителя $(n - 2x)$ и $(n - 2y)$ левой части (1) нечетны и их модули не превосходят n (так как $0 \leqslant x \leqslant n$, $0 \leqslant y \leqslant n$). Если хоть один из них в точности равен $\pm n$, то правая часть (1) делится на n, поэтому c делится на n, а тогда $n \leqslant c \leqslant 11$. Если же модули обоих сомножителей меньше n, а значит, в виду нечетности n, не превосходят $n - 2$, то $|n^2 - 2c| \leqslant (n - 2)^2$, в частности, $n^2 - 2c \leqslant n^2 - 4n + 4$, откуда $n \leqslant \frac{c+2}{2} \leqslant \frac{13}{2}$, что, учитывая нечетность n, влечет $n \leqslant 5$.

В любом случае $n \leqslant 11$. Кроме того, $n \geqslant 3$, так как $n = 1$ не подходит по смыслу задачи.

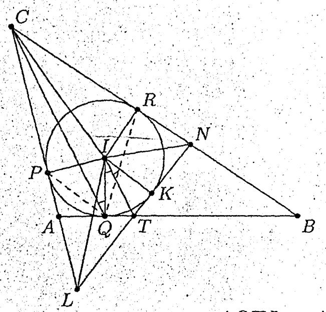
Рассмотрим крайние случаи.

1) $n = 3$. Имеем $(3-2x)\cdot(3-2y) = 9-14 = -5$, или $(3-2x)\cdot(3-2y) = 9-18 = -9$ или $(3-2x)\cdot(3-2y) = 9-22 = -13$. Здесь только -9 можно представить в виде двух сомножителей, по модулю не превосходящих трех. Но и это возможно лишь при $x = 3$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 3$. Однако, очевидно, что оба эти случая не реализуются.

2) $n = 5$. Рассмотрим таблицу, в которой два минуса стоят в первом столбце в двух нижних клетках, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Поменяем знаки в первом столбце и двух верхних строках. Легко подсчитать, что в результате получится таблица, содержащая ровно 9 минусов. Следовательно, минимальное значение n равно 5.

3) $n = 11$. Рассмотрим таблицу, в которой два минуса стоят в первом столбце в двух нижних клетках, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Поменяем знаки в первом столбце. Легко видеть, что в результате получится таблица, содержащая ровно 9 минусов. Следовательно, максимальное значение n равно 11.

11.8. Обозначим $x = \angle CQT$, $y = \angle QCI$, $2\alpha = \angle BAC$, $2\beta = \angle ABC$, $2\gamma = \angle ACB$. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Нетрудно заметить, что



$$\angle CIQ = 360^\circ - 90^\circ - 2\alpha - \gamma =$$

$$= 270^\circ - (\alpha+\beta+\gamma) - \alpha + \beta = 180^\circ - \alpha + \beta.$$

Поэтому

$$x + y = 180^\circ - \angle CIQ = \alpha - \beta. \qquad (1)$$

Кроме того,

$$\angle QTL = \angle NTB = 180^\circ - 2(90^\circ - x) = 2x,$$

откуда

$$\angle ILT = 0.5\angle ALT = 0.5(2\alpha - 2x) = \alpha - x,\ \angle INT = 0.5\angle CNT = 0.5(2\beta + 2x) = \beta + x.$$

Тогда

$$LT = LK - KT = r\operatorname{ctg}\angle ILT - r\operatorname{tg}x = r(\operatorname{ctg}(\alpha - x) - \operatorname{tg}x),$$

$$NT = NK + KT = r\operatorname{ctg}\angle INT + r\operatorname{tg}x = r(\operatorname{ctg}(\beta + x) + \operatorname{tg}x).$$

Следовательно, утверждение задачи будет следовать из равенства

$$\operatorname{ctg}(\alpha - x) - \operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}(\beta + x) + \operatorname{tg}x. \qquad (2)$$

Поскольку

$$\operatorname{ctg}(\alpha - x) - \operatorname{tg}x = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}x} - \operatorname{tg}x = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}x},$$

$$\operatorname{ctg}(\beta + x) - \operatorname{tg}x = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}x} + \operatorname{tg}x = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}x},$$

то (2) равносильно

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}x. \qquad (3)$$

Из теоремы синусов для треугольника CQT следует, что $\dfrac{r}{\sin y} = \dfrac{CI}{\sin x}$. Так как $CI = r/\sin\gamma$, то $\sin y = \sin\gamma \cdot \sin x$, т.е., с учетом (1) и равенства $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, имеем $\sin(\alpha - \beta - x) = \sin x \cdot \cos(\alpha + \beta)$. Тогда

$$\sin x \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)\cos x - \cos(\alpha - \beta)\sin x,$$

откуда $\sin x(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = \sin(\alpha - \beta)\cos x$, что равносильно

$$2\sin x\cos\alpha\cos\beta = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\cos x, \iff 2\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta,$$

т.е. равносильно (3), что и требовалось.