Министерство образования Республики Беларусь

«L X»

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Минск 2010

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 60-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Близнец И.А. (10.7)
Живодеров А.В. (8.8)
Войделевич А.С. (11.6)
Воронович И.И. (7.5, 7.7, 8.5, 8.7,9.6,9.8< 10.8, 11,8)
Каскевич В.И. (7.6, 8.6)
Карпук М.В. (10.5)
Мазаник С.А. (7.8)
Миротин А.Р. (10.6, 11.5)
Пирштук Д.И. (9.5)
Соболевский С.Л. (9.7, 11.7)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.5. Докажите, что
$$\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(c+b)(c+a)}{(c-b)(c-a)}=abc$$
для любых допустимых a, b, c таких, что $a+b+c=0$.

7.6. Некоторые клетки таблицы 7×7 окрашены в черный цвет, а остальные – в белый. За один ход разрешается выбрать любой квадрат $n\times n$, $1<n<7$, со сторонами, идущими по сторонам клеток, и перекрасить в противоположный цвет каждую клетку в выбранном квадрате.

При любой ли исходной окраске таблицы 7×7 из нее с помощью указанных ходов можно получить таблицу, все клетки которой белые?

7.7. Найдите все пары $(p,\, q)$ простых чисел p и q, удовлетворяющих уравнению $2p^2+1=q^5$.

7.8. В треугольнике ABC $\angle ABC=120°$, $BC=2AB$. Найдите угол между медианами AM и BK.

8 класс

8.5. Укажите все возможные значения, которые может принимать выражение
$$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}$$
при всех допустимых значениях a, b, c. (Ответ обоснуйте.)

8.6. В клетках таблицы 8×8 записаны целые числа, по одному в каждой. За один ход разрешается выбрать любой квадрат $n \times n$, $1 < n < 8$, со сторонами, идущими по сторонам клеток, и либо увеличить каждое число в выбранном квадрате на 1, либо уменьшить на 1.

Всякую ли таблицу с помощью таких ходов можно преобразовать в таблицу, все числа в которой равны 0?

8.7. Найдите все пары (p, q) простых чисел p и q, удовлетворяющих уравнению

$$p^6 - q^2 = 0,5(p-q)^2 .$$

8.8. В треугольнике ABC к стороне AC проведена биссектриса BK.

Найдите углы треугольника ABC, если $AK = 1$, а $BK = KC = 2$.

9 класс

9.5. Докажите, что

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4}$$

для любых положительных a, b, c.

9.6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Докажите, что $CD \cdot BD > AB \cdot AC$, если $\dfrac{CD}{BD} > \dfrac{AB}{AC}$.

9.7. На плоскости расположено n, $n \geqslant 3$, различных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, попарно соединенных отрезками. Каждый из отрезков покрашен в один из m, $m \geqslant 2$, цветов (предполагается, что все цвета использованы, т.е. для каждого цвета есть по меньшей мере один покрашенный в него отрезок) так, что выполняется следующее условие: если в некотором треугольнике с вершинами в данных точках две стороны покрашены в один цвет, то и третья сторона покрашена в этот же цвет.

Какое максимальное значение может принимать n при $m = 4$?

9.8. Предположим, что функция $y = f(x)$, заданная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, удовлетворяет при всех действительных x равенству

$$f(f(x)) = xf(x) + x - 1.$$

а) Найдите значение $f(-1)$.

б)* Найдите все возможные значения $f(1)$.

10 класс

10.5. Окружности Γ_1 и Γ_2 касаются друг друга внешним образом в точке M_3 и касаются внутренним образом окружности Γ_3 в точках M_1 и M_2 соответственно. Пусть S — центр описанной около треугольника $M_1M_2M_3$ окружности.

Докажите, что прямая SM_1 касается окружности Γ_3.

10.6. Для натурального числа n через $\sigma(n)$ обозначим сумму, а через $\tau(n)$ — число его делителей (к делителям мы причисляем также само число и единицу). Докажите, что среднее арифметическое делителей числа n удовлетворяет двойному неравенству

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

10.7. В шахматном клубе "Дебют четырех коней" города Васюки есть три шахматных столика: "правильный "мирный" и "странный". Любая партия за "мирным" столиком заканчивается вничью; в любой партии за "правильным" столиком побеждает более сильный шахматист; а в любой партии за "странным" столиком побеждает более слабый.

Можно ли между шестью разными по силе шахматистами города Васюки провести однокруговой турнир в пять туров так, чтобы в каждом туре одновременно игралось три партии, по одной за каждым столиком, причем в результате турнира все шахматисты сыграли друг с другом по одному разу и занялм места согласно своей силе? (За победу в партии начисляется 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков.)

10.8. Докажите, что не существует функции $y = f(x)$, заданной на множестве действительных чисел и принимающей действительные значения, которая при всех действительных x удовлетворяет равенству

$$f(f(x)) = 1 - xf(x).$$

11 класс

11.5. Для натурального числа n через $\sigma(n)$ обозначим сумму, а через $\tau(n)$ — число его делителей (включая само число и единицу).

Найдите наибольшее действительное число a, такое, что при всех $n > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geqslant a\sqrt{n}\,?$$

11.6. Точки O_1, O_2 — центры соответственно окружностей Γ_1, Γ_2, пересекающихся в точках C и D. Пусть A — точка пересечения O_1O_2 с окружностью Γ_2, S — точка пересечения прямой DA с окружностью Γ_1, F — точка пересечения прямой

SC с прямой O_1O_2. Пусть E — точка пересечения окружности Γ_1 с окружностью Γ_3, описанной около треугольника ADF.

Докажите, что O_1E — касательная к окружности Γ_3.

11.7. Дано натуральное число $m \geqslant 2$. Пусть на плоскости отмечены n, $n \geqslant 3$, различных точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой), попарно соединенных отрезками. Каждый из отрезков покрашен в один из m данных цветов (причем есть отрезки каждого цвета) так, что выполняется следующее условие: если в некотором треугольнике с вершинами в данных точках две стороны покрашены в один цвет, то и третья сторона покрашена в этот же цвет.

Какое максимальное значение может принимать n при данном m?

11.8. Предположим, что функция $y = f(x)$, заданная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, удовлетворяет при всех действительных x равенству

$$f(f(x)) = x^2 f(x) - x + 1.$$

Найдите значение $f(1)$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.5. Учитывая условие $a+b+c=0$, перепишем левую часть требуемого равенства в виде

$$M=\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(c+b)(c+a)}{(c-b)(c-a)}=$$

$$=\frac{a^3(-b)(-c)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(-c)(-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(-a)(-b)}{(c-b)(c-a)}=$$

$$abc\left(\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}\right)=abcL.$$

Имеем

$$L=\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)}=$$

$$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-c)(b-a)(c-b)}=\frac{N}{(a-c)(b-a)(c-b)}.$$

Далее,

$$N=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b=$$

$$=a^2(b-c)+(b^2c-c^2b)-(b^2a-c^2a)=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)=$$

$$=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)=(b-c)(a(a-b)-c(a-b))=$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c)=(a-c)(b-a)(c-b).$$

Следовательно, $L=1$, откуда $M=abc$, что и требовалось.

7.6. Ответ: да, при любой.

Разобьем таблицу на несколько частей: центральный квадрат 3×3, два прямоугольника 2×7, примыкающих один к верхней, другой к нижней сторонам таблицы, и два оставшихся прямоугольника 3×2, которые примыкают один к левой, другой к правой сторонам таблицы (рис. 1).

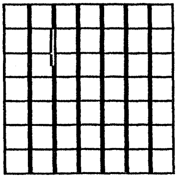


Рис. 1

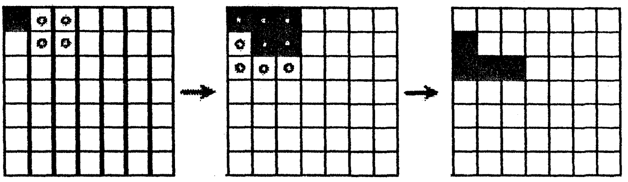


Рис. 2

Покажем сначала, как перекрасить в белый цвет все черные клетки в прямоугольниках 2×7. Рассмотрим для определенности верхний из них и сначала рассмотрим клетки в верхней (примыкающей к стороне таблицы) строчке. Достаточно показать, как изменить цвет любой клетки в этой строчке так, что при этом не изменится цвет других клеток в этой строчке (и строчках нижнего прямоугольника 2×7). Действительно, это можно сделать с помощью двух операций в квадрате 3×3 и в квадрате 2×2 (назовем это процедурой А) так, как показано на рис. 2 и рис. 3.

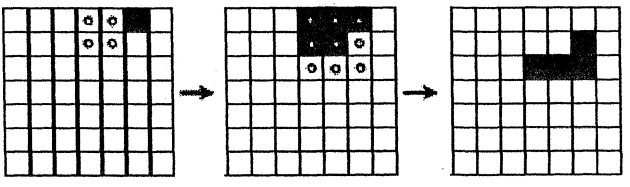


Рис. 3

Здесь показано, как изменить цвет в двух из клеток верхней строчки. Понятно, что аналогично можно изменить цвет и всех других клеток верхней строчки рассматриваемого прямоугольника. Применяя процедуру А для всех черных клеток верхней строчки, мы полностью перекрасим ее в белый цвет. Ясно, что после этого точно так же можно перекрасить в белый цвет и все черный клетки второй (нижней) строчки этого прямоугольника 2×7, причем так, что цвет клеток в первой (верней) строчке не изменится. В результате две верхние строчки окажутся белыми. Аналогичными действиями можно перекрасить в белый цвет и две нижние строчки таблицы.

Теперь рассмотрим прямоугольники 3×2, для определенности, левый. На рис. 4 показано, как изменить (в случае необходимости) цвет клетки в средней строчке этого прямоугольника.

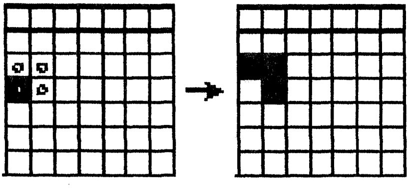


Рис. 4

Применив после этого такую же процедуру А (см. рис. 5) к другим (черным) клеткам левом столбце прямоугольника 3×2, мы можем сделать этот столбец полностью белым. Заметим, что цвет клеток в прямоугольниках 2×7 при этом не изменится.

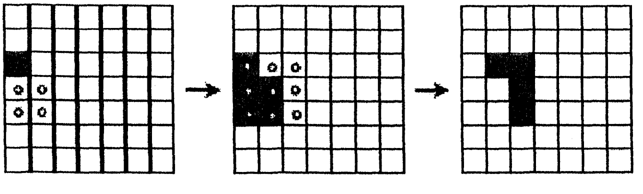


Рис. 5

Проделав аналогичные действия, можно перекрасить в белый цвет и второй столбец этого прямоугольника 3×2. После этого точно так же можно перекрасить в белый цвет и все черные клетки второго (правого) прямоугольника 3×2.

В результате описанных выше действий черные клетки могут остаться только в центральном квадрате 3×3. На рис. 6 показано как перекрасить в противоположный цвет одну из клеток этого квадрата (процедура B), причем так, что цвет других клеток в таблице не изменится.

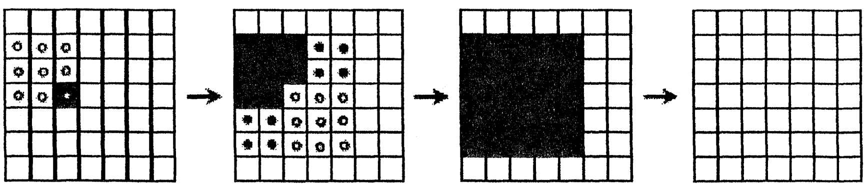


Рис. 6

Применив описанную процедуру B ко всем черным клеткам центрального квадрата 3×3, получим таблицу, все клетки которой будут белыми.

7.7. Ответ: (11, 3).

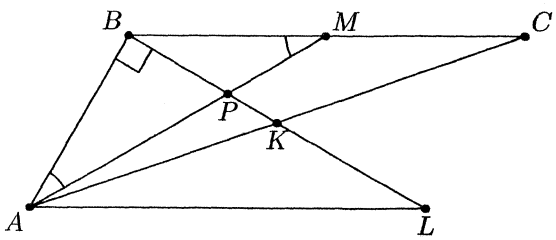
Если $p = 3$, то из уравнения получим $q^5 = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19$ — нет целых решений. Поэтому p не делится на 3 и, значит, $p = 3n \pm 1$ для некоторого натурального n. Тогда уравнение из условия задачи можно представить в виде

$$2(3n \pm 1)^2 + 1 = q^5 \quad \Leftrightarrow \quad 18n^2 \pm 12n + 3 = q^5,$$

откуда видно, что q^5 делится на 3 и, значит, q делится на 3. Но тогда, так как по условию q — простое число, $q = 3$. В таком случае, уравнение примет вид $2p^2 + 1 = 243$, откуда $p^2 = 121$ и, значит, $p = 11$. Таким образом, существует лишь одна пара решений данного уравнения: (11, 3).

7.8. Ответ: $60°$.

Пусть P — точка пересечения медиан AM и BK. Проведем через точку A прямую, параллельную прямой BC. Пусть L — точка пересечения этой прямой с прямой BK. Треугольники AKL и BKC равны ($AK = KC$, $\angle AKL = \angle BKC$, $\angle KAL = \angle BCK$), поэтому $AL = BC = 2AB$. Так как $\angle BAL = 180° - \angle ABC = 180° - 120° = 60°$, то треугольник ABL прямоугольный и $\angle ABP = \angle ABL = 90°$. Поскольку $BM = MC = 0.5BC = AB$, то треугольник ABM равнобедренный и



$$\angle BAM = \angle BMA = 0.5(180° - \angle ABC) = 0.5(180° - 120°) = 30°.$$

Следовательно,

$$\angle BPA = 180° - \angle PAB - \angle ABP = 180° - 30° - 90° = 60°.$$

8 класс

8.5. Ответ : 4. Обозначим $A = a + b + c$. Тогда

$$M = \frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)} =$$

$$= \frac{(A-2c)^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{(A-2a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(A-2b)^2}{(c-b)(a-b)} =$$

$$= \frac{(A-2c)^2(b-a) + (A-2a)^2(c-b) + (A-2b)^2(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

$$= \frac{L}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Имеем

$$L = (A^2 - \cancel{2}4Ac + 4c^2)(b-a) + (A^2 - \cancel{2}4Aa + 4a^2)(c-b)+$$

$$+(A^2-\cancel{2}4Ab+4b^2)(a-c)=A^2((b-a)+(c-b)+(a-c))-$$
$$-\cancel{2}4A(c(b-a)+a(c-b)+b(a-c))+4(c^2(b-a)+a^2(c-b)+b^2(a-c))=$$
$$=\cancel{2}4A(cb-ca+ac-ab+ba-bc)+4N=4N.$$

Далее,

$$N=c^2(b-a)+a^2(c-b)+b^2(a-c)=c^2(b-a)+$$
$$+(a^2c-a^2b+b^2a-b^2c)=c^2(b-a)+(a^2c-b^2c)-(a^2b-b^2a)=$$
$$=c^2(b-a)+c(a+b)(a-b)-ab(a-b)=$$
$$=(a-b)(ca+cb-ab-c^2)=$$
$$=(a-b)(a(c-b)+c(b-c))=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Следовательно, $M=4$.

8.6. Ответ: да, всякую.

Разобьем таблицу на несколько частей: центральный квадрат 4×4, два прямоугольника 2×8, примыкающих один к верхней, другой к нижней сторонам таблицы, и два оставшихся прямоугольника 4×2, которые примыкают один к левой, другой к правой сторонам таблицы (рис. 1).

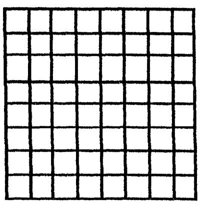


Рис. 1

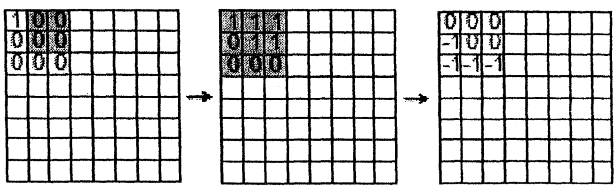


Рис. 2

Покажем сначала, как "обнулить"числа в прямоугольниках 2×8. Рассмотрим для определенности верхний из них и сначала рассмотрим числа в верхней (примыкающей к стороне таблицы) строчке. Покажем, как изменить на 1 любое число в этой строчке так, что при этом не изменится ни одно другое число в этой строчке (и строчках нижнего прямоугольника 2×8). Действительно, это можно сделать с помощью двух операций в квадрате 3×3 и в квадрате 2×2 (назовем это процедурой А), например так, как показано на рис. 2 и рис. 3.

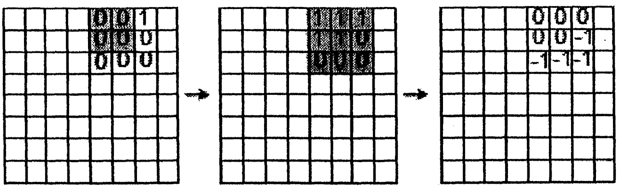


Рис. 3

Здесь показано, как уменьшить на 1 число в двух из клеток верхней строчки. Понятно, что аналогично можно уменьшить числа и во всех других клетках верхней строчки рассматриваемого прямоугольника. Точно так же можно и увеличить на 1 любое число в этой строчке данного прямоугольника. Применяя процедуру А нужное количество раз можно "обнулить"все числа в верхней строчке рассматриваемого прямоугольника 2×8. Ясно, что точно так же можно "обнулить"и все числа во второй (нижней) строчке этого прямоугольника, так, что числа в первой (верней) строчке не изменятся. Аналогичными действиями можно "обнулить"и все числа нижнего прямоугольника 2×8, а также числа в прямоугольниках 4×2 (см. дополнительно пример на рис. 3).

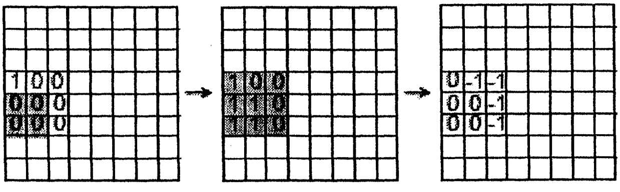


Рис. 4

После описанных выше действий останется "обнулить"числа в центральном квадрате 4×4. На рис. 5 показано, как уменьшить на 1 одно из чисел в этом квадрате (процедура B) так, что числа в других клетках таблицы не изменится.

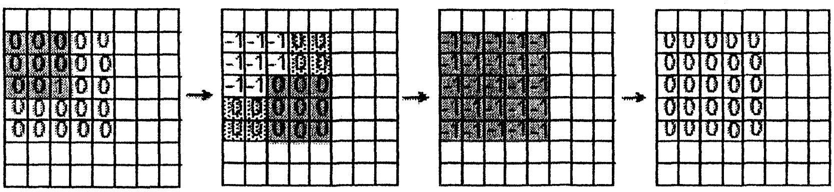


Рис. 5

Ясно, что точно так же можно, при необходимости, изменить (уменьшить или увеличить) на 1 и любое другое число в этом квадрате. Применив процедуру B к числам в центральном квадрате 4×4 нужное количество раз получим таблицу, состоящую только из нулей.

8.7. Ответ: (3, 23).

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$p^6 - q^2 = 0,5(p-q)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^6 - 2q^2 = p^2 - 2pq + q^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p^6 - p^2 + 2pq = 3q^2 \quad \Leftrightarrow \quad p(2p^5 - p + 2q) = 3q^2 .$$

Видим, что $3q^2$ ~~является~~ делится на p. Учитывая, что p и q — простые числа, такое возможно только в следующих двух случаях.

1) $p = 3$. Тогда уравнение примет вид

$$3(2 \cdot 3^5 - 3 + 2q) = 3q^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 3^5 - 3 + 2q = q^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot 3^5 - 3 + 1 = q^2 - 2q + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 484 = (q-1)^2$$

т.е., $(q-1)^2 = 22^2$, откуда $q - 1 = 22$ и, значит, $q = 23$.

2) $p = q$. Тогда уравнение примет вид

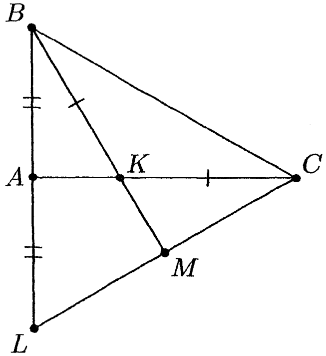
$$p(2p^5 - 3 + 2p) = 3p^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^5 - p + 2p = 3p \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p^5 - 2p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2p(p-1)(p+1)(p^2+1) = 0$$

откуда $p=0$, 1 или -1. Но ни одно из этих трех чисел не является простым. Поэтому в этом случае решений нет.

8.8. Ответ: $30°$, $60°$, $90°$.

На продолжении стороны BA за точку A отметим точку L так, что $AL = AB$. Пусть M – точка пересечения прямых BK и CL. Тогда CA – медиана треугольника LBC, и так как $AK : KC = 1 : 2$, то K – точка пересечения медиан треугольника LBC. Следовательно, BM также является медианой треугольника LBC. Поскольку $BK = KC$, то медианы BM и CA равны, и, значит, треугольник LBC равнобедренный, $LB = LC$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $AB : BC = AK : KC = 1 : 2$, поэтому $BC = 2AB = BL$. Следовательно, треугольник LBC равносторонний и $\angle ABC = 60°$. Так как в треугольнике ABC угол $ABC = 60°$ и $BC = 2AB$, то этот треугольник прямоугольный, $\angle CAB = 90°$, $\angle BCA = 30°$.



9 класс

9.5. Заметим, что при любых $x, y > 0$ верно неравенство $\dfrac{x^2}{y} \geqslant \dfrac{4x-y}{4}$, ибо это равносильно неравенству $(2x-y)^2 \geqslant 0$.

Поэтому

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{4a-(a+b)}{4}+\frac{4b-(b+c)}{4}=\frac{3a+2b-c}{4},$$

что и требовалось доказать.

Равенство достигается при $a=b=c$.

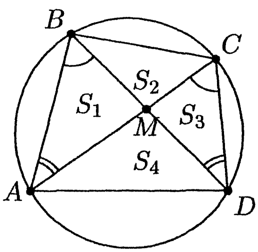
9.6. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BAC = \angle BDC$. Вычислим площади треугольников ABD

и ACD:

$$S(ABD) = AB \cdot BD \sin \angle ABD = S_1 + S_4,$$

$$S(ACD) = AC \cdot CD \sin \angle ACD = S_3 + S_4.$$

Из условия следует, что $AC \cdot CD > AB \cdot BD$, откуда $S(ACD) > S(ABD)$, что влечет неравенство $S_3 > S_1$.



Вычислим теперь площади треугольников BAC и BDC:

$$S(BAC) = AB \cdot AC \sin \angle BAC = S_1 + S_2,$$

$$S(BDC) = BD \cdot CD \sin \angle BDC = S_3 + S_2.$$

Поскольку $S_3 > S_1$, то $S(BAC) > S(BDC)$, откуда

$$CD \cdot BD > AB \cdot AC.$$

9.7. Ответ: $n = 9$. Заметим, что из любой точки выходит не более двух отрезков одного цвета. Действительно, в противном случае существуют 4 точки, соединенные друг с другом отрезками одного цвета. Но тогда либо каждая из оставшихся точек соединена с указанными четырьмя отрезками того же цвета, а значит вообще все отрезки окрашены в этот же цвет, что невозможно, либо найдется вершина соединенная с данными четырьмя вершинами отрезками трех других цветов, но тогда с двумя из этих вершин она будет соединена одним цветом, отличным от цвета соединяющего эти вершины отрезка, что также невозможно. Следовательно, из точки выходит не более $2 \times 4 = 8$ отрезков. Но так как из точки выходит $(n-1)$ отрезок, то $n - 1 \leqslant 8$, откуда $n \leqslant 9$.

Пример для $n = 9$ может быть построен следующим образом. Пронумеруем точки парами чисел (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), а цвета числами 1,2,3,4. Тогда три отрезка между точками (1,1), (1,2), (1,3), три отрезка между точками (2,1), (2,2), (2,3) и три отрезка между точками (3,1), (3,2), (3,3) покрасим в цвет 1; по три отрезка между точками (1,1), (2,1), (3,1), между точками (1,2), (2,2), (3,2) и между точками (1,3), (2,3), (3,3) покрасим в цвет 2; по три отрезка между точками (1,1), (2,2), (3,3), между точками (1,2), (2,3), (3,1) и между точками (1,3), (2,1), (3,2) покрасим в цвет 3; наконец, по три отрезка между точками (1,1), (2,3), (3,2), между точками (1,2), (2,1), (3,3) и между точками (1,3), (2,2), (3,1) покрасим в цвет 4.

9.8. Ответ: **а)** -1; **б)** -1 или 1.

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет при любом $x \in \mathbb{R}$ равенству

$$f\big(f(x)\big) = xf(x) + x - 1. \qquad (*)$$

а) Обозначим $c = f(0)$. Применяя к каждой части этого равенства функцию f (от чего равенство не нарушится) и воспользовавшись соотношением $(*)$ при $x = 0$, получаем

$$f(c) = f\big(f(0)\big) \underset{(*)}{=} 0 \cdot f(0) + 0 - 1 = -1.$$

Итак,

$$-1 = f(c). \qquad (1)$$

Применив к каждой части этого равенства функцию f и воспользовавшись равенствами $(*)$ (при $x = c$) и (1), находим нужное значение:

$$f(-1) = f\big(f(c)\big) \underset{(*)}{=} c \cdot f(c) + c - 1 \underset{(1)}{=} -c + c - 1 = -1.$$

б) Обозначим искомое значение $a = f(1)$. Применяя к каждой части этого равенства функцию f и воспользовавшись соотношением $(*)$ при $x = 1$, получаем

$$f(a) = f\big(f(1)\big) \underset{(*)}{=} 1 \cdot f(1) + 1 - 1 = a.$$

Поскольку, как найдено,
$$a = f(a), \tag{2}$$
то, применив к каждой части этого равенства функцию f и воспользовавшись соотношением $(*)$ при $x = a$, получаем
$$f(a) = f\big(f(a)\big) \underset{(*)}{=} a \cdot f(a) + a - 1 \underset{(2)}{=} a^2 + a - 1. \tag{3}$$
Вследствие (2) и (3) имеем $a^2 + a - 1 = a$, т. е. либо $a = -1$, либо $a = 1$.

Покажем, что оба найденных значения a реализуются, т. е. покажем, что существуют удовлетворяющие при всех действительных x как функции f, для которых $f(1) = -1$, так и функции f, для которых $f(1) = 1$. Такими функциями являются, например, функции
$$f(x) \equiv -1 \qquad \text{и} \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \neq 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases} \tag{3}$$
Для первой из этих функций $f(1) = -1$, а для второй $f(1) = 1$. Проверим, что каждая из них удовлетворяет равенству $(*)$ при всех действительных x. Для функции $f(x) \equiv -1$ при любом x имеем:
$$f\big(f(x)\big) = f(-1) = -1$$
и
$$xf(x) + x - 1 = x \cdot (-1) + x - 1 = -x + x - 1 = -1,$$
а значит, выполнено равенство $(*)$. Для второй из функций (3), если $x \neq 1$, предыдущие равенства показывают, что для неё также выполнено равенство $(*)$. При $x = 1$ оно тоже выполнено, поскольку при $x = 1$ его левая часть равна $f\big(f(1)\big) = f(1) = 1$, а правая часть $1 \cdot f(1) + 1 - 1 = 1 \cdot f(1) = 1$.

В качестве других, чуть более сложных, примеров таких функций можно, например, указать функции
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \neq 0, \\ \alpha, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где в качестве α может быть взято любое ненулевое число.

10 класс

10.5. Пусть O_1, O_2, O_3 центры окружностей Γ_1, Γ_2, Γ_3, а R_1,

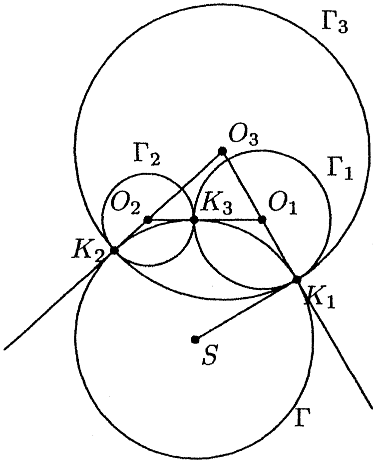


Рис. 1

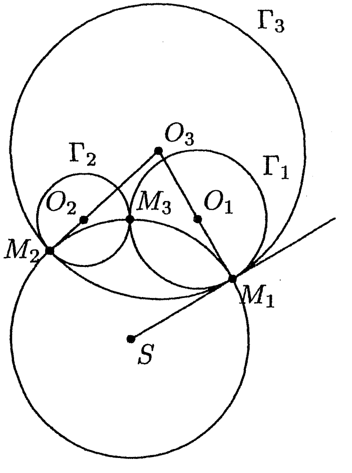


Рис. 2

R_2, R_3 – их радиусы соответственно.

Рассмотрим вневписанную окружность Γ треугольника $O_1O_2O_3$ (см. рис. 1). Пусть K_1, K_2, K_3 – точки касания окружности Γ с прямыми O_3O_1, O_3O_2, O_1O_2 соответственно. Тогда по теореме о касательных

$$O_1K_1 = O_1K_3,\ O_2K_2 = O_2K_3 \implies O_1K_1 + O_2K_2 = O_1O_2 = R_1 + R_2. \tag{1}$$

Кроме того,

$$(R_3 - R_1) + O_1K_1 = O_3O_1 + O_1K_1 = O_3K_1 =$$

$$= O_3K_2 = O_3O_2 + O_2K_2 = (R_3 - R_2) + O_2K_2.$$

Поэтому, если $O_1K_1 > R_1$ ($O_1K_1 < R_1$), то

$$O_2K_2 = O_3K_2 - (R_3 - R_2) = (R_3 - R_1) + O_1K_1 - (R_3 - R_2) =$$
$$= R_2 + (O_1K_1 - R_1) > R_2, \ (O_2K_2 < R_2),$$

но тогда $O_1K_1+O_2K_2 > R_1+R_2$ ($O_1K_1+O_2K_2 < R_1+R_2$), что противоречит (1). Следовательно $O_1K = R_1$, $O_2K_2 = R_2$. Таким образом, точки K_1, K_2, K_3 совпадают с точками M_1, M_2, M_3 соответственно. Это означает, что окружность Γ является описанной около треугольника $M_1M_2M_3$ (см. рис. 2). Поэтому $SM_1 \perp O_3O_1$ (как радиус вневписанной окружности), а следовательно SM_1 – касательная к окружности Γ_3.

10.6. Заметим, что если d пробегает все делители натурального числа n, то и n/d пробегает все делители числа n. Поэтому, обозначив через $d_1, \ldots, d_{\tau(n)}$ все делители числа n, получаем, что

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}\left(\left(d_1 + \frac{n}{d_1}\right) + \left(d_2 + \frac{n}{d_2}\right) + \ldots + \left(d_{\tau(n)} + \frac{n}{d_{\tau(n)}}\right)\right). \quad (*)$$

Докажем, что

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leqslant \frac{n+1}{2}. \qquad (1)$$

Для этого докажем сначала, что $x + \frac{n}{x} < y + \frac{n}{y}$, если $0 < y < x \leqslant \sqrt{n}$. В самом деле, это неравенство равносильно неравенству $x - y < \frac{n(x-y)}{xy}$, т. е. неравенству $xy < n$. Но последнее неравенство очевидно верно, поскольку в силу ограничений, наложенных на x и y, имеем: $xy < \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Так как либо $d_i \leqslant \sqrt{n}$, либо $n/d_i \leqslant \sqrt{n}$, то вследствие доказанного неравенства получаем $d_i+\frac{n}{d_i} \leqslant 1+\frac{n}{1} = n+1$. Следовательно, заменяя в равенстве $(*)$ каждую пару слагаемых d_i+n/d_i на $n+1$, получаем, что $\sigma(n) \leqslant \frac{1}{2}(n+1)\tau(n)$. Неравенство (1) доказано, причём из доказательства следует, что равенство в (1) достигается только при простом n, поскольку, если n — не простое, то найдётся $d_i \neq 1, n$, а тогда $d_i + \frac{n}{d_i} < n+1$.

Докажем, что

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geqslant \sqrt{n}. \tag{2}$$

По неравенству Коши $x + \frac{n}{x} \geqslant 2\sqrt{n}$ для любого $x > 0$. Следовательно, заменяя в равенстве (*) каждую пару слагаемых $d_i + n/d_i$ на $2\sqrt{n}$, получаем, что $\sigma(n) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{n}\,\tau(n) = \sqrt{n}\,\tau(n)$. Неравенство (2) доказано, причём из доказательства следует, что равенство в (2) достигается только при $n = 1$.

10.7. Ответ: нет, нельзя.

Перенумеруем шахматистов в порядке убывания их шахматной силы: $Ш_1$, $Ш_2$, $Ш_3$, $Ш_4$, $Ш_5$, $Ш_6$ (т. е. чем сильнее шахматист, тем меньше в нашей нумерации у него индекс). Допустим, что турнир, о котором идёт речь в условии задачи, мог состояться, и пусть в этом турнире шахматист $Ш_i$ набрал a_i очков ($i = 1, \ldots, 6$). Так как по условию шахматисты заняли в итоговой таблице турнира места согласно своей силе и равенство очков исключается, то шахматист $Ш_i$ набрал не менее чем на $0,5$ очка больше чем шахматист $Ш_{i+1}$ (т. е. $a_i - a_{i+1} \geqslant 0,5$, если $i = 1, \ldots, 5$). В частности, шахматист $Ш_i$, если $i = 1, 2, 3$, набрал не менее чем на $1,5$ очка больше чем шахматист $Ш_{i+3}$, поскольку

$$a_i - a_{i+3} = (a_i - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_{i+2}) + (a_{i+2} - a_{i+3}) \geqslant 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5. \tag{*}$$

Объединим шахматистов в две группы: группу A, к которой отнесём трёх самых сильных шахматистов, т. е. $Ш_1$, $Ш_2$ и $Ш_3$, и группу B, к которой отнесём остальных трёх, т. е. $Ш_4$, $Ш_5$, $Ш_6$. Через S_A обозначим сумму очков, набранных в турнире шахматистами группы A, а через S_B — сумму очков, набранных в турнире шахматистами группы B. Тогда $S_A - S_B \geqslant 4,5$. Действительно,

$$S_A - S_B = (a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5+a_6) = (a_1-a_4)+(a_2-a_5)+(a_3-a_6) \underset{(*)}{\geqslant}$$

$$\geqslant 1,5+1,5+1,5 = 4,5.$$

Так как шахматисты каждой из групп в играх между шахматистами этой же группы набирают в сумме одно и то же число очков (3), то это означает, что шахматисты группы A в поединках с шахматистами группы B набрали на $S_A - S_B$ очков больше чем шахматисты из B. Всего между шахматистами группы A и шахматистами группы B было проведено $3 \cdot 3 = 9$ встреч. Так как в этих 9 -и встречах разыгрывалось $9 \cdot 1 = 9$ очков, то для того чтобы выполнялось неравенство $S_A - S_B \geqslant 4,5$, необходимо, чтобы команды из A набрали в этих 9 -и встречах не менее 7 очков. В самом деле, если бы они набрали в них не более $6,5$ очков, то шахматисты из B набрали бы остальные из 9 разыгрываемых очков, т. е. не менее $9 - 6,5 = 2,5$ очков, а тогда $S_A - S_B \leqslant 6,5 - 2,5 = 4$. Но для того чтобы команды из A набрали в этих 9 -и встречах не менее 7 очков, необходимо, чтобы не менее 5 из 9 встреч проходило за „правильным“ столиком. Действительно, поскольку только за „правильным“ столиком шахматист из A набирает 1 очко во встрече с шахматистом из B (а на других столиках меньше), то если бы за „правильным“ столиком состоялось не более 4 -х из этих 9 -и встреч, шахматисты из A набрали бы во встречах с шахматистами из B не более $4 \cdot 1 + 5 \cdot 0,5 = 6,5$ очков.

Поскольку, как доказано, за „правильным“ столиком проведено 5 из 9 встреч и по условию задачи больше за этим столиком встреч быть не могло, то для того чтобы шахматистам из A в остальных $9 - 5 = 4$ встречах с шахматистами из B набрать не менее $7 - 5 = 2$ очков, эти 4 -е встречи должны быть проведены за „мирным“ столиком, так как только в этом случае шахматисты из A во встречах с шахматистами из B набирают $4 \cdot 0,5 = 2$ очка, а в остальных случаях меньше.

Итак, из 9 -и поединков шахматистов из A с шахматистами из B 5 поединков было за „правильным“ и 4 за „мирным“ столиками. Стало быть, из остальных поединков турнира (т. е. из поединков между шахматистами внутри каждой группы) не более одного было за „мирным“ столиком, а остальные – за „странным“ столиком. В частности, это означает, что слабейший шахматист $Ш_6$ во встречах с $Ш_4$ и $Ш_5$ набрал не менее чем $1 + 0,5 = 1,5$ очка. Но тогда всего в турнире должно было бы быть набрано не менее чем $1,5 + 2 + \ + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 = 16,5$ очков, тогда как их разыгрывается только 15. Полученное противоречие показывает, что турнир, о котором идёт речь в условии задачи, состояться не мог.

10.8. Предположим, что существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет при любом $x \in \mathbb{R}$ равенству

$$f\big(f(x)\big) = 1 - xf(x). \tag{$*$}$$

Обозначим $c = f(0)$. Применяя к каждой части этого равенства функцию f (от чего равенство не нарушится) и воспользовавшись соотношением $(*)$ при $x = 0$, приходим к равенству

$$f(c) = f\big(f(0)\big) \underset{(*)}{=} 1 - 0 \cdot f(0) = 1 - 0 \cdot c = 1.$$

Поскольку, как найдено,

$$1 = f(c), \tag{1}$$

то, применяя к каждой части этого равенства функцию f и воспользовавшись равенствами $(*)$ (при $x = c$) и (1), получаем

$$f(1) = f\big(f(c)\big) \underset{(*)}{=} 1 - c \cdot f(c) \underset{(1)}{=} 1 - c \cdot 1 = 1 - c.$$

Так как

$$1 - c = f(1), \tag{2}$$

то аналогично

$$f(1 - c) = f\big(f(1)\big) \underset{(*)}{=} 1 - 1 \cdot f(1) \underset{(2)}{=} 1 - (1 - c) = c.$$

Опять применяя функцию f к каждой части найденного равенства

$$c = f(1-c), \tag{3}$$

получаем

$$f(c) = f\big(f(1-c)\big) \underset{(*)}{=} 1-(1-c)\cdot f(1-c) \underset{(3)}{=} 1-(1-c)c = c^2-c+1,$$

т. е.

$$c^2 - c + 1 = f(c). \tag{4}$$

Вследствие (1) и (4) имеем: $c^2 - c + 1 = 1$, откуда либо $c = 0$, либо $c = 1$.

Покажем, что каждое из равенств $c = 0$ и $c = 1$ противоречиво. В самом деле, если $c = 0$, то $0 = f(0)$ в силу определения c, но из (1) имеем равенство $1 = f(0)$. Противоречие. Если $c = 1$, то из (1) и (2) получаем соответственно: $1 = f(1)$ и $0 = f(1)$. Снова получили противоречие. Следовательно, функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей при любом $x \in \mathbb{R}$ равенству $(*)$, не существует.

11 класс

11.5. Ответ: да, существует; наибольшее $a = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Хорошо известно (и несложно доказать), что если $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение натурального числа n на простые, то

$$\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_s+1)$$

и

$$\sigma(n) = \left(1+p_1+\ldots+p_1^{k_1}\right)\left(1+p_2+\ldots+p_2^{k_2}\right)\times\ldots\times$$
$$\times\left(1+p_s+\ldots+p_s^{k_s}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)\sqrt{n}} = \frac{1+p_1+\ldots+p_1^{k_1}}{(k_1+1)p_1^{k_1/2}}\cdot\frac{1+p_2+\ldots+p_2^{k_2}}{(k_2+1)p_2^{k_2/2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1+p_s+\ldots+p_s^{k_s}}{(k_s+1)p_s^{k_s/2}}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что при всех $p \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ верно неравенство

$$\frac{1+p+\ldots+p^k}{(k+1)p^{k/2}} \geqslant \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

т. е. что левая часть будет наименьшей при $p=2$ и $k=1$.

Положим $x = \sqrt{p}$ и докажем, что для каждого натурального k функция

$$f_k(x) = \frac{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}}{x^k}$$

возрастает на множестве $x > 1$.

Для функции $f_1(x) = x + 1/x$ это легко проверяется, так как

$$f_1(x) - f_1(y) = (x-y) + \frac{y-x}{xy} = (x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right).$$

В общем случае это сразу следует из следующих очевидных соотношений:

$$f_{2l}(x) = 1 + f_1(x^2) + \ldots + f_1(x^{2l}),$$
$$f_{2l+1}(x) = f_1(x) + f_1(x^3) \ldots + f_1(x^{2l+1}),$$

и установленного возрастания функции f_1.

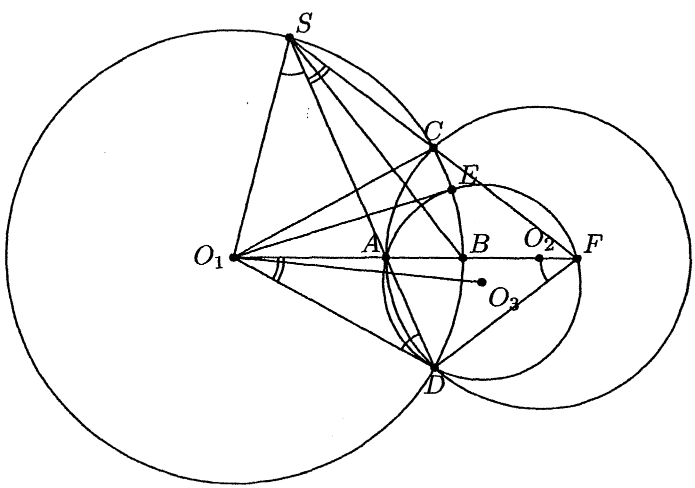
Стало быть, наименьшее значение выражения $\dfrac{1+p+\ldots+p^k}{p^{k/2}}$ на множестве $p \geqslant 2$ есть $\dfrac{1+2+\ldots+2^k}{2^{k/2}}$, а значит, $\dfrac{1+p+\ldots+p^k}{(k+1)p^{k/2}} \geqslant \dfrac{1+2+\ldots+2^k}{(k+1)2^{k/2}}$. Наконец, последовательность $y_k = \dfrac{1+2+\ldots+2^k}{(k+1)2^{k/2}}$, $k \in \mathbb{N}$, возрастает, так как

$$y_{k+1} - y_k = \frac{1+2(1+2+\ldots+2^k)}{(k+2)2^{k/2}\sqrt{2}} - \frac{1+2+\ldots+2^k}{(k+1)2^{k/2}} =$$

$$= \frac{(k+1)+(1+2+\ldots+2^k)(2k+2-\sqrt{2}k-2\sqrt{2})}{(k+1)(k+2)2^{k/2}\sqrt{2}} > 0$$

(при $k > 1$ это следует из неравенства $2k+2 > (k+2)\sqrt{2}$, а при $k = 1$ проверяется непосредственно). Таким образом, наименьшее значение последовательности (y_k) есть y_1, что и завершает доказательство того, что наибольшее значение $a = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

11.6. Пусть O_3 — центр окружности Γ_3, B — точка пересечения O_1O_2 с окружностью Γ_1.



Заметим, что $\angle BO_1D = 0.5\angle CO_1D = 0.5 \smile CBD = \angle DSC$. Поэтому $\angle DSF = \angle FO_1D$, откуда следует, что четырехугольник SO_1DF вписанный. Но тогда

$$\angle O_1FD = \angle O_1SD = [O_1S = O_1D] = \angle O_1DS.$$

Имеем $\angle O_1DS = \angle O_1FD = 0.5 \smile AD$, т.е. угол между хордой AD окружности Γ_3 и прямой O_1D равен половине дуги AD. Последнее означает, что O_1D — касательная к окружности Γ_3. Поскольку точка E симметрична точке D относительно линии центров O_1O_3 окружностей Γ_1 и Γ_3, то O_1E так же является касательной к окружности Γ_3.

11.7. Ответ: $n = (m-1)^2$

Заметим, что из любой точки выходит не более $(m-2)$ отрезков одного цвета. Действительно, в противном случае существуют m точек, соединенных друг с другом отрезками одного цвета. Но тогда либо каждая из оставшихся точек соединена с указанными m отрезками того же цвета, а значит вообще все отрезки окрашены в этот же цвет, что невозможно, либо найдется вершина соединенная с данными m вершинами отрезками $(m-1)$ -го других цветов, но тогда с двумя из этих вершин она будет соединена одним цветом, отличным от цвета соединяющего эти вершины отрезка, что также невозможно. Следовательно, всего из точки выходит не более $m \times (m-2)$ отрезков. Но так как всего из точки выходит $(n-1)$ отрезок, то $(n-1) \leqslant m(m-2)$, откуда $n \leqslant m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$.

Пример для $n = (m-1)^2$ может быть построен следующим образом. Пронумеруем точки парами чисел (i,j), $i,j = 1,2,...,m-1$, а цвета числами $1,2,:,m$. Тогда по $K = (m-1)(m-2)/2$ отрезков между точками $(i,1)$, $(i,2)$, ..., $(i,m-1)$ для всякого $i = 1,..,m-1$ покрасим в цвет 1. По отрезков K между точками $(1,i)$, $(2,i)$, ..., $(m-1,i)$ для всякого $i = 1,...,m-1$, покрасим в цвет 2. Наконец, в цвета $c = 3,..,m$ покрасим по K отрезков между точками $(i, 1 + (j + (\ -2)(i-1)) \bmod (m-1))$ для $i,j = 1,...,m-1$. Таким образом, в каждый из цветов окажутся покрашенными по $(m-1)K$ из общего числа $m(m-1)K$ отрезков, образующие $(m-1)$ не пересекающихся комплексов из $(m-1)$ попарно соединенных вершин (полных графов), что очевидно удовлетворяет условию задачи.

11.8. Ответ: 1.

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет при любом $x \in \mathbb{R}$ равенству

$$f\big(f(x)\big) = x^2 f(x) - x + 1. \qquad (*)$$

Обозначим $f(1) = a$. Подставляя в равенство $(*)$ значение $x = 1$, получим, что $f\big(f(1)\big) = f(1)$, т. е. $a = f(a)$. Применив к каждой части последнего равенства функцию f (от чего равенство не нарушится) и воспользовавшись соотношением $(*)$, приходим к равенству

$$f(a) = f\big(f(a)\big) \underset{(*)}{=} a^2 f(a) - a + 1,$$

или, так как $f(a) = a$, — к равенству $a = a^3 - a + 1$, т. е. к равенству $a^3 - 2a + 1 = 0$. Решая это кубическое уравнение (для чего заметим, что $a^3 - 2a + 1 = (a-1)(a^2 + a - 1)$), находим, что значениями a могут быть разве что значения $a = 1$, $a = (-1 + \sqrt{5})/2$ или $a = (-1 - \sqrt{5})/2$. Покажем, что ни одному из двух последних значений величина a равняться не может. Для этого рассмотрим значение $f(0)$.

Обозначим $c = f(0)$. Применив к каждой части этого равенства функцию f, согласно $(*)$ находим: $f(c) = f\big(f(0)\big) \underset{(*)}{=} 0^2 \cdot f(0) - 0 + 1 = 1$. Применив к каждой части найденного равенства

$$1 = f(c)) \tag{1}$$

функцию f и воспользовавшись равенствами $(*)$ (при $x = c$) и (1), получаем

$$f(1) = f\big(f(c)\big) \underset{(*)}{=} c^2 f(c) - c + 1 \underset{(1)}{=} c^2 - c + 1,$$

т. е. $a = c^2 - c + 1$, или $c^2 - c + 1 - a = 0$. Это квадратное относительно c уравнение, если бы a равнялось любому из значений $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, не имело бы решений, поскольку его дискриминант D при таких a отрицателен: $D = 1 - 4(1 - a) = -5 \pm 2\sqrt{5} < 0$. Следовательно, такого c, что $f(0) = c$ не существовало бы, но это невозможно, поскольку функция $y = f(x)$ согласно условию определена при всех действительных x и, в частности, при $x = 0$. Поэтому $a \neq (-1 \pm \sqrt{5})/2$, а значит, $a = 1$.