Министерство образования Республики Беларусь

« LXI »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Гомель 2011

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 61-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

<u>**Авторы задач**</u>

Барабанов Е.А. (8.3, 10.4, 11.4)
Берник В.И. (10.2)
Воронович И.И. (9.1, 9.3, 10.3, 11.3)
Городнин И.И. (8.4, 9.4)
Карамзин В.П. (10.1, 11.1)
Каскевич В.И. (9.2, 11.2)
Мазаник С.А. (8.2)
Чернов С.А. (8.1)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ca=abc$. Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\right)-$$
$$-\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

8.2. Найдите все x, удовлетворяющие уравнению

$$[x^2]-[-x^2]-8[x]+2=0.$$

(Здесь через $[y]$ обозначена целая часть числа y, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее y.)

8.3. **а)** Докажите, что четырёхугольник является параллелограммом, если его диагонали и два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

б) Можно ли утверждать, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если одна из его диагоналей и два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон, пересекаются все в одной точке?

8.4. Дано множество, состоящее из девяти элементов. Нужно так покрасить его элементы в два цвета (каждый элемент — в один цвет), чтобы количество тех его четырёхэлементных подмножеств, которые содержат элементы обоих цветов, было наибольшим возможным.

Найдите, чему равно это наибольшее значение.

9 класс

9.1. Для некоторого квадратного трехчлена $f(x)$ и трёх попарно различных действительных чисел a, b, c выполнены равенства

$$f(a)=bc,\quad f(b)=ac,\quad f(c)=ab.$$

Найдите значение $f(a+b+c)$.

9.2. Докажите, что в любом натуральном шестизначном числе, делящемся на 101, можно поменять местами две цифры так, что получившееся число также будет делиться на 101.

9.3. Точки A_1 и B_1 отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $A_1B_1 \parallel AB$. Точки A_2 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A_1 и B_1 на сторону AB.

Докажите, что $AC = AB_2 + CB_1$ если и только если $BC = BA_2 + CA_1$.

9.4. Дано множество, состоящее из восьми элементов. Нужно так покрасить его элементы в два цвета (каждый элемент — в один цвет), чтобы количество тех его подмножеств, которые содержат элементы обоих цветов, было наибольшим возможным.

Найдите, чему равно это наибольшее значение.

10 класс

10.1. Найдите все возможные целые ненулевые числа a, b, c, такие, что два различных корня уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются также и корнями уравнения $x^3 + bx^2 + ax + c = 0$.

10.2. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b выполнено неравенство

$$|a\sqrt{3} - b\sqrt{5}| > \frac{4}{4a + 5b}.$$

10.3. Точки M и N — середины сторон AC и BC треугольника ABC.

Докажите, что окружность, проходящая через точки C, M и N, касается стороны AB тогда и только тогда, когда $AB = \dfrac{AC + BC}{\sqrt{2}}$.

10.4. Какое наименьшее число N четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, нужно выбрать, чтобы, какие бы две различные из этих цифр ни взять, среди выбранных N чисел найдётся хотя бы одно число, содержащее обе эти цифры?

11 класс

11.1. Действительные ненулевые числа a, b, c ($b > 0$) таковы, что два различных корня уравнения $ax^2 + bx - c = 0$ являются также и корнями уравнения $x^3 + bx^2 + ax - c = 0$.

Докажите, что имеет место неравенство

а) $abc > 16$;

б) $abc \geqslant \dfrac{3125}{108}$.

11.2. Найдите $\left\{\dfrac{2009!}{2011}\right\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

11.3. Точка M — середина стороны AB остроугольного треугольника ABC, точки P и Q — основания высот AP и BQ этого треугольника. Известно, что окружность, проходящая через точки B, M и P, касается стороны AC.

Докажите, что окружность, проходящая через точки A, M и Q, касается продолжения стороны BC.

11.4. Какое наименьшее число N четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, нужно выбрать, чтобы, какие бы две различные из этих цифр ни взять, обе эти цифры присутствуют

а) хотя бы в одном из выбранных N чисел?

б*) хотя бы в одном, но не более чем в двух, из выбранных N чисел?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ: 1.

Из условия следует, что $1/a+1/b+1/c=1$. Обозначим $x=1/a$, $y=1/b$, $z=1/c$. Тогда

$$x+y+z=1. \tag{1}$$

Перепишем данное в условии выражение

$$A=x\left(y+z+\frac{yz}{y+z}\right)+y\left(z+x+\frac{zx}{z+x}\right)+z\left(x+y+\frac{xy}{x+y}\right)-$$
$$-\frac{xyz}{xy+yz+zx}\left(x+y+z+\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}\right)+x^2+y^2+z^2.$$

Учитывая (1), получим

$$A=x\left(1-x+\frac{yz}{y+z}\right)+y\left(1-y+\frac{zx}{z+x}\right)+z\left(1-z+\frac{xy}{x+y}\right)-$$
$$-\frac{xyz}{xy+yz+zx}\left(1+\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}\right)+x^2+y^2+z^2=$$
$$=x-x^2+\frac{xyz}{y+z}+y-y^2+\frac{xyz}{x+z}+z-z^2+\frac{xyz}{x+y}+x^2+y^2+z^2-\frac{xyz}{xy+yz+zx}-$$
$$-\left(\frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot\frac{xy}{x+y}+\frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot\frac{yz}{y+z}+\frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot\frac{zx}{z+x}\right).$$

Приводя подобные и группируя, получим

$$A=1-\left(\frac{xyz}{y+z}-\frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot\frac{yz}{y+z}\right)+\left(\frac{xyz}{x+z}-\frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot\frac{xz}{x+z}\right)+$$
$$+\left(\frac{xyz}{x+y}-\frac{xyz}{xy+yz+zx}\cdot\frac{xy}{x+y}\right)-\frac{xyz}{xy+yz+zx}=$$
$$=1+\frac{xyz(xy+zx)}{(xy+yz+zx)(y+z)}+\frac{xyz(xz+yz)}{(xy+yz+zx)(x+y)}+$$
$$+\frac{xyz(zy+xy)}{(xy+yz+zx)(z+x)}-\frac{xyz}{xy+yz+zx}=$$
$$=1+\frac{x^2yz}{xy+yz+zx}+\frac{xyz^2}{xy+yz+zx}+\frac{xy^2z}{xy+yz+zx}-\frac{xyz}{xy+yz+zx}=$$
$$==1+\frac{xyz(x+y+z)}{xy+yz+zx}-\frac{xyz}{xy+yz+zx}=1.$$

8.2. Ответ: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$.

Так как число $8[x]$ целое, то исходное уравнение может быть переписано в виде $[x^2-4[x]+1]-[-x^2-4[x]+1]=0$. Обозначим $y=x^2-4[x]+1$, тогда $[y]=[-y]$. Легко видеть, то при $y>0$ имеем $0\leqslant[y]=[-y]\leqslant-1$, что невозможно. Аналогично при $y<0$ имеем $-1\geqslant[y]=[-y]\geqslant 0$. Поэтому $y=0$, т.е. $x^2-4[x]+1=0$. Заметим, что при $x<1$ имеем $[x]\leqslant 0$, поэтому $x^2-4[x]+1\geqslant 1>0$, следовательно искомые $x\geqslant 1$. Пусть $x=n+a$, где $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant a<1$. Тогда

$$0=x^2-4[x]+1=n^2+2na+a^2-4n+1=n(n-4)+2na+a^2\geqslant n(n-4),$$

откуда $n\leqslant 4$. Следовательно, $1\leqslant n\leqslant 4$.

При $[x]=n=1$ имеем $x^2-4[x]+1=x^2-4+1=x^2-3=0$, откуда $x=\sqrt{3}$.

При $[x]=n=2$ имеем $x^2-4[x]+1=x^2-8+1=x^2-7=0$, откуда $x=\sqrt{7}$.

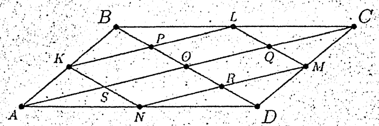
При $[x]=n=3$ имеем $x^2-4[x]+1=x^2-12+1=x^2-11=0$, откуда $x=\sqrt{11}$.

При $[x]=n=4$ имеем $x^2-4[x]+1=x^2-16+1=x^2-15=0$, откуда $x=\sqrt{15}<4$, что противоречит условию $[x]=4$.

8.3. Ответ: **б)** нет, не верно.

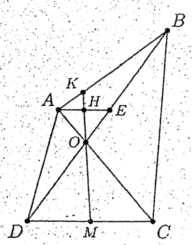
а) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, а K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Допустим, что диагонали AC, BD и отрезки KM, LN пересекаются все четыре в одной точке, которую обозначим через O.

Первое решение. Так как KL и MN — средние линии в треугольниках ABC и CDA соответственно, то $KL\parallel AC$, $MN\parallel AC$ и $KL=MN=\frac{1}{2}AC$. Поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Далее, обозначим через P и R точки пересечения диагонали BD с отрезками KL и MN соответственно, а через Q и S — точки пересечения диагонали AC с отрезками LM и KN соответственно (см. рис.).



Так как $KL\parallel AC$ и по условию $BK=KA$, то по теореме Фалеса $BP=PO$, а так как $MN\parallel AC$ и по условию $CM=MD$, то по теореме Фалеса $DR=RO$. В частности, $BO=2\cdot PO$ и $DO=2\cdot RO$. Аналогично, $CQ=QO$ и $AS=SO$, а значит, $CO=2\cdot QO$ и $AO=2\cdot SO$. Поскольку $KLMN$ — параллелограмм, то $PO=RO$ (так как $\triangle KPO=\triangle MRO$ по сторонам $KP=PM$ и прилежащим к ним углам). Поэтому $BO=2\cdot PO=2\cdot RO=DO$. Аналогично получаем $CO=AO$. Следовательно, диагонали AC и BD в четырёхугольнике $ABCD$ точкой O их пересечения делятся пополам, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

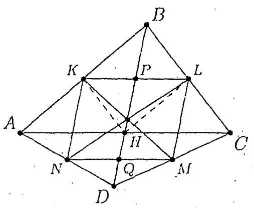
Второе решение. Допустим, что прямые AB и CD не параллельны. Проведём через точку A прямую, параллельную прямой CD. Пусть эта прямая пересекает диагональ BD (или её продолжение) в точке E. Через H обозначим середину отрезка AE (см. рис.). Тогда четырёхугольник $AECD$ — трапеция с основаниями AE и CD. Хорошо известно (и несложно доказывается), что в трапеции диагонали и отрезок, соединяющий середины её оснований, пересекаются все три в одной точке. Следовательно, так как O — точка пересечения диагоналей AC и DE трапеции $AECD$, а точка M — середина её основания CD, то прямая MO пересекает основание AE трапеции в его середине — точке H. Значит, HK — средняя линия $\triangle ABE$ и поэтому $HK\parallel BE$, что невозможно. Следовательно, $AB\parallel CD$. Точно так же доказывается, что $AD\parallel BC$, а значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.



Отметим, что поскольку утверждение, обратное к установленному в п. **а**) задачи, очевидно верно, то, следовательно, параллелограмм можно равносильным образом определить как выпуклый четырёхугольник, диагонали которого и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются все четыре в одной точке.

б) Приведём пример выпуклого четырёхугольника, одна из диагоналей которого и отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются все три водной точке, но который не является параллелограммом.

Возьмём какой-либо $\triangle ABC$ и на продолжении его медианы BH за точку H отметим точку D, так, чтобы $DH \neq BH$. Получившийся выпуклый четырёхугольник $ABCD$ — не параллелограмм, поскольку его диагонали точкой H их пересечения не делятся обе пополам. Докажем, что $ABCD$ — искомый четырёхугольник. Пусть K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD и DA соответственно, а P и Q — точки пересечения диагонали BD и соответственно отрезков KL и MN (см. рис.). Так как четырёхугольник $BLHK$ — параллелограмм (KH и LH — средние линии $\triangle ABC$), а BH и KL — его диагонали, то $KP = PL$, т. е. точка P — середина отрезка KL. Аналогично, точка Q — середина отрезка MN. Далее, поскольку четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм (доказательство см. в первом решении п. **а**)), то его диагонали KM и LN и отрезок PQ, соединяющий середины его противоположных сторон, пересекаются все в одной точке. Но, с другой стороны, KM и LN — это отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, а отрезок PQ лежит на его диагонали BD. Следовательно, в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются все три в одной точке.



Видим, что в построенном четырёхугольнике $ABCD$ точка пересечения H его диагоналей делит диагональ AC пополам. Для полноты изложения отметим, что верно и обратное утверждение: если в выпуклом четырёхугольнике одна из диагоналей и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются все три в одной точке, то точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит другую его диагональ пополам.

8.4. Ответ: 120.

Пусть, для определённости, используемые цвета — белый и чёрный. Подмножество, в состав которого входят и белые и чёрные элементы, будем называть разноцветным.

Первое решение. Пусть мы покрасили k элементов 9-иэлементного множества в белый цвет, а остальные $9 - k$ — в чёрный. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что белых элементов не более половины, т. е. что $k \leqslant 4$. Допустим, что $k \leqslant 3$, тогда $9 - k \geqslant 6$. Возьмём какой-либо чёрный элемент A и перекрасим его в белый цвет. Как изменится при этом число разноцветных подмножеств? Перестанут быть разноцветными только те 4-хэлементые подмножества, в которые входили чёрный A и ещё 3 белых элемента. Если $k < 3$, то таких 4-хэлементых подмножеств нет. Если же $k = 3$, то такое подмножество только одно — оно состояло из чёрного A и всех трёх белых элементов. Итак, в совокупности всех тех 4-хэлементых подмножеств, которые были до перекраски разноцветными, перестаёт быть после перекраски разноцветным не более одного подмножества. Но после перекраски в совокупность разноцветных 4-хэлементых подмножеств добавляется по меньшей мере одно новое подмножество — то, которое до перекраски состояло из A и каких-то 3-х других чёрных элементов (в действительности, как легко видеть, добавляется больше, чем одно, подмножество, но этот факт нам не нужен). Итак, если при некоторой раскраске 9-иэлементого множества в два цвета число разноцветных его 4-хэлементых подмножеств наибольшее среди всех раскрасок, то можем считать, что в этой раскраске 4 белых и 5 чёрных элементов.

Остаётся найти, сколько всего при такой раскраске (4 белых и 5 чёрных элементов) имеется различных разноцветных 4-хэлементых подмножеств. Подмножеств, состоящих из 1-ого белого и 3-х чёрных элементов, ровно $4 \cdot 10 = 40$. Подмножеств, состоящих из 2-х белых и 2-х чёрных элементов, ровно $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 6 \cdot 10 = 60$. Наконец, Подмножеств, состоящих из 3-х белых и 1-ого чёрного элемента, ровно $4 \cdot 5 = 20$. Итак, различных разноцветных 4-хэлементых подмножеств ровно $40 + 60 + 20 = 120$.

Найти это число можно несколько проще: число всех 4-хэлементых подмножеств в множестве из 9-и элементов равно $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$. Но при такой раскраске (4 белых и 5 чёрных элементов) только 6 четырёхэлементных подмножества не являются разноцветными: одно подмножество состоит из 4-х белых элементов, а пять других — из 4-х чёрных. Значит, число различных разноцветных 4-хэлементных подмножеств равно $126 - 6 = 120$.

Второе решение. Назовём подмножество одноцветным, если оно состоит только из элементов одного цвета. Если элементы некоторого множества покрашены, то любое непустое его подмножество либо разноцветное, либо одноцветное. Поэтому если при некоторой раскраске множества из 9-и элементов в два цвета число его разноцветных 4-хэлементных подмножеств наибольшее среди всех таких раскрасок, то при этой раскраске число его одноцветных 4-хэлементных подмножеств — наименьшее возможное.

Поэтому будем искать раскраску, при которой число одноцветных 4-хэлементных подмножеств наименьшее (эта раскраска, как сказано, даёт наибольшее возможное число разноцветных 4 - хэлементных подмножеств). Если раскраска множества из 9-и элементов содержит не менее 6-и элементов одного цвета, то тогда число одноцветных 4 - хэлементных подмножеств также не менее $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Если же раскраска содержит 4 элемента одного и 5 элементов другого цвета, то для неё число одноцветных 4 - хэлементных подмножеств равно $1 + 5 = 6$. Следовательно, наибольшее число разноцветных 4 - хэлементных подмножеств получается при той раскраске в два цвета, в которой 4 элемента белые и 5 элементов чёрные. Число таких подмножеств находится точно так же, как и в конце первого решения.

Заметим, что ещё одно решение этой задачи можно получить непосредственным перебором всех существенно различных (с точки зрения условия задачи) раскрасок множества из 9-и элементов в два цвета. Поскольку две раскраски множества в два цвета, у которых совпадают количества элементов одного (не обязательно одного и того же) цвета, дают одно и то же число разноцветных подмножеств, то достаточно рассмотреть пять раскрасок, имеющих соответственно ровно 0, 1, 2, 3, 4 белые клетки. Для каждой из этих пяти раскрасок найти число разноцветных 4-элементных подмножеств (аналогично тому, как это сделано в конце первого решения) и выбрать из найденных чисел наибольшее.

9 класс

9.1. Ответ: $ab + bc + ac$.

Пусть $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Тогда

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = bc, \quad \alpha b^2 + \beta b + \gamma = ac, \quad \alpha c^2 + \beta c + \gamma = ab. \tag{1}$$

Вычитая из первого уравнения второе и из первого третье, получим

$$\alpha(a^2 - b^2) + \beta(a - b) = c(b - a), \quad \alpha(a^2 - c^2) + \beta(a - c) = b(c - a).$$

Поскольку числа a, b, c попарно различны, то, сокращая первое равенство на $(a - b)$ и второе на $(a - c)$, получим

$$\alpha(a + b) + \beta = -c, \quad \alpha(a + c) + \beta = -b. \tag{2}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $\alpha(b - c) = b - c$. Сокращая на $b - c \neq 0$, получим $\alpha = 1$. Тогда из (2) имеем $\beta = -(a + b + c)$, а из (1) $- \gamma = ab + bc + ac$.

Таким образом $f(x) = x^2 - (a+b+c)x + (ab+bc+ac)$, откуда $f(a+b+c) = ab+bc+ac$.

9.2. Если в числе есть одинаковые цифры, то доказывать нечего, так как переставив их местами получим то же самое число. Поэтому рассмотрим кратное 101 шестизначное число A, у которого все цифры различны. Пусть $A = \overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = 10^5 \cdot a_5 + 10^4 \cdot a_4 + 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0$, и пусть число B получено перестановкой в числе A цифр a_k и a_m ($k > m$, $a_k \neq a_m$).Рассмотрим разность:

$$A - B = (10^k \cdot a_k + 10^m \cdot a_m) - (10^k \cdot a_m + 10^m \cdot a_k) =$$

$$(10^k - 10^m)(a_k - a_m) = 10^m(10^{k-m} - 1)(a_k - a_m).$$

Так 101 — простое число, то 10^m не делится на 101 ни при каком m, и $(a_k - a_m) \neq 0$ также не делится на 101, какие бы ни были цифры $a_k \neq a_m$. Но можно подобрать такие k и m, что число $(10^{k-m} - 1) = \underbrace{99\ldots9}_{k-m} = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{k-m}$ делится на 101. Действительно, при $k - m = 4$ получаем число $1111 = 101 \cdot 11$ — делится на 101. Итак, если в данном числе A, кратном 101, переставить цифры, стоящие в первом и предпоследнем разрядах, или во втором и последнем разрядах, о получится число B, такое что $A - B$ делится на 101. Отсюда следует, что и B делится на 101.

9.3. Обозначим $A_1A_2 = B_1B_2 = 2x$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда имеем (см. рис. 1)

$$AC = AB_2 + CB_1 \iff b = c - BB_2 + a - BB_1 = c + a - 2x \operatorname{ctg}\beta - \frac{2x}{\sin\beta} \iff$$

$$a + c - b = 2x\left(\operatorname{ctg}\beta + \frac{1}{\sin}\beta\right) = 2x \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

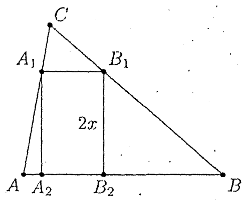


Рис. 1

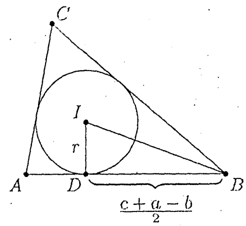


Рис. 2

Заметим, что (см. рис. 2) $\dfrac{a+c-b}{2} = r\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Таким образом, условие $AC = AB_2 + CB_1$ равносильно тому, что $A_1A_2 = B_1B_2$ — удвоенный радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Аналогично, этому же равносильно и условие $BC = BA_2 + CA_1$.

9.4. Ответ: 225.

Пусть, для определённости, используемые цвета — белый и чёрный. Подмножество, в состав которого входят и белые и чёрные элементы, будем называть разноцветным, а подмножество, состоящее из элементов одного цвета, — одноцветным. Дальше мы будем пользоваться следующим хорошо известным фактом: число всех непустых подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно $2^n - 1$.

Если элементы некоторого множества покрашены, то любое непустое его подмножество либо разноцветное, либо одноцветное. Поэтому если при некоторой раскраске множества из 8-и элементов в два цвета число его разноцветных подмножеств наибольшее среди всех таких раскрасок, то при этой раскраске число его одноцветных подмножеств — наименьшее возможное.

Поэтому будем искать раскраску, при которой число одноцветных подмножеств наименьшее (эта раскраска, как сказано, даёт наибольшее возможное число разноцветных подмножеств). Если раскраска множества из 8-и элементов содержит не менее 5-и элементов одного цвета, то число его одноцветных подмножеств не менее 2^5-1. Если же раскраска содержит по 4 элемента каждого из двух цветов, то для неё число одноцветных подмножеств равно $(2^4-1)+(2^4-1) = 2^5-2 < 2^5-1$. Следовательно, наибольшее число разноцветных подмножеств получается при той раскраске в два цвета, в которой 4 элемента белые и 4 элемента чёрные. Так как при такой раскраске число одноцветных подмножеств, как подсчитано выше, равно $2^5 - 2$, а число всех непустых подмножеств множества из 8-и элементов равно $2^8 - 1$, то при этой раскраске число разноцветных подмножеств равно $2^8 - 1 - (2^5 - 2) = 2^5(2^3 - 1) + 1 = 32 \cdot 7 + 1 = 224 + 1 = 225$.

10 класс

10.1. Ответ: $a = 2,\ b = 4,\ c = -4$.

Обозначим $x_1,\ x_2$ — различные корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$, т.е. нули функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = x^3 + bx^2 + ax + c$. Заметим, что из условия следует $f(0) = g(0) = c \neq 0$. Пусть $F(x) = g(x) - f(x)$. Тогда $0,\ x_1,\ x_2$ различные нули многочлена $F(x)$. Поэтому $F(x) = x(x - x_1)(x - x_2)$, откуда

$$x^3+(b-a)x^2+(a-b)x = x(x-x_1)(x-x_2) \implies (b-a)x+(a-b) = -(x_1+x_2)x+x_1x_2\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $x_1+x_2=a-b$ и $x_1x_2=a-b$. По теореме Виета $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$, откуда, в частности, следует, что $c=-b$. Кроме того $a-b=-b/a$ или $a^2-ab=-b$, т.е. $a^2=b(a-1)$. Заметим, что тогда $a\neq 1$, и, значит,

$$b=\frac{a^2}{a-1}=\frac{(a^2-1)+1}{a-1}=a+1+\frac{1}{a-1}.$$

Поскольку a и b — целые числа, то и число $1/(a-1)$ так же целое, что возможно лишь при $a=0$ и $a=2$. Но $a\neq 0$, Следовательно, $a=2$ и тогда $b=4$, $c=-4$.

Проверим, что найденная тройка чисел удовлетворяет условию задачи. Действительно, уравнение $2x^2+4x-4=0$ имеет два различных корня $-1\pm\sqrt{3}$, которые являются корнями уравнения x^3+4x^2-2x-4 поскольку

$$(-1\pm\sqrt{3})^3+4\cdot(-1\pm\sqrt{3})^2-2\cdot(-1\pm\sqrt{3})-4=$$

$$=-1\pm 3\sqrt{3}-3\cdot 3\pm 3\sqrt{3}+4\mp 8\sqrt{3}+12-2\pm 2\sqrt{3}-4=0.$$

10.2. Домножив левую часть требуемого неравенства на $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}$, получим $|a\sqrt{3}-b\sqrt{5}|(a\sqrt{3}+b\sqrt{5})=|3a^2-5b^2|$. Если бы $|3a^2-5b^2|=1$ при некоторых натуральных a и b, то или $3a^2-5b^2=1$, или $3a^2-5b^2=-1$. Однако в первом случае $3a^2$ должно быть сравнимо с 1 по модулю 5, чего быть не может, так $3a^2\equiv 0$ при $a\equiv 0$, $3a^2\equiv 3$ при $a\equiv\pm 1$, $3a^2\equiv 12\equiv 2$ при $a\equiv\pm 2$ (все сравнения по модулю 5). Во втором случае $-5b^2$ должно быть сравнимо с (-1) по модулю 3, т.е. $5b^2$ должно быть сравнимо с 1 по модулю 3, чего также быть не может, поскольку $5b^2\equiv 0$ при $b\equiv 0$, $5b^2\equiv 5\equiv 2$ при $b\equiv\pm 1$ (все сравнения по модулю 3).

Следовательно, $|3a^2-5b^2|\neq 1$ при всех натуральных a и b, откуда $|3a^2-5b^2|\geqslant 2$ при всех натуральных a и b. Поэтому

$$|a\sqrt{3}-b\sqrt{5}|=\frac{|3a^2-5b^2|}{a\sqrt{3}+b\sqrt{5}}\geqslant\frac{2}{a\sqrt{3}+b\sqrt{5}}=\frac{4}{2a\sqrt{3}+2b\sqrt{5}}\geqslant[2\sqrt{3}<4,\ 2\sqrt{5}<5]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{4}{4a+5b},$$

что и требовалось доказать.

10.3. Пусть I — центр окружности Γ, проходящей через точки C, M, N; r — радиус этой окружности. Пусть точки P и Q точки пересечения отрезков AI и BI с окружностью Γ; H — основания перпендикуляра, опущенного из точки I на сторону AB. Обозначим $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $x=AP$, $y=BQ$, $l=IH$.

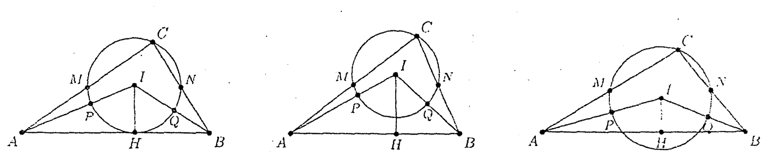


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Очевидно, что $l = r$ тогда и только тогда, когда Γ касается прямой AB (H — точка касания. Если H лежит на стороне AB, то $c = AH + HB$ (см. рис. 1 — 3). Из теоремы о касательных и секущих получим

$$b \cdot \frac{b}{2} = x(x + 2r), \quad a \cdot \frac{a}{2} = y(y + 2r), \tag{1}$$

Если H лежит на стороне AB, то $c = AH + HB$. Поэтому

$$c = \sqrt{(x+r)^2 - l^2} + \sqrt{(y+r)^2 - l^2} = \sqrt{x^2 + 2xr + r^2 - l^2} + \sqrt{y^2 + 2yr + r^2 - l^2} =$$

$$= \sqrt{x(x+2r) + r^2 - l^2} + \sqrt{y(y+2r) + r^2 - l^2} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} + \sqrt{\frac{b^2}{2} + r^2 - l^2}. \tag{2}$$

Очевидно, что при $l > r$ из (2) следует $c < \dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, при $l < r$ из (2) следует $c > \dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $c = \dfrac{a}{\sqrt{2}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ тогда и только тогда, когда $l = r$, т.е. окружность, проходящая через точки C, M, N, касается стороны AB.

Отметим, что при $c = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ не возможно расположение, при котором H лежит не на стороне AB, а на ее продолжении. Действительно, в этом случае (не нарушая общности, считаем, что H лежит левее точки A, см. рис. 4) имеем $c = BH - AH$, т.е.

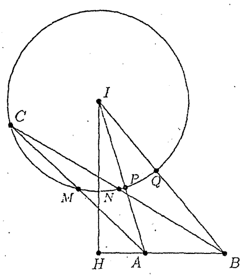


Рис. 4

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \sqrt{(y+r)^2 - l^2} - \sqrt{(x+r)^2 - l^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{2} + r^2 - l^2} - \sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} \iff$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} + r^2 - l^2} \iff$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab + \frac{a^2}{2} + r^2 - l^2 + 2\frac{a+b}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} = \frac{b^2}{2} + r^2 - l^2,$$

что, очевидно, невозможно.

10.4. Ответ: $N = 6$.

Пусть некоторая цифра, скажем, 1, присутствует в точности в k из выбранных N четырёхзначных чисел. В каждом четырёхзначном числе, в котором эта цифра присутствует, она с другими 3-я цифрами этого числа образует не более 3-х различных пар (ровно 3, если в числе нет повторяющихся цифр, и менее 3-х, если это не так). Поскольку всего различных пар, которые можно составить с этой цифрой и остальными 7-ю цифрами, ровно 7 и все они должны присутствовать среди тех k чисел, которые содержат рассматриваемую цифру, то должно выполняться неравенство $3k \geqslant 7$, откуда натуральное $k \geqslant 3$. Итак, каждая из 8-и цифр должна входить не менее чем в 3 из выбранных чисел. Следовательно, общее число вхождений всех 8-и цифр в выбранные числа должно быть не менее $8 \cdot 3 = 24$. Но N выбранных четырёхзначных чисел обеспечивают ровно $4N$ вхождений в них цифр. Значит, должно выполняться неравенство $4N \geqslant 24$, откуда $N \geqslant 6$.

Остаётся построить пример 6-и четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, такой, чтобы любые две различные из этих цифр присутствовали хотя бы в одном из чисел примера:

1)	1	2	3	4				
2)	1				5	6	7	
3)	1	2				6		8
4)		2	3		5		7	
5)			3	4		6		8
6)				4	5		7	8

В том, что построенный пример удовлетворяет сформулированному выше условию, легко убедиться непосредственной проверкой.

11 класс

11.1. Обозначим x_1, x_2 — различные корни уравнения $ax^2 + bx - c = 0$, т.е. нули функций $f(x) = ax^2 + bx - c$ и $g(x) = x^3 + bx^2 + ax - c$. Заметим, что из условия следует $f(0) = g(0) = c \neq 0$. Пусть $F(x) = g(x) - f(x)$. Тогда 0, x_1, x_2 различные нули многочлена $F(x)$. Поэтому $F(x) = x(x - x_1)(x - x_2)$, откуда

$$x^3+(b-a)x^2+(a-b)x = x(x-x_1)(x-x_2) \implies (b-a)x+(a-b) = -(x_1+x_2)x+x_1x_2 \,\forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $x_1+x_2 = a-b$ и $x_1x_2 = a-b$. По теореме Виета $x_1+x_2 = -b/a$, $x_1x_2 = -c/a$, откуда, в частности, следует, что $c = b$. Кроме того $a - b = -b/a$ или $a^2 - ab = -b$, т.е. $a^2 = b(a-1)$. Заметим, что тогда $a \neq 1$, и, в силу условия $b > 0$ имеет место неравенство $a > 1$.

а) Так как уравнение $f(x) = 0$ имеет два различных действительных корня, то

$$b^2 - 4ac = [b = c] = b^2 - 4ab = b(b - 4a) > 0,$$

и так как $b > 0$, то $b > 4a$, что в силу $a > 1$ дает оценку $b > 4$. Следовательно, $abc = ab^2 > 1 \cdot 4^2 = 16$, что и требовалось доказать.

б) *Первый способ.* Из ранее приведенных соотношений имеем $ab = a^2 + b$. Поэтому

$$abc = [b = c] = ab^2 = (a^2 + b)b = \left(\frac{a^2b}{2} + \frac{a^2b}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{a^2b}{2} \cdot \frac{a^2b}{2} \cdot \frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{3}} = 5\sqrt[5]{\frac{a^4b^8}{4 \cdot 27}},$$

откуда

$$(ab^2)^5 \geqslant \frac{5^5}{108}a^4b^8 \quad \implies \quad abc = ab^2 \geqslant \frac{3125}{108},$$

что и требовалось. Заметим, что равенство достигается при $\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{b}{3}$, что с учетом $b = \dfrac{a^2}{a-1}$ дает $a - 1 = 2/3$, т.е. $a = 5/3$.

Второй способ. Из ранее приведенных соотношений имеем $abc = ab^2 = \dfrac{a^5}{(a-1)^2}$.

Найдем минимум функции $h(a) = \dfrac{a^5}{(a-1)^2}$ на промежутке $(1; +\infty)$. Имеем

$$h'(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5a^4 - 2(a-1)a^5}{(a-1)^4} = \frac{a^4(a-1)(3a-5)}{(a-1)^4} = 0,$$

откуда $a = 5/3$. Так как $h'(a) < 0$ на промежутке $(1; 5/3)$ и $h'(a) > 0$ на промежутке $(5/3; +\infty)$, то в точке $a = 5/3$ функция $h(a)$ достигает своего минимума, равного $h(5/3) = \dfrac{5^5}{108}$. Следовательно, $abc \geqslant \dfrac{5^5}{108}$, что и требовалось доказать.

11.2. Ответ: $\dfrac{1}{2011}$.

Поскольку 2011 — простое число, то $2010! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 2011)$ (следует из теоремы Вильсона), или, что то же самое $2010! \equiv 2010 (\mathrm{mod}\, 2011)$. Это значит, что

$$2010! = 2011n + 2010 \qquad (*)$$

для некоторого натурального n. Заметим при этом, что поскольку $2011n = 2010\cdot(2009! - 1)$ делится на 2010, а 2010 и 2011 — взаимно простые числа, то n делится на 2010. Далее, согласно $(*)$ имеем: $\dfrac{2010!}{2011} = n + \dfrac{2010}{2011}$, откуда, разделив обе части равенства на 2010, получим:

$$\frac{2009!}{2011} = \frac{n}{2010} + \frac{1}{2011}.$$

Таким образом, поскольку (как было показано) $\dfrac{n}{2010}$ — целое число, дробная часть числа $\dfrac{2009!}{2011}$ равна $\dfrac{1}{2011}$.

11.3. Пусть Γ — окружность, проходящая через точки M, P, B. Обозначим

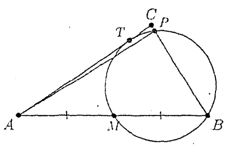


Рис. 1

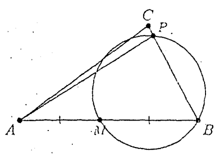


Рис. 2

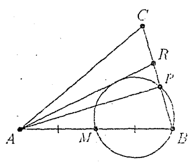


Рис. 3

$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Докажем, что окружность Γ касается стороны AC тогда и только тогда, когда $c = (a+b)/\sqrt{2}$.

Необходимость. Если T — точка касания окружности Γ со стороной AC, то по теореме о секущих и касательных имеем

$$AT^2 = c \cdot c/2, \qquad CT^2 = CP \cdot a = b\cos\angle C \cdot a.$$

Тогда

$$b = AT + TC = c/\sqrt{2} + \sqrt{ab\cos\angle C} = [\text{теорема косинусов для } \Delta\, ABC] =$$

$$= c/\sqrt{2} + \sqrt{(a^2+b^2-c^2)/2}.$$

Поэтому

$$(b - c/\sqrt{2})^2 = (a^2+b^2-c^2)/2 \implies (b - c\sqrt{2})^2 = a^2.$$

Если бы $a = b - c\sqrt{2}$, то $c\sqrt{2} = b - a < c$, противоречие. Следовательно, $a = c\sqrt{2} - b$, т.е. $c = (a+b)/\sqrt{2}$.

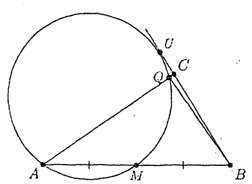
Достаточность. Пусть $c = (a+b)/\sqrt{2}$. Предположим, от противного, что окружность Γ не касается стороны AC. Возможны два случая: окружность Γ пересекает прямую AC (рис.2), окружность Γ не имеет с прямой AC общих точек (рис. 3). Рассмотрим второй из этих случаев. Проведем касательную AR окружности Γ. Тогда по ранее доказанному

$$c = (AR+RB)/\sqrt{2} < [AC+CR > AR] < (AC+CR+RB)/\sqrt{2} = (AC+CB)/\sqrt{2} =$$

$$= (a+b)/\sqrt{2},$$

что противоречит условию. Аналогично устанавливается невозможность и первого случая.

Пусть Γ_1 — окружность, проходящая через точки M, Q, A. Докажем, что окружность Γ_1 касается продолжения стороны BC тогда и только тогда, когда $c = (a+b)/\sqrt{2}$.



Необходимость. Если U — точка касания окружности Γ_1 с продолжением стороны BC, то по теореме о секущих и касательных имеем

$$BU^2 = c \cdot c/2, \quad CU^2 = CQ \cdot b = a\cos\angle C \cdot b.$$

Тогда

$$a = BU - CU = c/\sqrt{2} - \sqrt{ab\cos\angle C} =$$

$$= [\text{теорема косинусов для } \Delta\, ABC] = c/\sqrt{2} - \sqrt{(a^2+b^2-c^2)/2}.$$

Поэтому

$$(c/\sqrt{2} - a)^2 = (a^2+b^2-c^2)/2 \implies (c\sqrt{2} - a)^2 = b^2.$$

Если бы $b = a - c\sqrt{2}$, то $c\sqrt{2} = a - b < c$, противоречие. Следовательно, $b = c\sqrt{2} - a$, т.е. $c = (a+b)/\sqrt{2}$.

Достаточность доказывается по той же схеме, что и ранее для касания окружности Γ стороны AC.

Таким образом, касание окружности Γ стороны AC равносильно касанию окружности Γ_1 продолжения стороны BC.

11.4. Ответ: а) $N = 6$, б) $N = 7$.

а) Пусть некоторая цифра, скажем, 1, присутствует в точности в k из выбранных N четырёхзначных чисел. В каждом четырёхзначном числе, в котором эта цифра присутствует, она с другими 3-я цифрами этого числа образует не более 3-х различных пар (ровно 3, если в числе нет повторяющихся цифр, и менее 3-х, если это не так). Поскольку всего различных пар, которые можно составить с этой цифрой и остальными 7-ю цифрами, ровно 7 и все они должны присутствовать среди тех k чисел, которые содержат рассматриваемую цифру, то должно выполняться неравенство $3k \geqslant 7$, откуда натуральное $k \geqslant 3$. Итак, каждая из 8-и цифр должна входить не менее чем в 3 из выбранных чисел. Следовательно, общее число вхождений всех 8-и цифр в выбранные числа должно быть не менее $8 \cdot 3 = 24$. Но N выбранных четырёхзначных чисел обеспечивают ровно $4N$ вхождений в них цифр. Значит, должно выполняться неравенство $4N \geqslant 24$, откуда $N \geqslant 6$.

Остаётся построить пример 6-и четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, такой, чтобы любые две различные из этих цифр присутствовали хотя бы в одном из чисел примера:

1)	1	2	3	4				
2)	1				5	6	7	
3)	1	2				6		8
4)		2	3		5		7	
5)			3	4		6		8
6)				4	5		7	8

В том, что построенный пример удовлетворяет сформулированному выше условию, легко убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейшего заметим, что в приведённом примере есть пара цифр, которая входит в три из его чисел (пара $(5, 7)$ входит в числа 2), 4) и 6)). Цель следующего п. **б**) — доказать, что так будет всегда, если выбранных четырёхзначных чисел 6 и любые две различные цифры входят хотя бы в одно из выбранных чисел.

б) Допустим, что можно выбрать 6 четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, так, чтобы любые две различные из этих цифр входили хотя бы в одно, но не более чем в два, из выбранных 6-и чисел. Тогда, как доказано в п. **а**), каждая цифра должна входить не менее чем в 3-и из выбранных чисел, а значит, ровно в 3, поскольку всего вхождений 8-и цифр в 6 четырёхзначных чисел ровно 24. В частности, отсюда следует, что в каждом из выбранных чисел нет повторяющихся цифр. Далее под парой цифр понимается их неупорядоченная пара.

Докажем вначале, что никакие два из выбранных 6-и чисел не могут иметь 3 одинаковые цифры. В самом деле, пусть такие два числа есть, и пусть, без нарушения общности, — это числа 1234 и 1235. Так как цифра 1 уже входит в два числа, то она может входить ещё только в одно число, и это число, чтобы обеспечить вхождение в выбранные числа пар $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, должно быть 1678. Аналогично, ещё двумя числами должны быть числа 2678 и 3678. Итак, пять из шести чисел определены, и только в одном из них есть цифра 4. Значит, цифра 4 входит в выбранные числа не более 2-х раз, чего, как доказано выше, быть не может. Итак, любые два из выбранных 6-и четырёхзначных чисел могут иметь общими не более 2-х цифр.

Обозначим выбранные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Через P_i обозначим множество, состоящее из тех 6-и пар, которые образованы цифрами числа a_i, $i = 1, \ldots, 6$. По условию каждая пара, которую можно образовать из различных цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, входит хотя бы в одно из чисел a_i, $i = 1, \ldots, 6$; поэтому всего различных элементов в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{6} P_i$ ровно $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$. Далее, любые два различных множества P_i и P_k либо не пересекаются, т. е. $P_i \bigcap P_k = \varnothing$, либо их пересечение содержит ровно один элемент (если бы у P_i и P_k было два общих элемента, то у отвечающих им чисел a_i и a_k было бы три общие цифры, чего, как доказано выше, быть не может). Кроме того, пересечение любых трёх различных из множеств P_i, $i = 1, \ldots, 6$, пусто (если бы это было не так и $P_i\bigcap P_j\bigcap P_k\neq\varnothing$, то у отвечающих им чисел a_i, a_j и a_k была бы общая всем этим трём числам пара цифр, что по условию п. **б)** не так).

Значит, по формуле включений и исключений имеем (ниже $N(X)$ — число элементов конечного множества X):

$$N\Big(\bigcup_{i=1}^{6}P_i\Big)=\sum_{i=1}^{6}N(P_i)-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{6}N\Big(P_i\bigcap P_j\Big). \qquad (*)$$

Так как $N(\bigcup\limits_{i=1}^{6}P_i)=28$ и $N(P_i)=6$ для любого $i=1,\ldots,6$, то равенство $(*)$ принимает вид

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{6}N\Big(P_i\bigcap P_j\Big)=8. \qquad (**)$$

Поскольку, как доказано, $N(P_i\bigcap P_j)$, $i\neq j$, равно либо 0, либо 1, то пусть x — число тех из 15-и пар (P_i,P_j), $i<j$, для которых $N(P_i\bigcap P_j)=0$, тогда для остальных $15-x$ пар имеем: $N(P_i\bigcap P_j)=1$, — а значит, равенство $(**)$ перепишется в виде $15-x=8$, или $x=7$.

Остаётся показать, что x не может равняться 7. Допустим, что из множеств P_i, $i=1,\ldots,6$, можно выбрать 7 пар непересекающихся множеств. Так как в каждую из этих 7-и пар входит 2 множества, то всего имеем $7\cdot 2=14$ вхождений множеств, но поскольку множеств 6, то какое-то из них входит не менее 3-х раз — пусть это множество P_1, и пусть, без нарушения общности, оно не пересекается с множествами P_2, P_3 и P_4. Рассмотрим, как устроены отвечающие этим множествам числа a_1, a_2, a_3, a_4. Пусть, без нарушения общности, число $a_1=1234$. Тогда ни одно из чисел a_2, a_3, a_4 не может совпадать с числом 5678. В самом деле, если бы, например, $a_2=5678$, то, поскольку числа a_3 и a_1 имеют не более одной общей цифры (множества P_3 и P_1 не пересекаются), у чисел a_2 и a_3 совпадали бы три цифры, чего, как доказано, быть не может. Стало быть, у чисел a_2, a_3, a_4 три цифры — это какие-то три из цифр 5, 6, 7, 8 (свои для каждого числа) и одна цифра — это какая-то из цифр 1, 2, 3, 4 (своя для каждого числа). Так как у каждого из 3-х чисел a_2, a_3, a_4 отсутствует ровно одна из четырёх цифр 5, 6, 7, 8, то какая-то из этих цифр у них общая (пусть это цифра 5), и, аналогично, какая-то из цифр 1, 2, 3, 4 не входит ни в одно из чисел a_2, a_3, a_4 (пусть это цифра 4). Тогда пара (4, 5) не входит ни в одно из выбранных 6-и чисел, поскольку цифра 5 входит 3 раза в числа a_2, a_3, a_4 и больше входить, как доказано, не может, и для любого из 3-х её вхождений с нею ни разу не входит цифра 4. Следовательно, $x\leqslant 6$. Полученное противоречие доказывает, что для вопроса **б)** число $N\geqslant 7$.

Остаётся только построить пример 7-и четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, такой, чтобы любые две различные из этих цифр присутствовали хотя бы в одном, но не более чем в двух, из чисел примера. Для этого достаточно взять первые пять чисел такими же, как и в примере п. **а)**, а шестое и седьмое числа следующими: 6) 1458 и 7) 2478. В том, что построенный пример удовлетворяет сформулированному выше условию, легко убедиться непосредственной проверкой.