Министерство образования Республики Беларусь

« LIX »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Минск 2009

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 59-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Барабанов Е.А. (8.3, 9.4)
Воронович И.И. (8.1, 8.3, 9.1, 9.4, 11.1)
Карамзин В.П. (8.2)
Константиновский Я.С. (11.2)
Лосев И.В. (11.4)
Мазаник С.А. (8.3, 9.2, 9.3, 9.4, 11.3)
Миротин А.Р. (8.4)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. На координатной плоскости Oxy проведены две прямые, параллельные оси абсцисс. Расстояние между этими прямыми равно 1. Точка A — одна из точек пересечения параболы $y = x^2$ с той из проведенных прямых, которая расположена ближе к оси абсцисс, B — точка пересечения второй прямой с осью ординат, O — начало координат. Найдите величину угла OAB.

8.2. Для данного простого числа $p > 3$ и натуральных чисел k и n через $S_p(k, n)$ обозначим сумму всех несократимых дробей вида $\frac{m}{p}$, таких, что $k < \frac{m}{p} < n$.

Найдите все p, k и n, для которых $S_p(k, n) = 2009$.

8.3. Два игрока A и B играют в следующую игру: они по очереди заменяют одну из звездочек в выражении $*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*$, содержащим девять звездочек, цифрами от 1 до 9 (каждая цифра используется ровно один раз). Игрок A выигрывает, если получившееся девятизначное число делится на 11, в противном случае выигрывает игрок B. Кто из игроков выиграет при правильной игре обоих, если

а) начинает игру игрок A; б) начинает игру игрок B?

8.4. Два пирата делят добычу, состоящую из кучи бриллиантов, общий вес которых S каратов, а наибольший из бриллиантов весит M каратов. Пираты разбивают кучу на две меньшие кучки и затем жребием определяют, кому какая из них достанется. Пусть S_1 и S_2 — веса кучек и $S_1 \leqslant S_2$.

Докажите, что

а) $S_1 \leqslant S - M$;

б) пираты могут разбить кучу так, чтобы $S_1 \geqslant \frac{S - M}{2}$.

9 – 9' классы

9.1. На параболе $y = x^2$ отмечены точки A, B, C (A – левее всех) так, что биссектриса угла ABC параллельна оси ординат. Известно, что проекция отрезка AC на ось абсцисс равна 4.

Найдите абсциссу середины отрезка BC.

9.2. Найдите все пары таких натуральных чисел m и n, что

$$(m+1)! + (n+1)! = m^2n^2.$$

(Для любого натурального числа k по определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.)

9.3. На сторонах AB, AC, BC треугольника ABC отмечены соответственно точки X, X_1, X_2 так, что $XX_1 \perp AC$, $X_1X_2 \perp BC$, $X_2X \perp AB$. Пусть Y, Y_1, Y_2 – точки соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC, такие, что $YY_1 \perp AC$, $Y_1Y_2 \perp AB$.

Докажите, что $Y_2Y \perp BC$, если XY и AC параллельны.

9.4. Два игрока A и B играют в следующую игру: они по очереди заменяют одну из звездочек в выражении $* * * * * * * * **$, содержащем десять звездочек, цифрами от 0 до 9 (каждая цифра используется ровно один раз). Ни одному из игроков нельзя ставить 0 вместо первой слева звездочки. Игрок A выигрывает, если получившееся десятизначное число делится на 11, в противном случае выигрывает игрок B. Кто из игроков выиграет при правильной игре обоих, если

а) начинает игру игрок A;

б) начинает игру игрок B?

11 – 11' классы

11.1. На координатной плоскости Oxy задана парабола $y = x^2$. Пусть AB – фиксированная хорда параболы, параллельная оси Ox. (Хордой параболы называется отрезок, соединяющий две её точки.) Для всякой точки C параболы, отличной от точек A и B, рассматривается точка C_1, лежащая на описанной окружности треугольника ABC, такая, что прямая CC_1 параллельна оси Oy.

Найдите геометрическое место точек C_1, когда точка C пробегает параболу $y = x^2$ за исключением точек A и B.

11.2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $\angle BCD = 72°$, $AD = BD = CD$. Точка K отмечена на диагонали BD так, что $AK = AD$. Точка M – середина стороны CD, а N – точка пересечения отрезков AM и BD.

Докажите, что $BK = ND$.

11.3. Найдите все пары натуральных чисел m и n, таких, что $m! + n! = m^n$. (Для любого натурального числа k по определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.)

11.4. Двое играют в игру. На каждом ходу игрок выписывает пару целых неотрицательных чисел (a, b), удовлетворяющую тому условию, что для каждой уже выписанной ранее пары (c, d) либо $a < c$ либо $b < d$. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто выписывает пару $(0, 0)$.

а) Докажите, что игра закончится за конечное число ходов независимо от того, как ходят игроки.

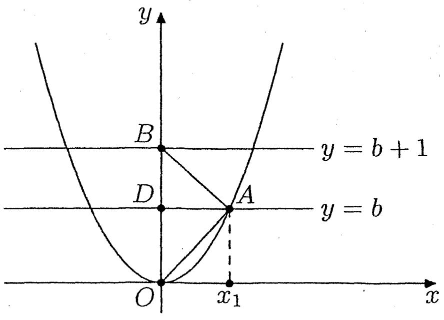
б) Кто из игроков – первый (начинающий) или второй – выигрывает при правильной игре?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ: 90°.

Первое решение. Пусть x_1 — абсцисса точки A Тогда ордината точки A равна $x_1^2 = b$. Поэтому по теореме Пифагора для треугольника OAx_1 получаем $OA^2 = x_1^2 + (x_1^2)^2 = b + b^2$. Так как по условию $BD = 1$, то по теореме Пифагора для треугольника ABD имеем $AB^2 = AD^2 + BD^2 = x_1^2 + 1 = b + 1$. Поскольку $OB = b + 1$, то



$$OB^2 = (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 = (b^2 + b) + (b + 1) = OA^2 + AB^2.$$

Следовательно, треугольник OAB прямоугольный и $\angle OAB = 90^\circ$.

Второе решение. Заметим, что отношение $Ax_1 : Ox_1 = x_1^2 : x_1 = x_1$. Кроме того, $DA : DB = x_1 : 1 = x_1$. Поскольку оба треугольника BAD и OAx_1 прямоугольные, то они подобны (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними). Поэтому $\angle ABD = \angle AOx_1$. Но в силу параллельности прямой $y = b$ и оси абсцисс имеем $\angle DAO = \angle AOx_1$. Таким образом,

$$\angle OAB = \angle DAO + \angle DAB = \angle ABD + \angle DAB = 90^\circ.$$

8.2. Ответ: $k = 24$, $m = 25$ при $p = 83$.

Нетрудно заметить, что все удовлетворяющие условию дроби будут иметь вид $t + \dfrac{i}{p}$, где $k \leqslant t \leqslant n - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p - 1$. Поэтому сумма

$S_p(k,n)$ (по условию равная 2009) будет иметь вид

$$S_p(k,n) = (k+\frac{1}{p})+(k+\frac{2}{p})+\ldots+(k+\frac{p-1}{p})+(k+1+\frac{1}{p})+(k+1+\frac{2}{p})+\ldots+$$

$$+(k+1+\frac{p-1}{p})+\ldots+(n-1+\frac{1}{p})+(n-1+\frac{2}{p})+\ldots+(n-1+\frac{p-1}{p}) =$$

$$= (k+(k+1)+\ldots+(n-1))(p-1)+(n-k)(\frac{1}{p}+\frac{2}{p}+\ldots+\frac{p-1}{p}) =$$

$$= \frac{(n+k-1)(n-k)(p-1)}{2} + (n-k)\frac{p(p-1)}{2p} = \frac{(p-1)(n^2-k^2)}{2}.$$

Таким образом, $(p-1)(n^2-k^2) = 4018$. Заметим, что $n^2-k^2 > 1$, так как числа k и n натуральные, поэтому $p-1 < 4018$. Кроме того, поскольку p – простое число и $p > 3$, то число $p-1$ четное. Разложим число 4018 на простые множители: $4018 = 2\cdot 7^2\cdot 41$. Следовательно, $p-1$ может принимать следующие значения: $2\cdot 7^0\cdot 41^0 = 2$, $2\cdot 7^0\cdot 41^1 = 82$, $2\cdot 7^1\cdot 41^0 = 14$, $2\cdot 7^1\cdot 41^1 = 574$, $2\cdot 7^2\cdot 41^0 = 98$. Поэтому p может принимать одно из значений: 3, 15, 83, 99, 575. Однако лишь $p = 83$ – простое число, большее 3. При этом значении p получаем $(n-k)(n+k) = n^2-k^2 = 49$. Тогда, поскольку $n-k < n+k$, имеем $n-k = 1$, $n+k = 49$, откуда $n = 25$, $k = 24$.

8.3. Ответ: в обоих случаях выигрывает игрок B.

Пусть $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9}$ – число, получившееся в конце игры. Назовем позиции цифр x_1, x_3, x_5, x_7, x_9 в числе X нечетными позициями, а позиции остальных цифр – четными. Тогда (по признаку делимости на 11) для того, чтобы число X делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность R между суммой S_1 цифр, стоящих на нечетных позициях, и суммой S_0 цифр, стоящих на четных позициях, была кратна 11. Заметим, что сумма всех цифр числа X равна $S = S_0 + S_1 = x_1 + \ldots + x_9 = 45$. Поскольку разность $R = S_1 - S_0$ имеет ту же самую четность, что и сумма S, число R должно быть нечетным. Кроме того, $|R| \leqslant (5+6+7+8+9)-(1+2+3+4) = 15$.

Поэтому для того, чтобы число X делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы $|R| = 11$.

а) Из полученных равенств $S_0 + S_1 = 45$ и $|R| = 11$ следует, что условие делимости X на 11 равносильно равенству сумм S_0 и S_1 числам 17 и 28 или 28 и 17 , соответственно. Заметим, что существует всего 11 четверок цифр $\{x_2, x_4, x_6, x_8\}$, у которых сумма цифр равна 17 или 28 : 9865, 9874, 9521, 9431, 8621, 8531, 8432, 7631, 7541, 7532, 6542. При этом только две пары цифр $\{1, 5\}$ и $\{2, 5\}$ входят в три из этих наборов (все остальные пары чисел входят не более, чем в два набора).

Тогда для того, чтобы выиграть, игрок B может использовать следующую стратегию.

1) Если игрок A на первом ходу записывает цифру в нечетную позицию, то игрок B записывает в четную позицию любую цифру, отличную от 1, 2, и 5. Своим вторым ходом игрок B записывает любую из оставшихся в игре цифр в позицию противоположной четности той позиции, которую на втором ходу использует игрок A.

2) Если игрок A на первом ходу записывает некоторую цифру (возможно, и одну из 1,2,5) в четную позицию, то игрок B записывает в четную позицию такую цифру, чтобы в двух использованных четных позициях стояла пара чисел, отличная от пар $\{1, 5\}$ и $\{2, 5\}$.

В результате такой стратегии игрок B добьется ситуации, когда в двух четных позициях будут стоять некоторые цифры a и b, при этом существует не более таких двух пар цифр $\{c_1, d_1\}$ и $\{c_2, d_2\}$, что сумма $a + b + c_i + d_i$ будет равна 17 или 28, $i = 1, 2$. Поэтому за оставшиеся ходы (два хода в первом случае и три хода во втором) игрок B может добиться того, что на двух из оставшихся нечетных позициях окажутся ровно по одной цифре из каждой пары. Это приводит к тому, что сумма цифр на четных позициях числа X будет отличной от 17 и 28. Следовательно, число X не будет делиться на 11, и игрок B выигрывает.

б) *Первый способ.* Первым своим ходом игрок B (он начинает) полагает $x_1 = 1$. Затем после каждого хода A он ставит в позицию противоположной четности той позиции, которую использует игрок A, цифру, дополняющую цифру игрока A до соответствующей из пар $\{2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$, $\{8,9\}$. При такой игре $R = 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$ при некоторой расстановке знаков "$+$" и "$-$". Очевидно, что тогда $-3 \leqslant R \leqslant 5$, т.е. $|R| \neq 11$, и, следовательно, игрок B выигрывает.

Второй способ. Первым своим ходом игрок B полагает $x_1 = 1$. Затем после каждого хода A он заменяет одну из звездочек на позиции той же четности, которую использовал A, цифру дополняющую цифру игрока A до 10. Очевидно, что в конце обе суммы S_0 и S_1 будут кратны 5, и, следовательно не равны 17 или 28.

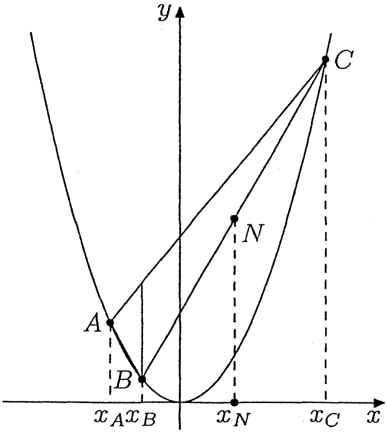
8.4. а) Докажем, что $S_2 \geqslant M$. Число M входит либо в S_2, либо в S_1. Если оно входит в S_2, то $S_2 \geqslant M$, поскольку слагаемые по условию неотрицательны. Если же M входит в S_1, то по той же причине, что и выше, $S_1 \geqslant M$, и, значит, $S_2 \geqslant S_1 \geqslant M$. Поэтому $S = S_1 + S_2 \geqslant S_1 + M$, что и требовалось доказать.

б) Для всевозможных разбиений $S = S_1 + S_2$, удовлетворяющих условию, пусть S_1^0 — наибольшая из меньших сумм. Предположим, что $S_1^0 < \dfrac{S-M}{2}$, и выберем любое число a_k, входящее в сумму S_2^0 ($S = S_1^0 + S_2^0$). Пусть $S_1' = S_1^0 + a_k$ и $S_2' = S_2^0 - a_k$ — новое разбиение S. (Мы не исключаем возможности $S_2' = 0$ — в случае, когда в S_2^0 входит лишь один бриллиант.) Так как $S_1' > S_1^0$, то из определения S_1^0 следует, что $S_2' \leqslant S_1'$, а тогда $S_2' \leqslant S_1^0$. Следовательно, используя предположение, получаем: $S = S_1' + S_2' = S_1^0 + a_k + S_2' \leqslant 2S_1^0 + a_k < S - M + a_k \leqslant S$, — противоречие.

9 – 9' классы

9.1. Ответ: 1.

Пусть x_A, x_B, x_C — абсциссы точек A, B, C соответственно (см. рис.). Заметим, что так как биссектриса угла ABC параллельна оси ординат, то углы, которые образуют прямые AB и BC с осью ординат, а, следовательно, и с осью абсцисс, равны. Поэтому угловые коэффициенты этих прямых, т.е. тангенсы углов, которые образует ось абсцисс с этими прямыми, отличаются только знаком. Нетрудно видеть, что тангенс угла наклона прямой AB равен $\dfrac{x_A^2 - x_B^2}{x_A - x_B} = x_A + x_B$, а тангенс угла наклона прямой BC равен $\dfrac{x_C^2 - x_B^2}{x_C - x_B} = x_C + x_B$. Поэтому $x_C + x_B = -(x_A + x_B)$, или $x_C + 2x_B + x_A = 0$. Так как по условию $x_C - x_A = 4$, то, сложив это равенство с предыдущим, получим $2x_C + 2x_B = 4$. Тогда искомая абсцисса середины N отрезка BC равна $x_N = (x_C + x_B)/2 = 1$.



9.2. Ответ: $(3; 4)$, $(4; 3)$.

В силу симметричности уравнения относительно переменных m и n, не нарушая общности, считаем $m \leqslant n$. Тогда $(n-1)! \cdot n(n+1) = (n+1)! < (m+1)! + (n+1)! = m^2 n^2$. Так как $n(n+1) > n^2$, то $(n-1)! < m^2 \leqslant n^2$. Заметим, что это неравенство для $n \geqslant 6$ не может иметь места. Действительно,

$$2(n-2)(n-1) < (n-1)! < n^2 \implies 2n^2 - 6n + 4 < n^2 \iff$$

$$\iff n^2 - 6n + 4 < 0 \iff 3 - \sqrt{5} < n < 3 + \sqrt{5} < 6.$$

Таким образом, $1 \leqslant n \leqslant 5$.

При $n = 5$ имеем $24 = (n-1)! < m^2 \leqslant n^2 = 25$, откуда $m = 5$. Однако $6! + 6! \neq 6^2 \cdot 6^2$.

При $n = 4$ имеем $6 = (n-1)! < m^2 \leqslant n^2 = 16$, откуда $m = 4$ или $m = 3$. При $m = 4$ будет $5! + 5! \neq 4^2 \cdot 4^2$ — противоречие. При $m = 3$ получает верное равенство $4! + 5! = 3^2 \cdot 4^2$.

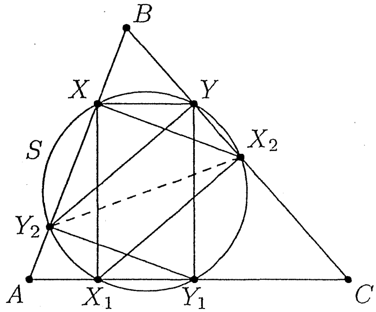
При $n = 3$ имеем $2 = (n-1)! < m^2 \leqslant n^2 = 9$, откуда $m = 2$ или $m = 3$. Однако $3! + 4! \neq 2^2 \cdot 3^2$ и $4! + 4! \neq 3^2 \cdot 3^2$.

При $n = 2$ имеем $1 = (n-1)! < m^2 \leqslant n^2 = 4$, откуда $m = 2$. Однако $3! + 3! \neq 2^2 \cdot 2^2$.

При $n = 1$ имеем $1 = (n-1)! < m^2 \leqslant n^2 = 1$, и, следовательно, таких натуральных m не существует.

Таким образом, решениями исходного уравнения являются пары $(3;4)$ и $(4;3)$.

9.3. Пусть $XY \parallel AC$, тогда $\angle YXX_1 = \angle XX_1Y_1 = 90°$. Кроме того, по условию $\angle X_1X_2Y = 90°$. Поэтому $\angle YXX_1 + \angle X_1X_2Y = 180°$, и, следовательно, точки X, X_1, X_2, Y лежат на одной окружности S, описанной около треугольника XX_1X_2. По условию $\angle YY_1X_1 = 90°$, поэтому $\angle YXX_1 + \angle YY_1X_1 = 90° + 90° = 180°$. Следовательно, точки X_1, X, Y, Y_1 также лежат на одной окружности, причем на той же самой окружности S. Аналогично, $\angle XY_2Y_1 = 90°$, $\angle XYY_1 = 90°$, следовательно, $\angle XY_2Y_1 + \angle XYY_1 = 180°$. Поэтому точки X, Y, Y_1, Y_2 также лежат на окружности S. Заметим, что поскольку $\angle X_2XY_2 = 90°$, то X_2Y_2 — диаметр окружности S. Но тогда $\angle Y_2YX_2 = 90°$ (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Значит, $Y_2Y \perp DC$, что и требовалось доказать.



9.4. Ответ: в обоих случаях выигрывает игрок B.

Пусть $X = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}}$ — число, получившееся в конце игры. Назовем позиции цифр x_1, x_3, x_5, x_7, x_9 в числе X нечетными позициями, а позиции остальных цифр — четными. Тогда (по признаку делимости на 11) для того, чтобы число X делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность R между суммой S_1 цифр, стоящих на нечетных позициях, и суммой S_0 цифр, стоящих на четных позициях, была кратна 11. Заметим, что сумма всех цифр числа X равна

$S = S_0 + S_1 = x_1 + \ldots + x_9 = 45$. Поскольку разность $R = S_1 - S_0$ имеет ту же самую четность, что и сумма S, число R должно быть нечетным. Кроме того, $|R| \leqslant (5+6+7+8+9)-(0+1+2+3+4) = 15$. Поэтому для того, чтобы число X делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы $|R| = 11$. Из полученных равенств $S_0 + S_1 = 45$ и $|R| = 11$ следует, что условие делимости X на 11 равносильно равенству сумм S_0 и S_1 числам 17 и 28 или 28 и 17, соответственно.

а) После первого хода игрока A игрок B ставит в позицию противоположной четности той позиции, которую использует игрок A, цифру 0, если 0 не использовал игрок A, в противном случае он использует любую отличную от нуля цифру. Далее после каждого из двух последующих ходов игрока A игрок B ставит в позицию противоположной четности той позиции, которую использует игрок A, любые из оставшихся к этому моменту цифры. Тогда после трех ходов обоих игроков останутся не занятыми две четные и две нечетные позиции. Не нарушая общности, считаем, что игрок A своим четвертым ходом ставит некоторую цифру в нечетную позицию. Тогда среди трех оставшихся неиспользованными цифр (среди них отсутствует цифра 0) по крайней мере одна будет отлична от чисел $28 - S_1$ и $17 - S_1$. Эту цифру и ставит игрок B в нечетную позицию. Тем самым в конце игры $x_1 \neq 0$, $S_1 \neq 17$, $S_1 \neq 28$, и, следовательно, игрок B выигрывает.

б) Первым своим ходом игрок B (он начинает) полагает $a_2 = 0$. После этого задача приобретает вид задачи 8.3 (пункт а) и, следовательно, игрок B имеет выигрышную стратегию.

11 – 11' классы

11.1. Ответ: прямая, параллельная прямой AB, и проходящая на 1 выше ее, за исключением точек пересечения этой прямой с параболой.

Пусть x_A, x_B, x_C – абсциссы точек A, B, C соответственно (см. рис.1, рис.2). Заметим, что так как A и B – точки пересечения параболы $y = x^2$ с прямой, параллельной оси абсцисс, то $x_A = -x_B$.

Пусть D – точка пересечения прямых AB и CC_1. Для того, чтобы точка C_1 лежала на окружности, описанной около треугольника ABC по теореме о хордах, в случае, когда точка C расположена на

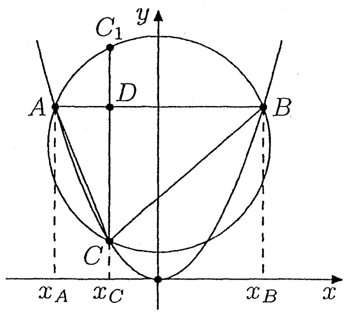


Рис. 1

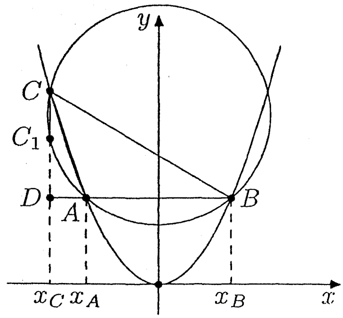


Рис. 2

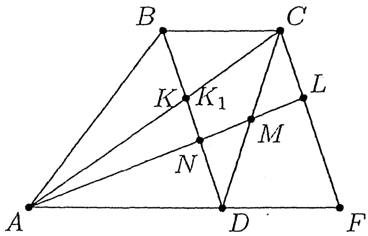
параболе ниже прямой AB (см. рис. 1), или по теореме о секущих, в случае, когда точка C расположена на параболе выше прямой AB (см. рис. 2), необходимо и достаточно, чтобы

$$DC_1 \cdot DC = DA \cdot DB. \qquad (1)$$

Учитывая, что $DC = |x_B^2 - x_C^2|$, $DA = |x_A - x_D| = |-x_B - x_C| = |x_B + x_C|$, $DB = |x_B - x_D| = |x_B - x_C|$, условие (1) перепишем в виде $DC_1 \cdot |x_B^2 - x_C^2| = |x_B + x_C| \cdot |x_B - x_C|$. Поскольку по условию $x_C \neq x_B$, то из полученного равенства следует, что $DC_1 = 1$. Это равенство и определяет искомое ГМТ: прямая, параллельная прямой AB, и проходящая на 1 выше ее, за исключением точек пересечения этой прямой с параболой.

11.2. Пусть $a = BC$, $b = AD = BD = DC$. Пусть K_1 – точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle ADC = 180° - \angle BCD = 180° - 72° = 108°$. Поскольку $AD = DC$, то в равнобедренном треугольнике ACD углы при основании AC равны, и поэтому $\angle CAD = 0.5(180° - \angle ADC) = 0,5(180° - 108°) = 36°$.

Кроме того, углы при основании BC равнобедренного треугольника BDC равны, и, следовательно, $\angle CBD = \angle BCD = 72°$. Поэтому $\angle BDC = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$. Следовательно, $\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 108° - 36° = 72°$. Но тогда $\angle AK_1D = 180° - \angle CAD - \angle ADB = 180° - 36° - 72° = 72°$. Поэтому треугольник AK_1D



равнобедренный и $AK_1 = AD$. Значит, точки K_1 и K совпадают. Легко видеть, что $\triangle AKD = \triangle BDC$ (по двум сторонам $AK = AD = DB = DC$ и углу между ними $\angle KAD = \angle BDC$), поэтому $KD = BC = a$. Следовательно, $BK = b - a$. Заметим, что треугольники BKC и AKD подобны, откуда $BC : AD = BK : KD = KC : AK$. Тогда $a : b = (b - a) : a$, что равносильно равенству

$$b^2 - ab - a^2 = 0. \qquad (*)$$

Проведем $CF \parallel BD$. Пусть L — точка пересечения прямых AM и CF, и пусть $DN = x$. Тогда треугольники AKN и ACL подобны, и поэтому

$$CL : KN = AC : AK = [KC : AK = a : b] = (a + b) : b,$$

откуда $KN = CL \cdot b/(a + b)$. Нетрудно видеть, что $CL = DN$ (что следует из очевидного равенства треугольников NDM и CML). Поэтому

$$a - DN = KN = DN \cdot b/(a + b) \iff DN = \frac{a(a + b)}{2b + a} = [\text{см.}(*)] =$$

$$= \frac{a^2 + ab + 2(b^2 - ab - a^2)}{2b + a} = \frac{b(2b + a) - a(2b + a)}{2b + a} = b - a = BK,$$

что и требовалось доказать.

11.3. Ответ: $(2;2)$, $(2;3)$.

Покажем, что если пара $(m;n)$ удовлетворяет уравнению

$$m! + n! = m^n, \qquad (1)$$

то $m \leqslant n$. Действительно, если $n < m$, то (1) можно переписать в виде $n!(m(m-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)+1) = m^n$. Однако это равенство невозможно, поскольку числа m и $(m(m-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)+1)$ взаимно простые.

Итак, $m \leqslant n$. В этом случае при $m > 2$ уравнение (1) перепишем в виде $(m-2)!(m-1)m(1+(m+1)\cdot\ldots\cdot n) = m^n$. Однако и такое равенство невозможно, поскольку числа $m-1$ и m взаимно простые. Следовательно, m может принимать лишь значения 1 или 2.

Если $m = 1$, то $1! + n! = 1$, что, очевидно, невозможно. Если же $m = 2$, то $2! + n! = 2^n$. Заметим, теперь, что при $n \geqslant 4$ имеем $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n > \underbrace{2\cdot 2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2}_{n-1} = 2^n$. Поэтому $n = 1, 2, 3$.

При $n = 1$ имеем $2! + 1! \neq 2^1$. При $n = 2$ имеем $2! + 2! = 2^2$, а при $n = 3$ имеем $2! + 3! = 2^3$. Таким образом, решениями уравнения (1) являются пары $(2;2)$ и $(2;3)$.

11.4. Ответ: б) первый игрок.

а) Предположим, что можно сделать бесконечное число ходов, пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, $(a_k, b_k), \ldots$ – выписанные пары. Найдется натуральные числа n, m, для которых $a_n \leqslant a_i, b_m \leqslant b_i$ при всех i. Для всех $k \leqslant n, m$ имеют место неравенства $a_k < a_m, b_k < b_n$. Отсюда видим, что имеется лишь конечное количество возможных пар (a_i, b_i).

б) Выигрывает первый. Для этого он на первом ходу выбирает пару $(1,1)$. Далее, если второй выбирает пару (a,b), то первый своим следующим ходом – пару (b,a). Такой выбор всегда возможен, ведь после любого хода первого множество пар, которые ещё можно выбрать, инвариантно относительно преобразования $(a,b) \mapsto (b,a)$, а после любого хода второго – нет. Таким образом, первый никогда не выбирает пару $(0,0)$.