Министерство образования Республики Беларусь

«L X»

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Минск 2010

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 60-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Базылев Д.Ф. (10.1, 11.2)
Барабанов Е.А. (7.1)
Берник В.И. (9.3)
Войделевич А.С. (11.1)
Воронович И.И. (7.4, 8.3, 8.4, 9.2, 10.2, 11.4)
[redacted]
Каскевич В.И. (7.2, 8.2, 9.4, 10.4, 11.3)
Карамзин В.П. (9.1, 11.3)
Мазаник С.А. (7.4, 8.4, 10.3, 11.4)
Миротин А.Р. (8.4)
Чернов С.А. (8.1)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.1. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$ab = 160 + 90(a, b),$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

7.2. Двое котов Веня и Сеня играют в следующую игру. У них имеется куча из 50 килек. Ходят по очереди. За один ход разрешается съесть ровно 1, ровно 4 или ровно 7 килек. Выигрывает тот, кто съест последнюю кильку. Первым ходит Веня.

Кто выиграет, Веня или Сеня, и как он должен играть, чтобы добиться победы независимо от игры соперника?

7.3. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 30 см. CH — высота этого треугольника, CK — биссектриса угла ACH, CL — биссектриса угла BCH.

Найдите длину гипотенузы AB, если длина отрезка KL равна 4 см.

7.4. Можно ли на плоскости отметить 6 различных точек — 1 красную, 2 синих, 3 зеленых, так, чтобы сумма расстояний между красной и синими точками была равна 8, между красной и зелеными — 6, а сумма всех попарных расстояний между синими и зелеными — 9?

8 класс

8.1. Найдите все пары натуральных чисел a и b ($a \leqslant b$), для которых выполняется равенство

$$ab = 300 + 7[a,\, b] + 5(a,\, b)\,,$$

где $[a,\, b] = \text{НОК}\,(a,\, b)$, а $(a,\, b) = \text{НОД}\,(a,\, b)$.

8.2. На бумаге записаны числа от 1 до 80. Двое игроков по очереди зачеркивают некоторые числа. За один ход разрешается зачеркнуть 1, 5 или 8 чисел. Выигрывает тот, кто зачеркнет последнее число.

Кто выиграет: первый игрок, начинающий игру, или второй, и как он должен играть, чтобы добиться победы независимо от игры соперника?

8.3. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы углов BAD и CDA пересекаются на серединном перпендикуляре основания BC.

Докажите, что либо $AB = CD$, либо $AB + CD = AD$.

8.4. Можно ли на плоскости отметить 8 различных точек — 1 красную, 3 синих и 4 зеленых, так, чтобы сумма расстояний между красной и синими точками была равна 6, между красной и зелеными — 16, а сумма всех попарных расстояний между синими и зелеными — 56 ?

9 класс

9.1. В треугольнике ABC, в котором сторона AB наименьшая, на луче CA отметили точку M, такую, что $CM = MB$, а на луче CB — точку N, такую, что $CN = NA$.

Докажите, что точки A, B, N, M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной окружности.

9.2. На плоскости отмечены 15 различных точек, среди которых есть синие, красные и зеленые, причем красных точек больше всего. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 5, между красными и зелеными точками равна 31, а между синими и зелеными точками равна 25.

Определите точное количество точек каждого цвета.

9.3. Вася рассмотрел все квадратные трёхчлены $y = ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом, где a, b, c — натуральные числа, не превосходящие 50. Для каждого из этих трёхчленов он вычислил его наименьшее возможное значение и записал все полученные числа в блокнот.

Среди записанных Васей чисел найдите наибольшее и наименьшее числа.

9.4. Кощей Бессмертный и Баба-Яга играют в следующую игру. У них имеется куча из 25201 мухомора. Ходят по очереди. За один ход разрешается взять из кучи и съесть ровно n или ровно m грибов. Выигрывает тот, кто съест последний мухомор. Если последний гриб не может быть съеден ни кем, то признается ничья. Перед началом игры Кощей назначает число n ($1 \leqslant n \leqslant 10$) и указывает, кто будет ходить первым. Затем Баба-Яга назначает число m ($m \neq n$, $1 \leqslant m \leqslant 10$), и игра начинается.

Может ли кто-то из игроков назначить свое число так, чтобы обеспечить себе победу независимо от выбора противника и его последующей игры?

10 класс

10.1. Найдите значение выражения

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c}+\frac{1}{b+c-5a}+\frac{1}{c+a-5b}\right),$$

если действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{27}{2}$$

(считаем, что знаменатели всех дробей отличны от нуля).

10.2. На плоскости отмечены 4 синих, 10 зеленых и несколько (не менее одной) красных точек. Все точки различны. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 21, сумма всех попарных расстояний между красными и зелеными точками равна 2.

Может ли сумма сумма всех попарных расстояний между синими и зелеными точками быть равна **а)** 20? **б)** 18?

10.3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 3BC$. Окружность Γ_1 с центром в точке B проходит через середину диагонали BD, а окружность Γ_2 с центром в точке C проходит через середину диагонали AC.

Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей Γ_1 и Γ_2, пересекает основание AD в его середине.

10.4. Малыш и Карлсон играют в следующую игру. У них имеется куча из 360 конфет. Ходят по очереди. За один ход разрешается съесть ровно 1, ровно n или ровно m конфет. Выигрывает тот, кто съест последнюю конфету. Перед началом игры Малыш назначает число n ($1 < n < 10$). Затем Карлсон назначает число m ($m \neq n$, $1 < m < 10$), и делает первый ход.

Может ли кто-то из игроков назначить свое число так, чтобы обеспечить себе победу независимо от выбора противника и его последующей игры?

11 класс

11.1. Точка M — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), у которой $AD > BC$. Окружность Γ_1 проходит через точку M и касается основания AD в точке A. Окружность Γ_2 проходит через точку M и касается основания AD в точке D. Точка S – точка пересечения прямых AB и DC, X – точка пересечения Γ_1 и прямой AS, Y – точка пересечения Γ_2 и прямой DS, O – центр окружности, описанной около треугольника ASD.

Докажите, что $SO \perp XY$.

11.2. Пусть r – некоторое фиксированное положительное число. Известно, что при некотором натуральном n справедливо следующее утверждение: каковы бы ни были действительные положительные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1 + \ldots + a_n = r\left(\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$, они также удовлетворяют и равенству $\dfrac{1}{\sqrt{r} - a_1} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{r} - a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$. Найдите n.

11.3. Коля и Миша играют в следующую игру. У них имеется куча из 330 камешков. Ходят по очереди. За один ход разрешается взять из кучи ровно 1, ровно n или ровно m камешков. Выигрывает тот, кто возьмет последний камешек. Перед началом игры Коля назначает число n ($1 < n < 10$). Затем Миша назначает число m ($m \neq n$, $1 < m < 10$). Первым ходит Коля.

Может ли кто-то из игроков назначить свое число так, чтобы обеспечить себе победу независимо от выбора противника и его последующей игры?

11.4. На плоскости отмечены 15 различных точек, среди которых есть синие, красные и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 51, между красными и зелеными точками равна 39, между синими и зелеными точками равна 1.

Сколько на плоскости отмечено красных, сколько синих и сколько зеленых точек? (Укажите все возможности.)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.1. Ответ: (10; 34), (125; 2), (170; 2), (250;1), (34;10), (2;125), (2;170), (1; 250).

Из данного уравнения следует, что одно из чисел делится на 5. Более того, на 5 должно делиться ровно одно из них, иначе бы (a, b) и $90(a, b)$ делились бы на 25 и тогда, ввиду уравнения, число 160 также делилось бы на 25, что не так. Пусть, без ограничения общности, $a \vdots 5$, $b \not\vdots 5$. Тогда $a = 5c$, $(a, b) = (5c, b) = (c, b)$, и уравнение перепишется в виде $bc = 32 + 18(c, b)$. Так как числа bc и $18(c, b)$ делятся на (c, b), то в силу уравнения (c, b) является делителем числа 32, т.е. $(c, b) = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Если $(c, b) \geqslant 4$, то bc делится на $4^2 = 16$, откуда $18(c, b) = (bc - 32) \vdots 16$, и тогда (c, b) делится на 8. Тогда $bc \vdots 64$, т.е. $18(c, b) \vdots 32$. Поэтому $(c, b) \vdots 16$. Если $(c, b) = 16$ или $(c, b) = 32$, то что $bc \vdots 16^2$, но $bc = 32 + 18 \cdot 16$ или $bc = 32 + 18 \cdot 64$ — противоречие. Поэтому (c, b) равно 1 или 2.

1) Пусть $(c, b) = 1$. Тогда $bc = 50$, причем хотя бы одно из чисел нечетно. Учитывая, что $b \not\vdots 5$, находим $c = 25$ и $b = 2$, либо $c = 50$ и $b = 1$. Это дает решения исходного уравнения $(a, b) = (125, 2)$ и $(a, b) = (250, 1)$.

1) Пусть теперь $(c, b) = 2$. Тогда $bc = 32 + 36 = 68$. Положим $b = 2b_1$, $c = 2c_1$, где b_1 и c_1 взаимно просты. Тогда $b_1c_1 = 17$. Поэтому либо $c_1 = 1$ и $b_1 = 17$, либо $c_1 = 17$ и $b_1 = 1$. Это дает решения исходного уравнения $(a, b) = (10, 34)$ и $(a, b) = (170, 1)$.

В силу симметричности уравнения относительно a и b из четырех полученных решений находим остальные четыре решения, меняя ролями a и b.

7.2. Ответ: выиграет Сеня.

Если игра подходит к концу и в куче остается мало рыбок, то определить, кто выиграет, достаточно легко. Так, если осталось 1 или 4 рыбки, то ясно что выиграет тот, кто должен делать очередной ход, а если осталось 2 рыбки, то игрок, который должен делать очередной ход, проиграет. Поэтому будем решать задачу "с конца". Выпишем по порядку все числа от 1 до 50. Будем последовательно отмечать их знаками " + "или " – в зависимости от того, выиграет игрок, который должен делать очередной ход, или проиграет, если в куче осталось данное число килек. При этом будем иметь в виду, что если игрок может сделать ход на число, помеченное знаком " – то он выиграет, а если любой его ход будет приходиться на число, помеченное знаком " + то он проиграет. Получим:

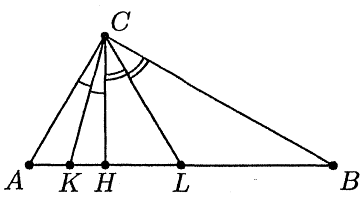
+1	-2	+3	+4	-5	+6	+7	-8
1	-	1	4	-	4	7	-

+9	-10	+11	+12	-13	+14	+15	-16
1	-	1	4	-	4	7	-

Здесь, во второй строчке таблиц указан один из выигрышных ходов. Такой процесс расстановки знаков можно продолжить дальше, до числа 50. Но, можно заметить, что знаки повторяются с периодом 8. (Это легко доказать по индукции.) Поскольку число 50 при делении на 8 дает в остатке 2, знак у числа 50 будет той же, как у числа 2, т.е., число 50 будет помечено знаком " – ". Поэтому игрок, начинающий игру, т.е., Веня, проиграет. Второму игроку, т.е., Сене, чтобы выиграть, достаточно делать ходы, которые приходятся на числа, помеченные знаком " – " , например, те, которые указаны во второй строчке таблицы.

7.3. Ответ: 13 см.

Пусть $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $P = a + b + c$. Тогда $\angle ACH = \beta$, $\angle BCH = \alpha$, поэтому



$$\angle ACK = \angle KCH = \beta/2,$$

$$\angle HCL = \angle LCB = \alpha/2.$$

Поскольку $\angle HKC = \angle KAC + \angle ACK$ (как внешний угол треугольника ACK), то

$$\angle HKC = \alpha + \beta/2 = \angle BCH + \angle LCH = \angle BCK.$$

Следовательно, треугольник KCB равнобедренный и $BK = BC = a$. Аналогично $AL = AC = b$. Следовательно, $AK = AB - BK = c - a$, откуда $KL = AL - AK = b - (c - a) = a + b - c$. Таким образом,

$$c = \frac{(a+b+c)-(a+b-c)}{2} = \frac{P - KL}{2} = \frac{30-4}{2} = 13 \text{ (см)}.$$

7.4. Ответ: нет, нельзя.

Первое решение. Предположим, что точки на плоскости расположить можно. Обозначим красную точку R, синие – B_1, B_2, зеленые G_1, G_2, G_3. Из неравенства треугольника следует

$$B_1G_1 + RG_1 \geqslant RB_1,\ B_2G_1 + RG_1 \geqslant RB_2,\ B_1G_2 + RG_2 \geqslant RB_1,$$

$$B_2G_1 + RG_2 \geqslant RB_2,\ B_1G_3 + RG_3 \geqslant RB_1,\ B_2G_3 + RG_3 \geqslant RB_2.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$(B_1G_1 + B_1G_2 + B_1G_3 + B_2G_1 + B_2G_2 + B_2G_3\cancel{+3})+$$

$$+2(RG_1 + RG_2\cancel{+2} + RG_3\cancel{+3}) \geqslant 3(RB_1 + RB_2),$$

т.е.

$$9 + 2\cdot 6 \geqslant 3\cdot 8,$$

что не так. Следовательно, нельзя расположить точки на плоскости с соблюдением условий задачи.

Второе решение. Обозначим красную точку R, синие – B_1, B_2, зеленые G_1, G_2, G_3. По условию $RB_1 + RB_2 = 8$. Значит длина одного из этих отрезков больше либо равна 4. Пусть, например, $RB_1 \geqslant 4$. Заметим, что длины всех трех ломанных B_1G_1R, B_1G_2R,

B_1G_3R не менее длины отрезка RB_1, а значит не менее 4. Тогда сумма длин этих ломаных не менее 12. Однако эта сумма равна сумме длин трех отрезков, выходящих из точки R в точки G_1, G_2, G_3 (по условию эта сумма равна 6), плюс сумма длин трех отрезков, выходящих из точки B_1 в точки G_1, G_2, G_3. Получаем, что последняя упомянутая сумма не меньше, чем $12 - 6 = 6$. Тогда сумма длин трех отрезков, выходящих из точки B_2 в точки G_1, G_2, G_3, не превосходит $9 - 6 = 3$. Рассмотрим тогда сумму длин трех ломаных B_2G_1R, B_2G_2R, B_2G_3R – она равна сумме отрезков $RG_1 + RG_2 + RG_3 = 6$ и отрезков $B_2G_1 + B_2G_2 + B_2G_3 \leqslant 3$, т.е. сумма этих ломанных не превосходит 9. Однако каждая из ломаных не меньше длины отрезка B_2R. Заключаем, что $3B_2R \leqslant 9$, или $B_2R \leqslant 3$. Тогда $RB_1 \geqslant 5$. Поэтому можно уточнить оценку для суммы длин отрезков B_1G_1, B_1G_2, B_1G_3. Эта сумма не менее $3B_1R - 6 \geqslant 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Однако это означает, что сумма длин отрезков, выходящих из точки B_2 в зеленые точки, равна 0 – противоречие.

8 класс

8.1. Ответ: $(12,\ 72)$, $(24,\ 36)$.

Пусть $[a,\ b] = \text{НОК}\,(a,\ b) = x$, а $(a,\ b) = \text{НОД}\,(a,\ b) = y$. Хорошо известно (и легко доказать), что $ab = [a,\ b] \cdot (a,\ b)$, т.е., в наших обозначениях $ab = xy$. Тогда уравнение из условия задачи можно переписать в виде

$$xy = 300 + 7x + 5y \quad \Leftrightarrow \quad xy - 7x - 5y + 35 = 335 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(y-7) - 5(y-7) = 335 \quad \Leftrightarrow\cancel{\Leftrightarrow} \quad (x-5)(y-7)\cancel{-5(y-7)} = 5 \cdot 67.$$

Множители в правой части последнего уравнения – простые числа, а множители в левой части этого уравнения – целые числа, которые, как нетрудно видеть не могут быть отрицательными. Кроме того $(x-5) > (y-7)$, так как $x = \text{НОК}\,(a,\ b) \geqslant \text{НОД}\,(a,\ b) = y$. Поэтому имеется только следующие две возможности.

1) $x-5=67$, а $y-7=5$. Тогда $x=72$, а $y=12$. Это означает, что $a = 12n$, $b = 12m$ для некоторых взаимно простых n, m, и $ab = = 72\cdot 12$, т. е., $12n\cdot 12m = 72\cdot 12$, откуда $nm=6$. В результате (учитывая, что $a \leqslant b$ и, значит $n \leqslant m$) получаем: $n = 1$, $m = 6$ и, значит, $a = 12$, $b = 12\cdot 6 = 72$, или $n = 2$, $m = 3$ и, значит, $a = 12\cdot 2 = 24$, $b = 12\cdot 3 = 36$.

2) $x - 5 = 335$, а $y - 7 = 1$. Тогда $x = 340$, а $y = 8$. Но этого не может быть, поскольку $x =$ НОК (a, b) должен делиться на $y =$ НОД (a, b), а 340 на 8 не делится.

Таким образом, существует две пары решений данного уравнения: (12, 72), (24, 36).

8.2. Ответ : выиграет второй игрок.

Если игра подходит к концу и на доске остается мало чисел, то определить, кто выиграет, достаточно легко. Так, если осталось 1 число или 5 чисел, то ясно что выиграет тот, кто должен делать очередной ход, а если осталось 2 числа или 4 числа, то игрок, который должен делать очередной ход, проиграет. Поэтому будем решать задачу "с конца". Выпишем по порядку все числа от 1 до 80. Будем последовательно отмечать их знаками " + "или " – в зависимости от того, выиграет игрок, который должен делать очередной ход, или проиграет, если на доске осталось данное количество чисел. При этом будем иметь в виду, что если игрок может сделать ход на число, помеченное знаком " – то он выиграет, а если любой его ход будет приходиться на число, помеченное знаком " + то он проиграет. Получим:

+1	-2	+3	-4	+5	-6	+7	+8	+9	+10	+11	+12	-13
1	-	1	-	5	-	1	8	5	8	5	8	-

+14	-15	+16	-17	+18	-19	+20	+21	+22	+23	+24	+25	-26
1	-	1	-	5	-	1	8	5	8	5	8	-

Здесь, во второй строчке таблиц указан один из выигрышных ходов. Такой процесс расстановки знаков можно продолжить дальше, до числа 80. Но, можно заметить, что знаки повторяются с периодом 13. (Это легко доказать по индукции.) Поскольку число 80 при делении на 13 дает в остатке 2, знак у числа 80 будет той же, как у числа 2, т.е.

число 80 будет помечено знаком " – ". Поэтому первый игрок, начинающий игру, проиграет. Второму игроку, чтобы выиграть, достаточно делать ходы, которые приходятся на числа, помеченные знаком " – " , например, те, которые указаны о второй строчке таблицы.

8.3. Пусть точки P и M на основаниях AD и BC таковы, что $MP \perp AD$ и $BM = MC$. По условию точка K принадлежит MP. Опустим из точки K перпендикуляры KL и KN на стороны AB и DC (или на их продолжения) соответственно. Возможны два случая: либо обе точки лежат на сторонах AB и DC (обе на их продолжении), либо одна из них лежит на стороне, а вторая на продолжении другой стороны. По свойству биссектрис $KL = KP = KN$. Поскольку K лежит на срединном перпендикуляре к BC, то $BK = KC$. Поэтому прямоугольные треугольники BLK и CNK равны, и, значит, $\angle LBK = \angle NCK$, $BL = CN$.

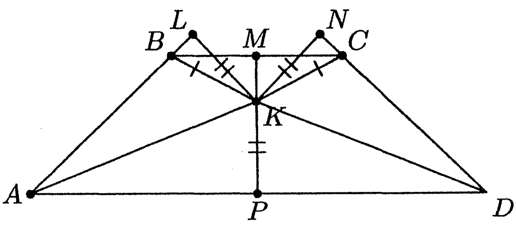


Рис. 1

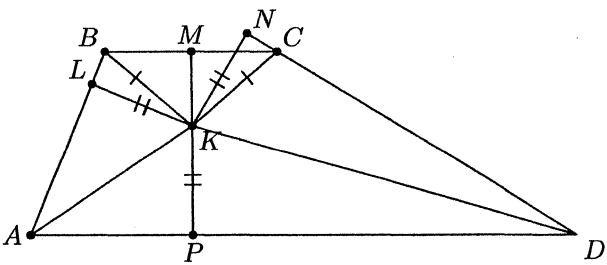


Рис. 2

Если имеет место первый случай (см. рис. 1), то из равнобедренности треугольника BKC следует, что $\angle KBC = \angle KCB$. Поэтому

$$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = (180^\circ - \angle LBK) + \angle KBC =$$

$$= (180^\circ - \angle NCK) + \angle KCB = \angle KCD + \angle KCB = \angle BCD.$$

Следовательно, углы при основании BC равны, и, значит, трапеция $ABCD$ равнобокая. (Аналогично рассматривается конфигурация, когда обе точки L и N лежат на сторонах AB и DC).

Если же имеет место второй случай (см. рис. 2), то по свойству биссектрис имеем $AL = AP$, $PD = DN$. Следовательно,

$$AB + DC = (AL + LB) + (DN - NC) = AP + PD + (LB - NC) =$$

$$= AP + PD = AD,$$

что и требовалось.

8.4. Ответ: да, можно.

Точки можно расположить на координатной прямой, например, следующим образом: синие в точках с координатами -3, -1, 2, красную в точке с координатой 0 и зеленые — 3, 3.5, 4.5, 5.

9 класс

9.1. Пусть P и Q — середины сторон BC и AC соответственно. Так как $CM = MB$ и $CN = NA$, то точки M и N лежат на серединных перпендикулярах к сторонам BC и AC соответственно. Поскольку AB наименьшая из сторон, то расстояние от точки A до точки B меньше расстояния от точки A до точки C, поэтому точки A и C лежат по разные стороны от серединного перпендикуляра стороны BC. Это означает, что точка M лежит на стороне AC. Аналогично, точка N лежит на стороне BC. Так как по условию $CM = MB$, то треугольник BMC равнобедренный и $\angle BCM = \angle MBC$. Аналогично, $\angle ACN = \angle NAC$. Поскольку $\angle BCM = \angle ACN$, то

$$\angle NAM = \angle NAC = \angle MBC = \angle MBN.$$

Следовательно, точки A, B, M, N лежат на одной окружности Г (углы NAM и MBN опираются на один отрезок MN и их вершины лежат в одной полуплоскости относительно прямой MN). Осталось заметить, что углы NOM и ACB являются углами с взаимно перпендикулярными сторонами, поэтому либо

$$\angle NOM + \angle ACB = \angle NOM + \angle MBN = 180^\circ \quad \text{(см.рис. 1)},$$

либо

$$\angle NOM = \angle ACB = \angle MBN \quad \text{(см.рис. 2)}.$$

Оба эти равенства означают, что точка O так же лежит на окружности Г.

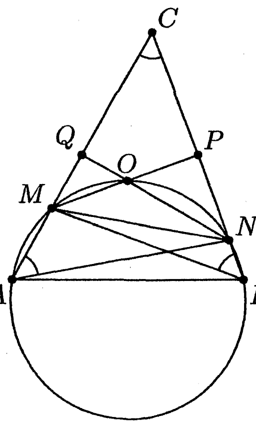


Рис. 1

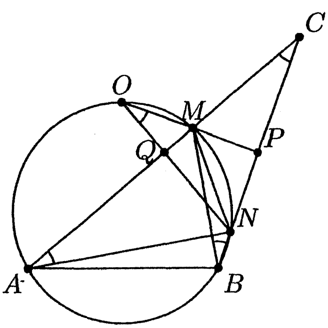


Рис. 2

9.2. Ответ : красных точек 6, синих – ~~4~~ 5, зеленых ~~5~~. 4

Пусть m, n, k – количество красных, зеленых и синих точек. Пусть A, B, C – суммы попарных расстояний между синими и зелеными, красными и синими, красными и зелеными точками соответственно. Тогда используя неравенства треугольника, несложно получить, что для существования точек на плоскости необходимо выполнения двойных неравенств

$$mA - kC \leqslant nB \leqslant mA + kC, \; mA - nB \leqslant kC \leqslant mA + nB,$$

$$nB - kC \leqslant mA \leqslant nB + kC. \qquad (*)$$

В нашем случае

$$25m - 5n \leqslant 31k, \qquad (1)$$

$$31k \leqslant 25m + 5n. \qquad (2),$$

По условию $m+n+k = 15\cancel{7}$, и так как красных точек больше всех, то $m \geqslant 6$, $k \leqslant 6$, $n \leqslant \cancel{8}.6$

Допустим, что $m \geqslant 7$. Тогда из неравенства (1) $26k \cancel{+} (5k + 5n + 5m) \geqslant 30m$, откуда $26k + 75 \geqslant 30m$, что дает $k \geqslant \cancel{8}$ 6. Поэтому $k = 6$, тогда $m + n = 9$, И получаем

$$31k \leqslant 25m+5n \Longrightarrow 31\cdot 6 \cancel{\geqslant} \overset{\leq}{} 25m+5n = 20m+5\cdot(m+n) = 20m+45,$$

откуда $m \geqslant 8$, т.е. $m = 8$, $n = 1$. Но тогда неравенство (1) не выполнено, противоречие.

Следовательно, $m = 6\cancel{6}$, $k + n = 9$. Неравенство (1) примет вид

$$150 \leqslant 31k + 5n = 26k + 5(k + n) = 26k + 45 \Rightarrow 26k \geqslant 105,$$

откуда $k \geqslant 5$. Неравенство (2) влечет

$$36k \leqslant \overset{150}{\cancel{10}} + 5n + 5k = \overset{150}{\cancel{160}} + 5 \cdot 9 = 195,$$

откуда $k \leqslant 5$. Таким образом, $k = 5$ и тогда $n = 4$.

9.3. Ответ: $\overset{50-\frac{1}{306}}{\cancel{50}}$ и $\dfrac{3}{196}$. go on OX

Расстояние от вершины параболы, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, равно

$$d = \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (*)$$

Поэтому задача равносильна следующей: *найти наибольшее и наименьшее значения выражения* $(*)$, *если целые числа* a, b, c *удовлетворяют неравенствам:* $0 < a < 50$, $|b| \leqslant 50$, $|c| \leqslant 50$ *и* $b^2 - 4ac < 0$.

Найдём наибольшее значение. Имеем:

$$d = \frac{4ac - b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a} \leqslant 50 - \frac{b^2}{4a} \leqslant 50 - \frac{1}{4a} \leqslant 50 - \frac{1}{200}$$

Первое неравенство в этой цепочке вытекает из неравенства $c \leqslant 50$, а второе – из неравенств $a > 0$ и $b^2 \geqslant \cancel{0}\ 1$. Видим, что все неравенства в этой цепочке превращаются в равенства при $c = 50$, $b = \cancel{0}\ 1$ и, ~~например~~, при $a = \cancel{1}\ 50$. Кроме того, при этих a, b, c верно и неравенство $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot \cancel{1} \cdot 50 = -\cancel{200} < 0$. -50 Поэтому искомое наибольшее значение равно $50 - \frac{1}{200}$.

Найдём наименьшее значение. В дроби $(*)$ числитель и знаменатель – натуральные числа. Найдём наименьшее возможное значение числителя. Числитель не может равняться ни 1, ни 2. Действительно, это равносильно тому, что $b^2 = 4ac - 1$ или $b^2 = = 4ac - 2$, т. е. $b^2 = 4(ac - 1) + 3$ или $b^2 = 4(ac - 1) + 2$. Иными словами, квадрат (b^2) натурального числа при делении на 4 должен давать остатки 3 или 2. Но это невозможно, поскольку, как легко убедиться, квадраты натуральных чисел при делении на 4 дают в остатке только 0 или 1.

Стало быть, наименьшее возможное значение числителя дроби $(*)$ равно 3, т. е. $b^2 = = 4ac - 3$. Найдём при этом условии наибольшее (чтобы дробь $(*)$ была наименьшей) допустимое значение a, т. е., иными словами, найдём такое наибольшее целое a, что $0 < a \leqslant 50$ и $b^2 = 4ac - 3$ при некоторых целых $|b| \leqslant 50$ и $|c| \leqslant 50$. Из равенства $b^2 = 4ac - 3$ следует, что b – нечётное число, т. е. $b = 2k + 1$ для некоторого целого k. Значит, $(2k+1)^2 = 4ac - 3$, т. е. $k^2 + k + 1 = ac$. Но левая часть этого равенства – число нечётное, поэтому нечётным является и его правая часть, а значит, a и c – нечётные числа. Следовательно, возможные значения a – это $a = 49$, 47, 45, ... Начнём последовательно проверять эти значения a, начав с самого большого.

Проверим возможно ли равенство $b^2 = 4ac - 3$ при $a = 49$ и некоторых целых $|b| \leqslant 50$, $|c| \leqslant 50$. Имеем: $c = \dfrac{b^2 + 3}{4a} \leqslant \dfrac{2503}{4 \cdot 49} <$ 13. Значит, нужно проверить, может ли при некотором $c = 1$, 3, 5, 7, 9, 11 выражение $4 \cdot 49 \cdot c - 3 = 196c - 3$ быть точным квадратом натурального числа, не превосходящего 50. Так как при $c = 1,\ 5,\ 11$ последняя цифра выражения $196c - 3$ это 3 или 7, то при таких c это выражение не может быть точным квадратом. При $c = 1,\ 7$ и 9 получаем, что выражение $196c - 3$ равно соответственно $585,\ 1369$ и 1671. Из них число $1369 = 37^2$, а значит, при $c = 7,\ b = 37$ и $a = 49$ величина d равняется $\dfrac{3}{4 \cdot 49} = \dfrac{3}{196}$.

Итак, если числитель дроби $(*)$ равен 3 (а меньше он быть не может), то наименьшее значение d равно $3/196$. Если же числитель дроби $(*)$ не менее 4, то имеем оценку: $d = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \geqslant \dfrac{4}{4 \cdot 50} = \dfrac{1}{50} > \dfrac{3}{196}$. Значит, искомое наименьшее значение равно $\dfrac{3}{196}$.

Отметим, хотя для решения задачи это не нужно, что следующее по величине за $\dfrac{3}{196}$ расстояние равно $\dfrac{3}{4 \cdot 43} = \dfrac{3}{172}$, а следующее за ними расстояние равно $\dfrac{1}{50}$ и совпадает с полученной выше оценкой расстояния при числителе дроби $(*)$, равном 4.

9.4. Ответ: да, Баба-Яга может обеспечить себе победу.

Если Кощей назовет число n и определит, что первым будет ходить он, то Баба-Яга выиграет, если назовет число $m = 11 - n$. Для этого ей достаточно отвечать на ходы Кощея следующим образом. Если Кощей съедает n грибов, то Бабе-Яге следует съесть m грибов, и наоборот, если Кощей съедает m грибов, то Бабе-Яге следует съесть n грибов. Тогда после каждой пары ходов (Кощей, Баба-Яга), число грибов будет уменьшаться на $n = m = 11$. Заметим, что число грибов в куче $25201 = 2291 \cdot 11$ — делится на 11. Поэтому при такой игре игрок, который ходит вторым, т. е. Баба-Яга съест последний гриб и, значит, выиграет.

Если Кощей назовет число n и определит, что первой будет ходить Баба-Яга выиграет, если назовет число $m = 1$ при $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ и первым своим ходом съест 1 гриб. Останется 25200 грибов. Нетрудно проверить, что число 2520 делится на 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, т. е.

на $n+m$ при данных значениях n и m. Поэтому Баба-Яга выиграет, если (так же, как и выше) после каждого хода Кощея будет отвечать симметричным образом: если Кощей съест n грибов, то Баба-Яга – m грибов, и наоборот, если Кощей съест m грибов, то Баба-Яга – n. Если же $n = 1$, то Баба-Яга может назвать m, равное любому из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и играть так же, как описано выше (первый ход – 1 гриб, затем – симметричные ходы). Наконец, если $n = 10$, то Баба-Яга должна назвать число $m = 7$ и первым ходом съесть 7 грибов. Останется 25194 гриба. Заметим, что $25194 = 1482 \cdot 17$ – делится на 17, т. е. на $n+m$. Поэтому снова Баба-Яга выиграет, если, как и раньше, будет отвечать на ходы Кощея симметричным образом.

10 класс

9

10.1. Ответ: ~~54~~/5.

Обозначим $a+b+c=x$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=y$. Пусть $k=\frac{x}{6}$, тогда

$$a+b-5c=6(k-c), \quad b+c-5a=6(k-a), \quad c+a-5b=6(k-b).$$

В силу этих равенств и введённых обозначений

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c}+\frac{1}{b+c-5a}+\frac{1}{c+a-5b}\right)=$$

$$=\frac{x}{6}\left(\frac{1}{k-a}+\frac{1}{k-b}+\frac{1}{k-c}\right) \qquad (1)$$

Если сложить дроби в правой части равенства (1), получим дробь $\frac{A}{B}$, где

$$A=(k-a)(k-b)+(k-b)(k-c)+(k-c)(k-a) \text{ и } B=(k-a)(k-b)(k-c). \qquad (2)$$

Обозначим $z=abc$, тогда $ab+bc+ca=yz$. Раскрывая скобки в (2), вследствие введённых обозначений получаем

$$A=3k^2-2xk+yz \quad \text{и} \quad B=k^3-xk^2+yzk-z. \qquad (3)$$

Так как $x = 6k$ и по условию $xy = \frac{27}{2}$, то $y = \frac{9}{4k}$. Заменяя в (3) x и y согласно этим равенствам, получим

$$A = 3k^2 - 2 \cdot 6k \cdot k + \frac{9}{4k} z = 9\left(-k^2 + \frac{z}{4k}\right)$$

и

$$B = k^3 - 6k \cdot k^2 + \frac{9}{4k} zk - z = 5k\left(-k^2 + \frac{z}{4k}\right).$$

Поэтому

$$\frac{A}{B} = \frac{9}{5k}, \text{ а } \quad \frac{x}{6} \cdot \frac{A}{B} = \cancel{6}k \cdot \frac{9}{5k} = \frac{\cancel{54}\,9}{5}.$$

Следовательно,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c} + \frac{1}{b+c-5a} + \frac{1}{c+a-5b}\right) = \frac{\cancel{54}\,9}{5}.$$

Отметим, хотя для решения задачи это не нужно, что равенство из условия задачи $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{27}{2}$ выполняется, например, при $a = b = 4$, $c = 1$.

10.2. Ответ: а) не может; б) может.

а) Пусть количество красных точек равно n. Тогда должно выполняться неравенство (см. (*) в решении задачи 9.2)

$$10 \cdot 21 - 4 \cdot 2 \leqslant n \cdot 20 \leqslant 10 \cdot 21 + 4 \cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 202 \leqslant 20n \leqslant 218.$$

Ясно. что не существует целых n, удовлетворяющих такому условию.

б) Покажем, что 4 синих, 10 зеленых и 12 красных точек с указанными в условии суммами попарных расстояний (назовем эти суммы красно-зеленой, красно-синей и сине-зеленой) разместить можно.

Для удобства увеличим все расстояния в $4 \cdot 10 \cdot 12 = 480$ раз. Тогда мы должны привести пример размещения точек, при котором красно-зеленая сумма равна $2 \cdot 480$, красно-синяя сумма равна $21 \cdot 480$, сине-зеленая — $18 \cdot 480$. В предлагаемом примере все точки будут помещены на одну прямую.

Сперва поместим 4 синие точки в начало координат, 10 зеленых точек в точку с координатой 216. 6 красных точек – в точек с координатой 202 и еще 6 красных – в точку с координатой 218. Тогда сине-зеленая сумма равна $4 \cdot 10 \cdot 216 = 18 \cdot 480$, красно-синяя равна $4 \cdot 6 \cdot 202 + 4 \cdot 6 \cdot 218 = 21 \cdot 480$, а красно-зеленая равна $10 \cdot 6 \cdot (216 - 202) + 10 \cdot 6 \cdot (218 - 216) = 2 \cdot 480$. Осталось пошевелить точки так, чтобы все точки стали различны и при этом указанные суммы не изменились. Для этого можно заменить 4 синих точки с общей координатой 0 на точки с координатами -2ε, $-\varepsilon$, ε, 2ε; 10 зеленых точек с общей координатой 216 заменить на точки

$$216 - 5\varepsilon,\ 216 - 4\varepsilon,\ \ldots,\ 216 - \varepsilon,\ 216 + \varepsilon,\ \ldots,\ 216 + 5\varepsilon;$$

6 красных точек с общей координатой 202 заменить точками

$$202 - 3\varepsilon,\ 202 - 2\varepsilon,\ \ldots,\ 202 + 2\varepsilon,\ 202 + 3\varepsilon;$$

наконец 6 красных точек с общей координатой 218 заменить точками

$$218 - 3\varepsilon,\ 218 - 2\varepsilon,\ \ldots,\ 218 + 2\varepsilon,\ 218 + 3\varepsilon.$$

Здесь ε можно выбрать настолько малым, что порядок следования точек на прямой не изменится.

10.3. Пусть R – середина диагонали BD, M – середина основания AD, P – точка пересечения диагоналей AC и BD. Покажем, что расстояние от точки L до точки D в два раза больше расстояния от точки L до точки P. Из условия следует, что $BP : PD = 1 : 3$. Поэтому $BP = PR = 0.5RD$. Следовательно, LP – медиана треугольника BLR, а LR – медиана треугольника BLD.

По формуле для длины медианы имеем

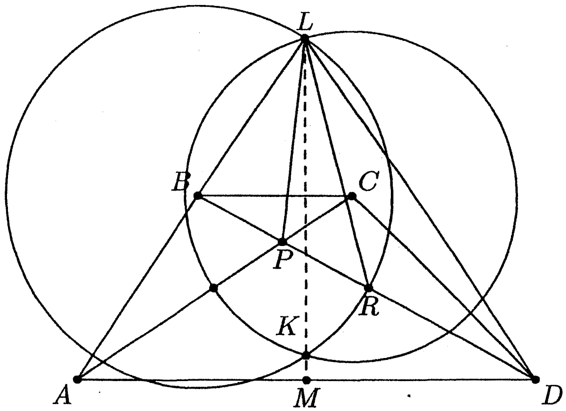
$$4LP^2 = 2LB^2 + 2LR^2 - BR^2, \quad 4LR^2 = 2LB^2 + 2LD^2 - BD^2.$$

Поэтому

$$4LP^2 = 2LB^2 + 2LR^2 - BR^2 = 2LB^2 + 0.5(2LB^2 + 2LD^2 - BD^2) - BR^2 =$$

$$= 3LB^2 + LD^2 - 0.5(2BR)^2 - BR^2 = LD^2 - 3(BL^2 - BR^2) =$$

$$= [BL = BR \ - \text{радиус } \Gamma_1] = LD^2.$$



Аналогично, $LA = 2LP$. Следовательно, $LA = LD$, т.е. точка L лежит на срединном перпендикуляре отрезка AD. Точно также доказываем, что и точка $\cancel{M}$ K лежит на серединном перпендикуляре отрезка AD. Таким образом, прямая $L\cancel{M}$ K пересекает отрезок AD в его середине.

10.4. Ответ : да, Малыш может обеспечить себе победу.

Покажем, что Малыш выиграет, если выберет число $n = 2$. Рассмотрим все возможные значения m. Если $m = 3$, то Малыш выиграет, если на ход Карлсона в k конфет будет отвечать ходом в $4 - k$ конфет (при рассматриваемых значениях n и m указанный ход Малыша всегда возможен). Действительно, при такой игре после каждой пары ходов (Карлсон, Малыш) число конфет в куче будет уменьшаться на 4. И поскольку исходное число конфет 360 делится на 4, то последняя конфета достанется тому, кто ходит вторым, т. е., Малышу.

Рассмотрим теперь другие значения m. Будем называть количество конфет в куче выигрышным, если игрок, которому достается такая куча и который должен делать очередной ход, может выиграть. В противном случае, если игрок, делающий очередной ход, не может выиграть с данным количеством конфет в куче, назовем это количество проигрышным. Рассматривая игру "с конца"легко определить выигрышные (будем отмечать их знаком " + ") и проигрышные количества (будем отмечать их знаком " – "). При этом будем иметь в виду, что если игрок может сделать ход на число, помеченное знаком " – то он выиграет, а если любой его ход будет приходиться на число, помеченное знаком " + то он проиграет. При $m = 4,\ 5,\ 7, 8$ получим:

+1	+2	-3	+4	+5	-6	+7	+8

-9	+10	+11	-12	+13	+14	-15	+16

Видим, что количества, кратные 3, являются проигрышными, а остальные количества – выигрышные. Легко показать по индукции, что так будет и для всех чисел, больших 12. Действительно, если количество конфет в куче не кратно 3 и равно $3k + 1$ ($3k + 2$), то ходом в 1 конфету (2 конфеты) получим $3k$ конфет. Если же число конфет в куче кратно 3 (равно $3k$), то любой ход в 1, 2, 4, 5, 7 или 8 конфет приведет к числу конфет, не кратному 3. Таким образом, поскольку исходное число конфет в куче (360) делится на 3, т. е., является проигрышным, то тот, кто делает первый ход, т. е., Карлсон, проиграет.

При $m = 6$ получим таблицу:

+1	+2	-3	+4	+5	+6	-7
1	2	-	1	2	6	-

+8	+9	-10	+11	+12	+13	-14
1	2	-	1	2	6	-

Здесь, во второй строчке указаны выигрышные ходы. Видим, что выигрышные и проигрышные количества повторяются с периодом 7. При этом проигрышными являются количества, кратные 7 ($7k$), и количества, имеющие остаток 3 при делении на 7, остальные количества – выигрышные. Легко обосновать по индукции, что это верно и для всех количеств, больших 14. Действительно, если в куче находится $7k+1$, $7k+2$ или $7k+6$ конфет, то сделав ход соответственно в 1, 2, 6 конфет, получим проигрышное количество $7k$ конфет. А если в куче находится $7k+4$ или $7k+5$ конфет, то сделав ход соответственно в 1, 2 конфеты, получим проигрышное количество $7k+3$. Если же в куче имеется $7k$ или $7k+3$ конфет, то, легко видеть, любые ходы приводят к выигрышным количествам, т. е., количествам, имеющим при делении на 7 остаток $1, 2, 4, 5$ или 6. В результате, поскольку $360 = 51 \cdot 7 + 3$ — проигрышное количество, то и в этом случае Карлсон, делающий первый ход, проиграет.

При $m = 9$ получим таблицу:

+1	+2	-3	+4	+5	-6	+7	+8	+9	-10
1	2	-	1	2	-	1	2	9	-

+11	+12	-13	+14	+15	-16	+17	+18	+19	-20
1	2	-	1	2	-	1	2	9	-

Как и раньше легко доказать по индукции, что выигрышные и проигрышные количества повторяются с периодом 10, в частности, все количества, кратные 10, являются проигрышными. Поэтому, так как исходное количество конфет в куче (360) делится на 10, то и в этом случае Карлсон проиграет, а Малыш выиграет.

11 класс

11.1. Проведем прямую LM, где L — вторая (отличная от точки M) точка пересечения окружностей Γ_1 и Γ_2. (Если же окружности Γ_1 и Γ_2 касаются друг друга в точке M, то LM — их общая касательная в точке M.) Пусть K — точка пересечения прямых LM и AD. Тогда по теореме о секущих

$$KA^2 = KM \cdot KL = KD^2 \text{ (или } KA^2 = KM^2 = KD^2) \Longrightarrow KA = KD.$$

Известно, что середина основания трапеции K, точка пересечения ее диагоналей M и точка пересечения продолжений боковых сторон S лежат на одной прямой. Тогда

$$SX \cdot SA = SL \cdot SM = SY \cdot SD.$$

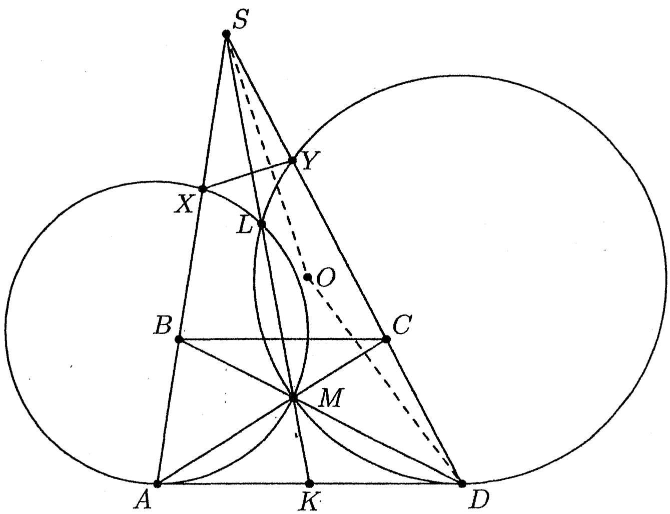
Поэтому $SX : SY = SD : SA$, откуда следует подобие треугольников SXY и SDA. Следовательно, $\angle SYX = \angle SAD$. Угол SOD — центральный угол, опирающийся на дугу SD окружности, описанной около треугольника SAD, а угол SAD — вписанный угол этой же окружности, так же опирающийся на дугу SD. Поэтому $\angle SAD = 0.5\angle SOD$. Следовательно,

$$\angle SYX + \angle YSO = \angle SAD + \angle YSO = 0.5\angle SOD + \angle YSO =$$

$$= 0.5(180^\circ - \angle OSD - \angle ODS) + \angle YSO = [\angle OSD = \angle ODS] =$$

$$= 0.5(180^\circ - 2\angle ODS) + \angle YSO = 90^\circ + (\angle YSO - \angle ODS) = 90^\circ.$$

Полученное равенство и означает, что $SO \perp XY$.



11.2. Ответ: $n = 2$.

Заметим, что если числа $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют равенству

$$a_1 + \ldots + a_n = r\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right), \qquad (*)$$

то числа $b_1 = \dfrac{r}{a_1}$, …, $b_n = \dfrac{r}{a_n}$, удовлетворяют такому же, как и $(*)$, равенству

$$b_1 + \ldots + b_n = r\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right).$$

Поэтому согласно условию задачи имеет место также и равенство

$$\frac{1}{\sqrt{r} - b_1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{r} - b_n} = \frac{1}{\sqrt{r}},$$

т. е. равенство $\dfrac{1}{\sqrt{r} - \dfrac{r}{a_1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{r} - \dfrac{r}{a_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$, которое очевидно равносильно равенству

$$\frac{a_1}{\sqrt{r} - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{r} - a_n} = -1. \tag{1}$$

По условию задачи справедливо также равенство

$$\frac{1}{\sqrt{r} - a_1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{r} - a_n} = \frac{1}{\sqrt{r}}. \tag{2}$$

Умножим равенство (2) на $\sqrt{r}$ и почленно вычтем из полученного равенства равенство (1), получим:

$$\frac{\sqrt{r} - a_1}{\sqrt{r} - a_1} + \ldots + \frac{\sqrt{r} - a_n}{\sqrt{r} - a_n} = 1 - (-1) = 2.$$

Так как левая часть этого равенства равна n, то $n = 2$.

Проверим, что, действительно, при $n = 2$ условие задачи выполнено. Имеем

$$a_1 + a_2 = r\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \iff (a_1 + a_2)\left(1 - \frac{r}{a_1 a_2}\right) = 0.$$

Так как по условию a_1 и a_2 положительны, то последнее равенство равносильно тому, что $a_1 a_2 = r$. Но тогда

$$\frac{1}{\sqrt{r} - a_1} + \frac{1}{\sqrt{r} - a_2} = \frac{2\sqrt{r} - (a_1 + a_2)}{r - \sqrt{r}(a_1 + a_2) + a_1 a_2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{r} - (a_1 + a_2)}{2r - \sqrt{r}(a_1 + a_2)} = \frac{1}{\sqrt{r}},$$

т. е. условие задачи, если $n = 2$, выполнено.

11.3. Ответ: да, Миша может обеспечить себе победу.

Разобьем числа от 2 до 9 на пары: (2, 7), (3, 8), (5, 6), (4, 9). Покажем, что Миша выиграет, если после выбора Колей числа n выберет число m из той же пары, в которой окажется число n.

Пусть n, $m = 2, 7$, т. е., за один ход можно взять из кучи 1, 2 или 7 камешков. Рассматривая игру "с конца"легко определить выигрышные (будем отмечать их знаком "+") и проигрышные количества (будем отмечать их знаком " – "). При этом будем иметь в виду, что если игрок может сделать ход на число, помеченное знаком " – то он выиграет, а если любой его ход будет приходиться на число, помеченное знаком " + то он проиграет. Получим:

+1	+2	-3	+4	+5	-6	+7	+8	-9

+10	+11	-12	+13	+14	-15	+16

Видим, что количества, кратные 3, являются проигрышными, а остальные количества – выигрышные. Легко показать по индукции, что так будет и для всех чисел, больших 12. Действительно, если количество камешков в куче не кратно 3 и равно $3k + 1$ ($3k + 2$), то ходом в 1 камешек (2 камешка) получим $3k$ камешков. Если же число камешков в куче кратно 3 (равно $3k$), то любой ход в 1, 2, или 7 камешков приведет к числу камешков, не кратному 3. Таким образом, поскольку исходное число камешков в куче (330) делится на 3, т. е., является проигрышным, то тот, кто делает первый ход, т. е., Коля, проиграет.

Пусть n, $m = 3, 8$, т. е., за один ход можно взять из кучи 1, 3 или 8 камешков. Снова рассмотрим игру с конца и составим соответствующую таблицу.

+1	-2	+3	-4	+5	-6	+7	+8	+9	+10	-11
1	-	1	-	1	-	1	8	3	8	-

+12	-13	+14	-15	+16	-17	+18	+19	+20	+21	-22
1	-	1	-	1	-	1	8	3	8	-

Здесь, во второй строчке указаны выигрышные ходы. Заметим, что выигрышные и проигрышные количества повторяются с периодом 11. Легко показать по индукции, что это верно и для чисел, больших 22. В частности, числа, кратные 11, являются проигрышными. Значит, поскольку исходное число камешков (330) делится на 11, игрок, делающий первый ход, т. е., Коля, проиграет.

Пусть n, $m = 5$, 6, т. е., за один ход можно взять из кучи 1, 5 или 6 камешков. Снова рассмотрим игру с конца и составим соответствующую таблицу.

+1	-2	+3	-4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	-11
1	-	1	-	5	6	5	6	5	6	-

+12	-13	+14	-15	+16	+17	+18	+19	+20	+21	-22
1	-	1	-	5	6	5	6	5	6	-

Заметим, что и в этом случае выигрышные и проигрышные количества повторяются с периодом 11. Легко показать по индукции, что это верно и для чисел, больших 22. В частности, числа, кратные 11, являются проигрышными. Значит, снова игрок, делающий первый ход, т. е., Коля, проиграет.

Наконец, пусть n, $m = 4$, 9, т. е., за один ход можно взять из кучи 1, 4 или 9 камешков. Снова рассмотрим игру с конца и составим соответствующую таблицу.

+1	-2	+3	+4	-5	+6	-7	+8	+9	-10
1	-	1	4	-	1	-	1	9	-

+11	-12	+13	+14	-15	+16	-17	+18	+19	-20
1	-	1	4	-	1	-	1	9	-

На этот раз выигрышные и проигрышные количества повторяются с периодом 10. Легко показать по индукции, что это верно и для чисел, больших 20. В частности, числа, кратные 10, являются проигрышными. Значит, и в этом случае игрок, делающий первый ход, т. е., Коля, проиграет.

11.4. Пусть $\overset{n}{\cancel{m}}, \overset{k}{\cancel{n}}, \overset{m}{\cancel{k}}$ – количество красных, зеленых и синих точек, тогда $\underset{m+n+k}{\cancel{M = N = K}} = 15$. Из неравенства (*) решения задачи 9.2 получаем

$$39m \leqslant 51k + n, \tag{1}$$

$$51k - n \leqslant 39m. \tag{2}$$

Подставив в (1) $k = 15 - m - n$, получим после преобразований

$18m+10n \leqslant 153$

$$9m + 5n \leqslant 76. \tag{3}$$

Подставив в (2) $k = 15 - m - n$, получим

$$51 \cdot 15 \leqslant 90m + 52n.$$

Учитывая, что $n \leqslant 13$, получим

$$51 \cdot 15 \leqslant 90m + 50n + 26,$$

откуда

$739 \leqslant 90m + 50n$

$$74 \leqslant 9m + 5n. \tag{4}$$

Если $n \leqslant 7$, то на самом деле получим

$$51 \cdot 15 \leqslant 90m + 50n + 14 \text{ или } 76 \leqslant 9m + 5n.$$

Учитывая (3), получим $9m+\overset{5}{\cancel{6}}n = 76$. Однако легкой проверкой убеждаемся, что это равенство не может выполняться ни при каком $n \leqslant 7$. Последовательно подставляя значения $n = 8, 9, ...13$, находим, что неравенства (3) и (4) могут выполняться лишь для значений $n = 8$ и $n = 13$. Тогда соответственно $m = 4$, $k = 3$ и $m = k = 1$. Построение примеров для указанных значений проводится аналогично построению примера задачи 10.2.