Министерство образования Республики Беларусь

« LIX »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

БЕЛАРУСКАЯ МАТЭМАТЫЧНАЯ АЛІМПІЯДА ШКОЛЬНІКАЎ

- LIX -

МІНСК - 2009

Минск 2009

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 59-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Базылев Д.Ф. (11.6)
Барабанов Е.А. (11.8)
Близнец И.А. (8.7)
Воронович И.И. (8.5, 9.6, 11.5)
Каскевич В.И. (8.8, 9.7)
Максимов Р.Д. (9.8)
Миротин А.Р. (8.6, 11.8)
Пирштук Д.И. (9.5)
Соболевский С.Л. (11.7)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) длина диагонали BD равна длине средней линии трапеции и $\angle CAD = 30°$.

Найдите величину угла между диагоналями AC и BD.

8.6. Клетки квадратной таблицы 4×4 окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета по следующим правилам. В красный цвет можно окрашивать любую клетку; в синий — только те клетки, у которых имеется красная соседняя клетка; наконец, в зелёный цвет можно окрашивать только те клетки, которые имеют синюю соседнюю клетку (соседними клетками называются клетки, имеющие общую сторону). При этом разрешается перекрашивать уже окрашенные клетки.

Какое наибольшее число зелёных клеток можно при этом получить ?

8.7. На доске выписаны пятнадцать квадратных трёхчленов $x^2 - p_i x + q_i$, $\quad i = 1, 2, ..., 15$, все коэффициенты которых попарно различны и принимают значения из множества $\{1, 2, ..., 30\}$. Корень квадратного трёхчлена назовем *хорошим*, если он больше 20.

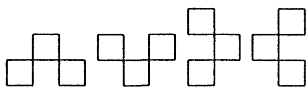
Какое наибольшее число хороших корней могут иметь все трёхчлены вместе?

8.8. Пешеход, бегун и мотоциклист одновременно направляются из пункта A в пункт B . Мотоциклист может подвезти одного из путешественников (пешехода или бегуна) от пункта A до некоторого пункта на дороге между A и B и, высадив его, вернуться, чтобы подобрать и довести другого пассажира до пункта B . Скорости пешехода, бегуна и мотоциклиста (с пассажиром и без) постоянны, причем скорость мотоциклиста больше скорости бегуна, а скорость бегуна больше скорости пешехода.

Определите, кого мотоциклист должен подвозить первым (пешехода или бегуна), чтобы все названные путешественники прибыли одновременно в пункт B за наименьшее время. Ответ обоснуйте.

9 – 9' классы

9.5. Найдите все пары натуральных чисел m и n, такие, что клетчатый прямоугольник размера $m \times n$ можно разбить на трехклетчатые фигурки вида

.

9.6. Точка T — точка пересечения диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABT совпадает с центром описанной окружности треугольника CDT.

Докажите, что

а) вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность;

б) центр описанной окружности треугольника CDT лежит на окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$.

9.7. Пешеход, бегун и мотоциклист одновременно с постоянными скоростями направляются из пункта A и должны одновременно прибыть в пункт B. При этом мотоциклист может подвозить одного из путешественников (пешехода или бегуна) от любой точки на дороге между A и B до любой другой точки на этой дороге, затем, высадив этого пассажира, возвращаться, чтобы подвезти другого. Мотоциклист может подвозить, возвращаться и снова подвозить пешехода и бегуна в любом порядке любое количество раз.

Определите наименьшее время, необходимое названным путешественникам на всю дорогу, если известно, что мотоциклист преодолевает расстояние между A и B за 1 час 2 минуты, а скорости пешехода и бегуна соответственно в 15 раз и в 7 раз меньше скорости мотоциклиста.

9.8. На доске написаны числа 1, 2,..., 20. С ними можно проделывать следующую операцию: выбрать два числа, которые отличаются по крайней мере на 2, и меньшее из них увеличить на 1, а большее уменьшить на 1.

Найдите максимально возможное число операций, которое можно проделать с данным набором.

11 – 11' классы

11.5. Дан остроугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 60°$. На сторонах AC и BC выбраны точки B_1 и A_1 соответственно. Пусть D – вторая (отличная от C) точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников BCB_1 и ACA_1.

Докажите, что точка D лежит на стороне AB, если и только если $\dfrac{CB_1}{CB} + \dfrac{CA_1}{CA} = 1$.

11.6. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ – отличные от константы многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что многочлен $P(x)Q(x) - 2009$ имеет по крайней мере 25 различных целых корней.

Докажите, что степень каждого из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ больше 2.

11.7. Сумма некоторых двадцати попарно различных целых чисел равна 210.

а) Докажите, что сумма квадратов этих чисел не меньше 2870.

б) Найдите эти числа, если сумма их квадратов равна 2870.

11.8. Пусть P — непустое множество натуральных чисел, содержащее вместе с любыми двумя своими элементами их сумму. Индексом элемента n из множества P назовём число элементов множества P, не представимых в виде $n+x$, где $x \in P$, если таких элементов конечное число (в противном случае индекс элемента n считаем бесконечным).

а) Докажите, что индекс суммы двух элементов из P, имеющих конечные индексы, равен сумме их индексов.

б) Докажите, что индекс любого элемента из P конечен.

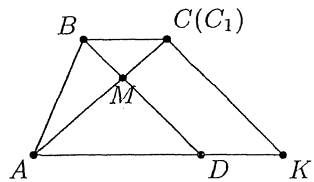
в) Докажите, что индекс элемента $n \in P$ не превосходит n.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: 90°.

Через вершину C трапеции $ABCD$ проведем параллельную диагонали BD прямую. Пусть K точка пересечения этой прямой с прямой AD (см. рис.). Очевидно, что $BCKD$ – параллелограмм, и поэтому $CK = BD$, $DK = BC$. Из условия следует, что



$$CK = BD = 0,5(AD + BC) = 0,5(AD + DK) = 0,5AD.$$

В треугольнике ACK проведем высоту KC_1. Тогда в прямоугольном треугольнике AC_1K катет KC_1, лежащий против угла C_1AK в 30°, равен половине гипотенузы AK. Следовательно, $KC = KC_1$, и значит точки C и C_1 совпадают, т.е. $\angle ACK = 90^\circ$. Пусть M – точка пересечения диагоналей трапеции. Углы AMD и ACK равны как односторонние углы при параллельных прямых CK, BD и секущей AC. Таким образом, $\angle AMD = 90^\circ$.

8.6. Ответ: 15.

Ясно, что 16 зелёных клеток получить нельзя, так как в противном случае последняя зелёная клетка была окрашена в зелёный, а потому имела синюю соседку – противоречие.

Покажем, что 15 зелёных клеток можно получить, например, так, как показано на следующих рисунках, на которых буквами К, С и З обозначены клетки, покрашенные соответственно в красный, синий и зелёный цвет.

С			
К			

→

З			
С			
З			

→

З	З		
З	С		
З	З		

→

З	С		
З	З		
З	С		
З	З		

→

$\to$

З	З	С	
З	З	З	
З	З	С	
З	З	З	

$\to$

З	З	З	С
З	З	З	
З	З	С	
З	З	З	

$\to$

З	З	З	З
З	З	З	С
З	З	С	
З	З	З	

$\to$

З	З	З	З
З	З	З	З
З	З	З	С
З	З	З	З

8.7. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$. Пусть x_1, x_2 — его действительные корни. Заметим, что такое уравнение при $1 \leqslant p \leqslant 30$ не может иметь два корня, которые оба будут больше 20, ибо в противном случае их сумма, по теореме Виета, равная p, будет больше 40, что противоречит условию. Пусть $x_1 \leqslant x_2$. Тогда

$$x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < \frac{p + \sqrt{p^2}}{2} = \frac{p + p}{2} = p.$$

Следовательно, для того чтобы уравнение имело корень, больший 20, необходимо, чтобы $p > 20$. Среди чисел множества $\{1, 2, ..., 30\}$ всего 10 таких чисел. Поэтому не более 10 выписанных на доске квадратных трёхчленов могут иметь корень больший 20.

Покажем, что таких трёхчленов действительно может быть 10. Рассмотрим 10 трёхчленов с коэффициентам $p_k = 20 + k$ и $q_k = k$, $k = 1, 2, ..., 10$. (Остальные пять трёхчленов могут быть произвольными с попарно различными коэффициентами из множества $\{11, 12, ..., 20\}$.) Дискриминант D_k каждого из трёхчленов $x^2 - p_k x + q_k$ имеет вид

$$D_k = p_k^2 - 4q_k = (20+k)^2 - 4k = 400 + 40k + k^2 - 4k > 400 - 40k + k^2 = \\ = (20 - k)^2.$$

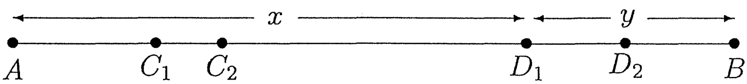
Следовательно, все эти 10 уравнений имеют действительные корни, причем, больший корень x_k^{max} каждого из них удовлетворяет неравенству

$$x_k^{max} = \frac{p_k + \sqrt{D_k}}{2} = \frac{(20 + k) + \sqrt{D_k}}{2} > \frac{(20 + k) + (20 - k)}{2} = 20.$$

Как было показано выше, ни один из этих квадра́тных трёхчленов не может иметь два корня, больших 20. Таким образом, наибольшее значение общего числа S корней выписанных на доске трёхчленов равно 10.

8.8. Ответ: время на дорогу в обоих случаях одинаковое.

Пусть скорость мотоциклиста равна V, скорость пешехода — v_1, а бегуна — v_2. Предположим, что сначала от пункта A мотоциклист вез пешехода и, высадив его в пункте D_1 (в этот момент бегун, самостоятельно двигавшийся от пункта A, находился в точке C_1), вернувшись подобрал бегуна в точке C_2 (пешеход в это время находился в точке D_2). Пусть $AB = S$, $AD_1 = x$, $D_1B = y$ (таким образом, $x + y = S$).



Время мотоциклиста (с пешеходом) на дорогу от A до D_1 равно $t_1 = \dfrac{x}{V}$. Тогда $AC_1 = t_1 \cdot v_2 = \dfrac{x \cdot v_2}{V}$. Время с момента, когда бегун находился в точке C_1, а мотоциклист — в точке D_1, до их встречи в точке C_2 равно $t_2 = \dfrac{AD_1 - AC_1}{V + v_2} = \dfrac{x - \dfrac{x \cdot v_2}{V}}{V + v_2} = \dfrac{x(V - v_2)}{V(V + v_2)}$. Тогда

$$t_1 + t_2 = \frac{x(V + v_2) - x(V - v_2)}{V(V + v_2)} = \frac{2x}{V + v_2}.$$

Поэтому $AC_2 = (t_1 + t_2) \cdot v_2 = \dfrac{2xv_2}{V + v_2}$. Тогда

$$D_1C_2 + C_2D_1 + D_1B = 2(x - AC_2) + y = \frac{2x(V + v_2) - 4xv_2}{V + v_2} + y =$$

$$= \frac{2x(V - v_2)}{V + v_2} + y.$$

Поэтому время мотоциклиста на дорогу $D_1 \to C_2 \to D_1 \to qB$ равно $t_3 = \dfrac{2x(V-v_2)}{V(V+v_2)} + \dfrac{y}{V}$. С другой стороны, так как по условию мотоциклист прибыл в пункт B одновременно с пешеходом, это время $t_3 = \dfrac{y}{v_1}$. Получаем уравнение $\dfrac{2x(V-v_2)}{V(V+v_2)} + \dfrac{y}{V} = \dfrac{y}{v_1}$, откуда $\dfrac{2x(V-v_2)}{V(V+v_2)} = y\left(\dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{V}\right)$ и, значит, $y = \dfrac{2xv_1(V-v_2)}{(V+v_2)(V-v_1)}$. Поэтому $t_3 = \dfrac{y}{v_1} = \dfrac{2x(V-v_2)}{(V+v_2)(V-v_1)}$. В результате, общее время на всю дорогу

$$T = t_1 + t_3 = \frac{x}{V} + \frac{2x(V-v_2)}{(V+v_2)(V-v_1)} = \frac{x(3V^2 - Vv_1 - Vv_2 - v_1v_2)}{V(V+v_2)(V-v_1)}.$$

Далее, $x = S - y = S - \dfrac{2xv_1(V-v_2)}{(V+v_2)(V-v_1)}$, откуда

$$x = S : \left(1 + \frac{2v_1(V-v_2)}{(V+v_2)(V-v_1)}\right) = \frac{S(V+v_2)(V-v_1)}{V^2 + Vv_1 + Vv_2 - 3v_1v_2}.$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{S(3V^2 - Vv_1 - Vv_2 - v_1v_2)}{V(V^2 + Vv_1 + Vv_2 - 3v_1v_2)}.$$

Видим, что полученное выражение не меняется при замене $v_1 \leftrightarrow v_2$. Это значит, что если бы мотоциклист сначала подвозил не пешехода, а бегуна, то время на всю дорогу было бы такое же.

9 – 9' классы

9.5. Ответ: $\{(m,n) = (3k,2l),(2l,3k),(6k\pm 1,6l),(6l,6k\pm 1)$: $k,l\in\mathbb{N}\}$ или, что то же самое, $\{(m,n)\mid mn\,\vdots\,6,\ m,n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\}$.

Пусть клетчатый прямоугольник размера $m\times n$ можно было разбить требуемым образом. Так как каждая фигурка состоит из трех клеток, то mn делится на 3.

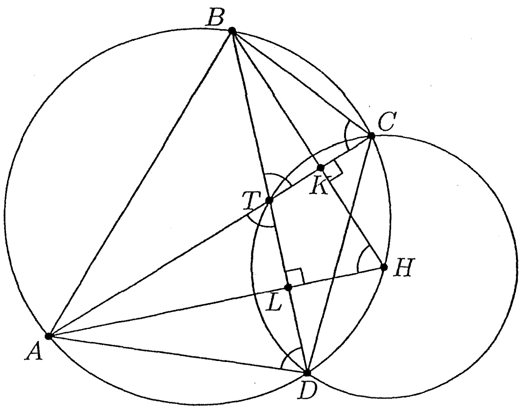
Далее, раскрасим клетки прямоугольника в черный и белый цвет в шахматном порядке. Если mn делится на 2, то черных и белых клеток поровну, а если mn не делится на 2, то количества черных и белых клеток отличаются на 1. С другой стороны, так как каждая фигурка покрывает 3 одноцветных клетки, то разность между количеством черных и белых клеток должно делиться на 3. Поэтому произведение mn должно делится на 2.

Итак, mn должно делится на 6. Докажем, что это условие является также и достаточным (за исключением прямоугольников размера 1×6, 6×1, которые не удовлетворяют условию).

Прямоугольники размера $3k\times 2l$ и $2l\times 2k$ очевидным образом разбиваются на прямоугольники размера 3×2 (или 3×2), каждый из которых разбивается на 2 фигурки требуемого вида, т.е. удовлетворяют условию.

Остается показать, что условию удовлетворяют прямоугольники вида $(6k-1)\times 6l$ и $(6k+1)\times 6l$, где $k,l\in\mathbb{N}$ (прямоугольники $6l\times(6k-1)$ и $6l\times(6k+1)$ получаются поворотом на 90°). Так как $6k-1=3+2(3k-2)$ и $6k+1=3+2(3k-1)$, то эти прямоугольники можно разбить на прямоугольник $3\times 6l$ и прямоугольник размера $2(3k-2)\times 6l$ (или $2(3k-1)\times 6l$), каждый из которых, как было показано в предыдущем случае, разбивается на фигурки требуемого вида.

9.6. а) Пусть H ортоцентр треугольника ABT. Пусть K – точка пересечения отрезков HB и TC. Тогда из условия следует, что BK высота треугольника ABT, и, следовательно, $HK\perp TC$. Поскольку H является в то же время и центром описанной окружности треугольника CDT, то прямая HB перпендикулярная хорде CT делит эту хорду пополам. Поэтому высота BK треугольника TBC



делит эту хорду пополам. Поэтому высота BK треугольника TBC является и медианой, т.е. треугольник TBC равнобедренный. Откуда $\angle BCT = \angle BTC$. Аналогично, $\angle ATD = \angle ADT$. Кроме того, $\angle ATD = \angle BTC$ (как вертикальные углы). Поэтому выполнens следующие равенства углов

$$\angle ADB = \angle ADT = \angle BTC = \angle BCT = \angle BCA.$$

Так как углы ADB и BCA опираются на один и тот же отрезок AB, причем их вершины D и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через этот отрезок, то все четыре точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

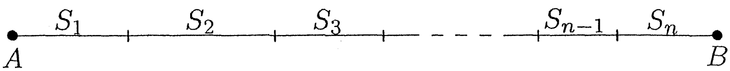
б) Пусть L – точка пересечения отрезков HA и TD. Тогда из условия следует, что AL высота треугольника ABT, и, следовательно, $HL \perp TD$. Ранее было доказано, что $HK \perp TC$, поэтому вокруг четырехугольника $LTKH$ можно описать окружность. Отсюда получаем, что

$$\angle AHB = \angle LHK = 180° - \angle LTK = \angle BTC = \angle BCT = \angle BCA.$$

Поскольку AHB и BCA опираются на один и тот же отрезок AB, причем их вершины H и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через этот отрезок, то все четыре точки A, B, C, Y лежат на одной окружности, которая и является описанной окружностью четырехугольника $ABCD$.

9.7. Ответ : 2 часа 26 минут.

Предположим, что мотоциклист n раз высадив одного пассажира возвращался, чтобы подобрать другого. Тогда дорогу от A до B (пусть $AB = S$) можно разбить на n частей точками, в которых одновременно находились все три путешественника. Пусть длина k -й такой части равна S_k , $k = 1, 2, ..., n$. Тогда $S_1 + S_2 + ... + S_n = S$.



Согласно результатам задачи 8.8 время затраченное на преодоление всеми тремя путешественниками k -го участка дороги не зависит от того, кого на этом участке мотоциклист подвозил первым, а кого вторым, и это время равно $T_k = \dfrac{S_k(3V^2 - Vv_1 - Vv_2 - v_1v_2)}{V(V^2 + Vv_1 + Vv_2 - 3v_1v_2)}$, где V , v_1 и v_2 – скорости соответственно мотоциклиста, пешехода и бегуна. Тогда время на всю дорогу от A до B равно

$$T = T_1+T_2+...+T_n = \frac{(S_1 + S_2 + ... + S_n)(3V^2 - Vv_1 - Vv_2 - v_1v_2)}{V(V^2 + Vv_1 + Vv_2 - 3v_1v_2)} =$$

$$= \frac{S(3V^2 - Vv_1 - Vv_2 - v_1v_2)}{V(V^2 + Vv_1 + Vv_2 - 3v_1v_2)}.$$

Так как согласно условию $\dfrac{S}{V} = 62$ мин, $\dfrac{V}{v_1} = 15$ и $\dfrac{V}{v_2} = 7$, то окончательно находим

$$T = 62 \cdot \frac{3 \cdot 15 \cdot 7 - 15 - 7 - 1}{15 \cdot 7 + 15 + 7 - 3} = 62 \cdot \frac{298}{124} = 149 \text{ мин} = 2 \text{ ч } 29 \text{ мин}.$$

9.8. Ответ : 330 операций.

Заметим, что сумма чисел не будет изменяться. Посмотрим, что будет происходить с суммой их квадратов. Пусть операция проделывается с числами m и n ($m - n \geqslant 2$). Имеем

$$(m-1)^2 + (n+1)^2 = n^2 + m^2 + 2 - 2(m-n) \leqslant n^2 + m^2 - 2,$$

причём равенство достигается только если $m - n = 2$. Операцию невозможно проделать только в том случае, когда любые 2 числа на доске отличаются не более чем на 1. (Т.е. тогда, когда на ней 10 чисел 10 и 10 чисел 11.) Следовательно что бы мы не делали, всё закончится именно на этом наборе.

В начальном наборе чисел сумма квадратов равна

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 20^2 = \frac{21 \cdot 20 \cdot 41}{6} = 2870.$$

В конечном наборе сумма квадратов равна $10 \cdot 10^2 + 10 \cdot 11^2 = 2210$. Поэтому поскольку каждый раз сумма квадратов уменьшается по крайней мере на 2, число операций не превзойдёт $\frac{2870-2210}{2} = 330$. Покажем, что это число достигается. Для этого достаточно показать, что можно постоянно делать операции с числами, отличающимися на 2, пока не получим конечный набор. Назовём такую операцию объединением.

Назовём набор, записанный на доске, компактным, если каждое число, меньшее максимального из написанных и большее минимального из написанных, написано по крайней мере 1 раз. Заметим, что исходный набор является компактным. Пусть в каком-то компактном наборе минимальное число a, а максимальное b. Причём $b - a \geqslant 2$. Тогда с набором можно проделать следующую последовательность объединений: a и $a+2$, $a+1$ и $a+3$,..., $b-2$ и b. В результате этих действий получим набор, который отличается от исходного тем, что в нём на единицу уменьшилось число элементов a и b и на единицу увеличилось число элементов $a+1$ и $b-1$. Поэтому набор останется компактным. Следовательно, с исходным набором можно проводить такую последовательность объединений до тех пор, пока не придём к конечному набору. Таким образом, число 330 достижимо.

11 – 11' классы

11.5. Пусть S_1 и S_2 — окружности, описанные около треугольников ACA_1 и BCB_1 соответственно. Пусть точка D, отличная от C, точка пересечения окружностей S_1 и S_2, лежит на стороне AB (см. рис. 1). По теореме о секущих соответственно для окружностей S_1 и S_2 имеем $AB \cdot BD = BC \cdot BA_1$, $AB \cdot AD = AC \cdot AB_1$. Сложим полученные равенства:

$$AB \cdot BD + AB \cdot AD = BC \cdot BA_1 + AC \cdot AB_1 = BC(BC - CA_1)+$$

$$+AC(AC - CB_1) = BC^2 + AC^2 - (BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1).$$

Так как $AB^2 = AB(AD+BD) = AB{\cdot}AD+AB{\cdot}BD$, то $AB^2 = BC^2+AC^2 - (BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1)$. По теореме косинусов в треугольнике ABC имеем

$$AB^2 = BC^2+AC^2-2BC{\cdot}AC\cos\angle C = BC^2+AC^2-2BC{\cdot}AC\cos 60^\circ =$$

$$= BC^2 + AC^2 - BC \cdot AC.$$

Поэтому $BC{\cdot}CA_1+AC{\cdot}CB_1 = BC{\cdot}AC$, откуда и следует требуемое равенство $\dfrac{CB_1}{CB} + \dfrac{CA_1}{CA} = 1$.

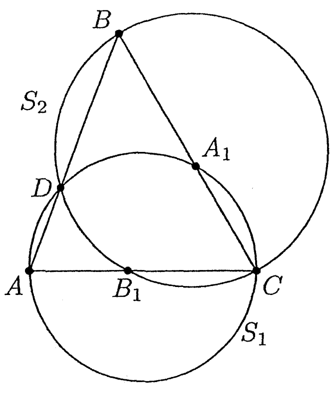


Рис. 1

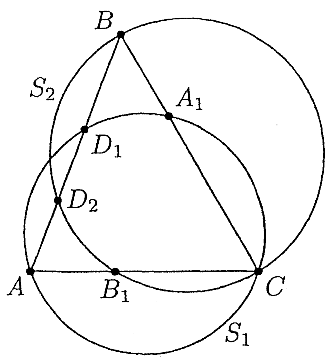


Рис. 2

Предположим, что равенство $\dfrac{CB_1}{CB} + \dfrac{CA_1}{CA} = 1$ сейчас выполнено. Пусть S_1 и S_2 — окружности, описанные около треугольников ACA_1

и BCB_1 соответственно; пусть сторона AB пересекается с окружностью S_1 в точке D_1, а с окружностью S_2 — в точке D_2 (см. рис. 2). По теореме о секущих соответственно для окружностей S_1 и S_2 имеем

$$AB \cdot BD_1 = BC \cdot BA_1, \ \ AB \cdot AD_2 = AC \cdot AB_1.$$

Сложим полученные равенства:

$$AB \cdot BD_1 + AB \cdot AD_2 = BC \cdot BA_1 + AC \cdot AB_1 = BC(BC - CA_1)+$$

$$+AC(AC - CB_1) = BC^2 + AC^2 - (BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1).$$

Из условия следует, что $BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1 = AC \cdot BC$, поэтому

$$BC^2 + AC^2 - (BC \cdot CA_1 + AC \cdot CB_1) = BC^2 + AC^2 - AC \cdot BC =$$

$$= BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cos 60^\circ.$$

Из теоремы косинусов в треугольнике ABC следует, что $BC^2+AC^2-2AC \cdot BC \cos 60^\circ = AB^2$, откуда

$$AB \cdot BD_1 + AB \cdot AD_2 = AB^2 \implies AD_2 + BD_1 = AB,$$

и, следовательно, точки D_1 и D_2 совпадают. Это и означает, что отличная от C точка пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на стороне AB.

11.6. Пусть a_1, a_2, ..., a_{25} — различные целые корни многочлена $F(x) = P(x)Q(x) - 2009$. Тогда $P(a_i)Q(a_i) = 2009$ для всех $i = 1, ..., 25$. Последнее равенство означает, что все целые числа $P(a_i)$, $i = 1, ..., 25$, являются делителями числа 2009. Поскольку $2009 = 7^2 \cdot 41$, то существует ровно $2 \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12$ различных целых делителей числа 2009 (6 положительных и 6 отрицательных). Поэтому, по принципу Дирихле, не менее трех их 25 чисел $P(a_i)$ будут равны между собой. Не нарушая общности можем считать, что $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = d$. Тогда многочлен $P(x)-d$ имеет не менее трех различных корней, а, следовательно, его степень, а вместе с тем и степень многочлена $P(x)$, не меньше 3. Аналогично показывается, что и степень многочлена $Q(x)$ также не меньше 3.

11.7. Ответ б) множество последовательных натуральных чисел от 1 до 20.

а) Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$ – числа, удовлетворяющие условию задачи. Заметим, что $1+2+3+\ldots+20 = 210$, а $1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2 = 2870$.

Положим $a_i = i + r_i$, $i = 1, 2, \ldots, 20$. Так как числа a_i целые, то $a_{i+1} - a_i \geqslant 1$. Поэтому

$$r_{i+1} = a_{i+1} - (i+1) = (a_{i+1} - 1) - i \geqslant a_i - i = r_i \ \forall i = 1, \ldots, 20.$$

Кроме того, так как $a_1 + \ldots + a_{20} = 1 + \ldots + 20$, то $r_1 + r_2 + \ldots + r_{10} = 0$. Покажем, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{20}^2 \geqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + 20^2 = 2870$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все r_i равны 0. Действительно,

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{20}^2 = (1 + r_1)^2 + (2 + r_2)^2 + \ldots + (20 + r_{20})^2 =$$

$$= (1^2+2^2+\ldots+20^2)+2(1r_1+2r_2+\ldots+20r_{20})+(r_1^2+r_2^2+\ldots+r_{20}^2). \quad (1)$$

Известно, что так как $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_{20}$, то

$$S_1 = 1r_1 + 2r_2 + \ldots + 20r_{20} \geqslant 20r_1 + 9r_2 + \ldots + 1r_{20} = S_2.$$

Действительно, при всех $i = 1, \ldots, 10$, имеем $r_{20-i+1} \geqslant r_i$, откуда

$$i \cdot r_i + (20 - i + 1)r_{20-i+1} - ((20 - i + 1)r_i + i \cdot r_{20-i+1}) =$$

$$= (20 - 2i + 1)(r_{20-i+1} - r_i) \geqslant 0,$$

что и влечет неравенство $S_1 \geqslant S_2$.

С другой стороны, $S_1 + S_2 = 21(r_1 + \ldots + r_{20}) = 0$, поэтому $S_1 \geqslant 0$. Очевидно, что $(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{20}^2) \geqslant 0$ причем равенство достигается лишь при $r_1 = \ldots = r_{20} = 0$. Следовательно, из (1) следует, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{20}^2 \geqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + 20^2 = 2870.$$

б) Как было отмечено выше, равенство в (1) достигается, лишь при $r_1 = ... = r_{20} = 0$. Следовательно, $a_1, a_2, ..., a_{10}$ совпадают с последовательными натуральными числами $1, 2, ..., 20$.

11.8. а) *Первое решение.* Пусть числа n и m из P имеют конечные индексы, равные q и r соответственно. Пусть согласно определению индекса $a_1, \ldots, a_q$ — все числа из P, не представимые в виде $n+x$, где $x \in P$, а $b_1, \ldots, b_r$ — все числа из P, не представимые в виде $m+x$, где $x \in P$. Докажем, что все числа из P, не представимые в виде $m+n+x$, где $x \in P$, исчерпываются числами

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_q \quad \text{и} \quad n+b_1,\ n+b_2,\ \ldots,\ n+b_r. \qquad (*)$$

Легко видеть, что числа $(*)$ принадлежат P, они попарно различны и их ровно $q+r$.

Никакое число из ряда $(*)$ нельзя представить в виде $n+m+x$, где $x \in P$. В самом деле, если $a_i = n+m+x$ для некоторого $x \in P$, то, записав это равенство в виде $a_i = n+(m+x)$, получаем противоречие с определением a_i, поскольку $m+x \in P$. Если же $n+b_k = n+m+x$ для некоторого $x \in P$, то $b_k = m+x$ — противоречие.

Остаётся доказать, что если $c \in P$ и не является числом из ряда $(*)$, то его можно представить в виде $c = n+m+x$, где $x \in P$. Действительно, так как c не равно никакому a_i, $i = 1, \ldots, q$, то $c = n+s$ для некоторого $s \in P$. Но также $c \neq n+b_j$, $j = 1, \ldots, r$, т. е. $n+s \neq n+b_j$, $j = 1, \ldots, r$. Значит, $s \neq b_j$, $j = 1, \ldots, r$, а поэтому $s = m+x$ для некоторого $x \in P$. Итак, $c = n+m+x$, где $x \in P$.

Приведём ещё одно решение этой задачи на языке множеств.

Второе решение. Для множеств A и B через $A \setminus B$ обозначим множество тех элементов из A, которые не принадлежат B. Кроме того, для множества $X \subset P$ и числа n через $n+X$ будем обозначать множество всех чисел, имеющих вид $n+x$, где $x \in X$. Тогда индекс элемента n есть число элементов множества $P \setminus (n+P)$.

Легко видеть, что из включений $C \subset B \subset P$ следует равенство

$$P \setminus C = (P \setminus B) \bigcup (B \setminus C).$$

Для любых m, n из P обозначим обозначим $C = m + n + P$ и $B = m + P$. Тогда $C \subset B \subset P$, а значит, $P \setminus (m + n + P) = (P \setminus (m + P)) \bigcup (m + (P \setminus (n + P)))$. А так как в правой части стоит объединение непересекающихся конечных множеств, то сумма количеств элементов этих множеств есть число элементов левой части. Осталось заметить, что множества A и $m + A$ имеют одинаковое число элементов, если A конечно ($A \subset \mathbb{N}$).

б) Пусть $n \in A$. Через $N(n)$ обозначим множество всех тех элементов из P, которые не представимы в виде $n + x$, $x \in A$. Множеству $N(n)$ заведомо принадлежат все $m \in P$, которые не превосходят n, — таких элементов в P не более n штук.

Далее, для каждого $r \in \{1, \ldots, n - 1\}$ определим множество $M(n; r)$, состоящее из всех тех $m \in P$, которые больше n и при делении на n дают остаток r. Пусть r_1, ..., r_k — все те значения из $\{1, \ldots, n - 1\}$, для которых множества $M(n; r_s)$, $s = 1, \ldots, k$, непусты. Пусть n_s — наименьший элемент в $M(n; r_s)$, $s = 1, \ldots, k$. Элементы n_1, ... , n_k попарно различны и их ровно $k \leqslant n - 1$ штук. Покажем, что любое число $y \in P$, большее n и отличное от $n_1, \ldots, n_k$ не принадлежит множеству $N(n)$, т. е. представимо в виде $n + x$, где $x \in P$. Пусть $y \in M(n; r_s)$ для некоторого $s \in \{1, \ldots, k\}$. Разделим y на n с остатком: $y = nk + r_s$. Пусть $n_s = nk_s + r_s$. Так как $k > k_s$ (поскольку n_s — наименьшее число множества $M(n; r_s)$), то

$$y = nk + r_s = (nk_s + r_s) + \underbrace{n + \ldots + n}_{k - k_s \text{ штук}} = n_s + \underbrace{n + \ldots + n}_{k - k_s \text{ штук}} = n_s + x,$$

где $x \in P$.

Стало быть индекс элемента n не превосходит $n + (n - 1) = 2n - 1$.

в) Для доказательства того, что индекс элемента $n \in P$ не превосходит n достаточно заметить (см. п. б) решения), что элементы $r \in \{1, \ldots, n - 1\}$ и $nk + r$ не могут одновременно принадлежать множеству $N(n)$.