# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

## *8 класс*

**8.5.** Можно ли в клетки таблицы $n \times n$ вписать целые числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ была отрицательной, а сумма всех чисел в таблице $n \times n$ была положительной, если

**а)** $n = 4$;   **б)** $n = 5$;   **в)** $n = 6$?

**8.6.** В треугольнике $ABC$ высота $AK$ и медиана $BM$ пересекаются в точке $Q$, при этом $AK = BM$. Прямая $QC$ является биссектрисой угла $MQK$.

Найдите углы треугольника $ABC$.

**8.7. а)** При каждом натуральном $n \geqslant 2$ приведите пример таких $n$ натуральных чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, для которых выполняется равенство

$$2\,x_1x_2\ldots x_n = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1).$$

**б)** Хотя бы для одного значения натурального $n > 2$ приведите примеры двух различных наборов натуральных чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, для которых выполняется равенство из пункта **а)**.

**8.8.** 15 одноклассников выехали на выходные в лес за грибами. Оказалось, что в воскресенье каждый из них нашёл больше белых, чем в субботу. Наибольшее число белых, найденных в один день одним школьником, оказалось равно 20. Семеро одноклассников в сумме за два дня собрали одинаковое количество белых грибов.

Докажите, что какие-то два одноклассника по крайней мере в один из двух дней сбора грибов нашли одинаковое количество белых грибов.

**9.5.** Можно ли в клетки таблицы $n \times n$ вписать целые числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ была отрицательной, а сумма всех чисел в таблице $n \times n$ была положительной, если

**а)** $n = 7$; **б)** $n = 8$; **в)** $n = 9$?

**9.6.** В треугольнике $ABC$ проведены высота $BH$ и медианы $AM$ и $CN$. Оказалось, что $HM = MN$.

Докажите, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

**9.7.** Укажите все возможные натуральные значения числа $n$, для которых существуют такие натуральные числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, что

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1) = n a_1 a_2 \ldots a_n.$$

**9.8.** На олимпиаде по математике, которая проводится в течение двух дней, участвовало 30 девятиклассников. В каждый из дней каждый участник получил целое неотрицательное число баллов, не превосходящее 40. Никакие два участника ни в первый, ни во второй день не получили одинаковое число баллов. Во второй день задачи были сложнее, чем в первый день, и поэтому каждый участник во второй день получил меньше баллов, чем в первый день.

Какое наибольшее число девятиклассников могло в сумме за два дня получить одинаковое число баллов?

## *10 класс*

*(12-летняя программа обучения)*

**10(12).5.** При каких $n \geqslant 4$ в клетки таблицы $n \times n$ можно вписать $n^2$ целых чисел (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате $3\times3$ была отрицательной, а сумма всех чисел в таблице была положительной?

**10(12).6.** В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$, сторона которого $BC = \sqrt{10}$. Его диагонали $EC$ и $AC$ пересекают диагональ $BD$ соответственно в точках $L$ и $K$. Оказалось, что вокруг четырехугольника $AKLE$ можно описать окружность.

Найдите длину касательной, проведённой из точки $C$ к этой окружности.

**10(12).7.** Про длины $a$, $b$ $c$ сторон некоторого треугольника $ABC$ известно, что какую бы из них ни увеличить на 1, полученная тройка чисел так же будет выражать длины сторон некоторого треугольника.

Какие значения может принимать величина площади треугольника $ABC$?

**10(12).8.** У любого сотрудника некоторой компании, состоящей из $n$ человек ( $n \geqslant 2$ ) есть по крайней мере один знакомый сотрудник.

Докажите, что всех сотрудников этой компании можно разбить на группы не менее, чем из двух человек, в каждой из которых найдётся человек, знакомый со всеми остальными из этой группы.

## *10 класс*

*(11-летняя программа обучения)*

**10(11).5.** В городе есть несколько автобусных остановок, некоторые из которых соединены дорогами. (Две остановки могут быть соединены не более, чем одной дорогой.) По этим дорогам можно проехать от любой остановки до любой другой. Кольцом назовём замкнутый маршрут, в котором нет повторяющихся остановок. Известно, что в городе любое кольцо содержит нечётное число остановок. Однажды городские службы признали, что некоторые дороги пришли в негодность. Поэтому были выбраны несколько колец и все дороги, принадлежащие этим кольцам, были закрыты на ремонт. В результате этих действий город разбился на несколько районов, таких, что в пределах района можно проехать от любой остановки до любой, но различные районы дорогами не связаны. (В каждом районе есть хотя бы одна остановка.) Докажите, что число районов нечётно.

**10(11).6.** Две смежные стороны четырёхугольника $ABCD$ равны, $BC = CD$, а две другие — нет, $AB \neq AD$. При этом $\angle BAC = \angle DAC$. Через точки $A$ и $C$ проведена окружность, которая второй раз пересекает отрезок $AB$ в точке $N$, а прямую $AD$ — в точке $M$.

Найдите длину отрезка $DM$, если известно, что $BN = a$.

**10(11).7.** Про длины $a$, $b$ $c$ сторон некоторого треугольника $ABC$ известно, что какую бы из них ни увеличить на 1, полученная тройка чисел будет выражать длины сторон некоторого

**а**) треугольника; **б**) остроугольного треугольника.

Какие значения может принимать величина площади треугольника $ABC$ в случае **а**), и какие — в случае **б**)?

**10(11).8.** Можно ли в клетки таблицы $4 \times 4$ вписать какие-то числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате $2 \times 2$ была отрицательной, а сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ была положительной ?

**11.5.** Докажите, что

$$\frac{x_1(2x_1-x_2-x_3)}{x_2+x_3}+\frac{x_2(2x_2-x_3-x_4)}{x_3+x_4}+\ldots+$$
$$+\frac{x_{n-1}(2x_{n-1}-x_n-x_1)}{x_n+x_1}+\frac{x_n(2x_n-x_1-x_2)}{x_1+x_2}\geqslant 0$$

для любых неотрицательных чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

**11.6.** Дана окружность с центром $O$ и точка $A$ вне её. Секущая, проходящая через точку $A$, пересекает окружность в точках $X$ и $Y$. Пусть $X'$ — точка окружности, симметричная точке $X$ относительно прямой $OA$.

Докажите, что точка пересечения прямых $OA$ и $X'Y$ не зависит от выбора секущей.

**11.7.** Про длины $a,\ b\ c$ сторон некоторого треугольника $ABC$ известно, что какую бы из них ни увеличить на 1, полученная тройка чисел будет выражать длины сторон некоторого

**а**) треугольника; **б**) остроугольного треугольника.

Какие значения может принимать величина площади треугольника $ABC$ в случае **а**), и какие — в случае **б**)?

**11.8.** Найдите все пары $(n;m)$ таких натуральных чисел $m\geqslant n\geqslant 3$, что в клетки таблицы $n\times m$ можно вписать какие-то числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате $2\times 2$ была отрицательной, а сумма чисел в каждом квадрате $3\times 3$ была положительной?

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## *8 класс*

**8.5.** Ответ: а) можно, б) можно, в) нельзя.

Следующие два примера показывают, что в таблицу $4 \times 4$ и $5 \times 5$ вписать числа так, как требуется в условии задачи, можно.

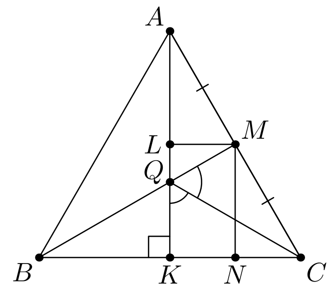
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-10$ | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Действительно, в первой таблице сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ равна $-3$, а сумма всех чисел в этой таблице равна 4. Во второй таблице сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ равна $-2$, а сумма всех чисел в этой таблице равна 14.

Таблицу $6 \times 6$ можно разбить на 4 квадрата $3 \times 3$. Поэтому если сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ отрицательная (в частности, и в этих четырех квадратах, из которых состоит вся таблица), то и сумма всех чисел в данной таблице будет отрицательной. Стало быть, в этом случае вписать числа в таблицу так, как требуется в условии задачи, нельзя.

**8.6.** Из точки $M$ проведем отрезки $MN$ и $ML$, параллельные высоте $AK$ и стороне $BC$ соответственно (см. рис.). Так как $AM = MC$, то по теореме Фалеса $AL = LK$. Кроме того, очевидно, что $LMNK$ — прямоугольник, и, следовательно, $LK = MN$. Поэтому $MN = 0,5AK = 0,5BM$. Значит, в прямоугольном треугольнике $BMN$ гипотенуза $BM$ в два раза больше катета $MN$, откуда следует, что $\angle MBN = 30^\circ$, и тогда $\angle BQK = 60^\circ$. Из условия следует, что $\angle MQC = 0.5\angle MQK = 180^\circ - \angle BQK = 60^\circ$. Кроме того $\angle AQM = \angle BQK$ (как вертикальные), и, значит $QM$ — медиана и биссектриса треугольника $AQC$, а, следовательно и высота, откуда $BM \perp AC$. Но тогда медиана $BM$ — высота треугольника $ABC$, и, значит, этот треугольник равнобедренный. Но тогда $BM$ — биссектриса, и поэтому, $\angle B = 2\angle QBC = 60^\circ$. Теперь очевидно, что все углы треугольника равны $60^\circ$.




**8.7. а)** Легко непосредственно убедиться, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ уравнение

$$2\,x_1x_2\ldots x_n = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1) \qquad (*)$$

имеет решение $x_1 = n$, $x_2 = n+1$, $\ldots$, $x_n = 2n-1$, т. е. $n$-ка чисел $(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) = (n;\, n+1;\, \ldots;\, 2n-1)$ является его решением. Действительно, через $A$ обозначим произведение $(n+1)\times$ $\times(n+2)\ldots(2n-1)$. Тогда $x_1x_2\ldots x_n = n\underbrace{(n+1)\ldots(2n-1)}_{=A} = nA$, а $(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1) = \underbrace{(n+1)\ldots(2n-1)}_{=A}\cdot 2n = 2nA$. Значит, для этого набора чисел $2\,x_1x_2\ldots x_n = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)$.

**б)** Если $n \geqslant 3$, то при каждом натуральном $k$, таком, что $2 \leqslant k \leqslant n-1$, следующий набор

$$(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) = (\underbrace{k+1;\, \ldots;\, 2k-1}_{k-1 \text{ штук}};$$

$$\underbrace{k(n-k+1);\, \ldots;\, (k+1)(n-k+1)-1}_{n-k+1 \text{ штук}}) \qquad (**)$$

доставляет решение уравнения $(*)$. Прежде чем в этом убедиться, назовём первую группу последовательных чисел в $(**)$, состоящую из

$(k-1)$ -ого числа, группой I, а вторую группу (из $n-k+1$ чисел) — группой II.

Пусть $k=2$ (тогда в группе I только одно число — число $3$ ). Через $B$ обозначим произведение всех чисел группы II за исключением её наименьшего числа $2(n-1)$. Тогда $x_1x_2\ldots x_n = 3\cdot 2(n-1)B = 6(n-1)B$, а $(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1) = 4\cdot B\cdot 3(n-1) = 12(n-1)B$. Значит, для этого набора чисел $2\,x_1x_2..x_n = (x_1+1)(x_2+1)...(x_n+1)$.

Если $k \geqslant 3$, то произведение всех чисел группы I, за исключением её наименьшего числа $k+1$, обозначим через $A$ (а $B$, как и выше, — произведение всех чисел группы II за исключением её наименьшего числа). Имеем: $x_1x_2\ldots x_n = (k+1)A\cdot k(n-k+1)B = k(k+1)(n-k+1)AB$, а $(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1) = A\cdot 2k\cdot B(k+1)(n-k+1) = 2k(k+1)(n-k+1)AB$. Значит, $2\,x_1x_2\ldots x_n = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1)$.

Заметим, что поскольку $k(n-k+1)\geqslant 2k \iff k\leqslant n-1$, то наибольшее число группы I меньше наименьшего числа группы II, т. е. числа в наборе $(**)$ упорядочены по возрастанию. Стало быть, все наборы в $(**)$ различны (их наименьшие числа различны), а значит, если $n\geqslant 4$, то имеем $n-2\geqslant 2$ различных наборов чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, удовлетворяющих уравнению $(*)$. При $n=3$ (тогда $k$ принимает только значение $2$ ) набор $(**)$ совпадает с набором $(3;4;5)$ из п. **а)**. Другими, отличными от него, наборами чисел, удовлетворяющими при $n=3$ уравнению $(*)$, будут, например, наборы $(3;3;8)$, $(2;6;7)$, $(2;5;9)$ или $(2;4;15)$.

Не следует думать, что указанными наборами при $n\geqslant 4$ исчерпываются все натуральнозначные решения уравнения $(*)$ — например, при $n=4$ решениями будут также $(2;8;9;15)$, $(2;4;30;31)$, $(3;5;8;9)$ или $(3;4;8;15)$, а при $n=5$ решением, в частности, будет $(2;7;13;15;64)$.

**8.8.** Предположим противное: ни в первый ни во второй день никакие два одноклассника не нашли одинаковое количество белых. Рассмотрим тех семерых школьников, которые в сумме за два дня нашли одинаковое количество белых. Пусть количество белых, найденных ими в субботу, равны (в порядке убывания) $a_1 > a_2 > \ldots > a_7$. Тогда количества белых, найденных ими соответственно в воскресенье, будут следовать в порядке возрастания: $b_1 < b_2 < \ldots < b_7$, учитывая, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \ldots = a_7 + b_7$. Кроме того, рассмотрим тех школьников (если таковые имеются), которые в воскресенье нашли белых меньше, чем $b_1$. Пусть количество таких школьников равно $r$, во второй день они нашли $y_1 < y_2 < \ldots < y_r$ белых, а в первый — соответственно $x_1$, $x_2$, ..., $x_r$. Имеем следующую схему, где в первой строке указано количество грибов, найденных в субботу, а во второй — в воскресенье.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & \ldots & & x_r & & a_1 & > & a_2 & > \ldots > & a_7 \\
\wedge & & \wedge & & & & \wedge & & \wedge & & & & \\
y_1 & < & y_2 & < & \ldots & < & y_r & < & b_1 & < & b_2 & < \ldots < & b_7
\end{array}$$

Из схемы видно, что по крайней мере $r + 7$ одноклассников в субботу нашли менее $b_1$ белых. Оценим величину числа $r$. Так как по условию число одноклассников, выехавших за грибами, равно 15, а наибольшее число белых, найденным одним школьником в один день, равно 20, то число одноклассников, которые в воскресенье нашли менее $b_1$ белых, не меньше, чем $15 - (20 - b_1 + 1) = b_1 - 6$. Таким образом, по крайней мере $(b_1 - 6) + 7 = b_1 + 1$ школьников в субботу нашли менее $b_1$ белых. Но количество целых неотрицательных чисел, меньших $b_1$, равно $b_1$. Выходит, что есть одноклассники, которые в первый день нашли одинаковое число белых. Получаем противоречие. Следовательно, сделанное предположение не верно, и, значит, какие-то два школьника по крайней мере в один из дней, действительно, нашли одинаковое количество белых.

## *9 класс*

**9.5.** Следующие два примера показывают, что в таблицу $7 \times 7$ и $8 \times 8$ вписать числа так, как требуется в условии задачи, можно.

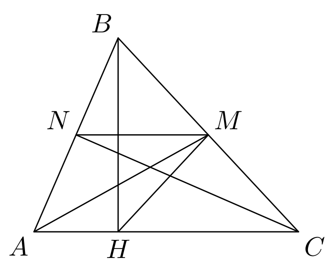
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 1 | $-2$ | $-2$ | 1 | $-2$ | $-2$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-10$ | 1 | 1 | $-10$ | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-10$ | 1 | 1 | $-10$ | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Действительно, в первой таблице сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ равна $-3$, а сумма всех чисел в этой таблице равна 1. Во второй таблице сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ равна $-2$, а сумма всех чисел в этой таблице равна 20.

Таблицу $9 \times 9$ можно разбить на 9 квадрата $3 \times 3$. Поэтому если сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ отрицательная (в частности, и в этих девяти квадратах, из которых состоит вся таблица), то и сумма всех чисел в данной таблице будет отрицательной. Стало быть, в этом случае вписать числа в таблицу так, как требуется в условии задачи, нельзя.

**9.6.** Так как $N$ и $M$ середины сторон $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, то $MN$ — средняя линия треугольника $ABC$, и, поэтому $NM = 0,5AC$. С другой стороны, треугольник $BHC$ прямоугольный и $HM$ — его медиана, проведенная из вершины прямого угла $BHC$, поэтому, $HM = 0,5BC$. Поскольку $NM = HM$, то и $AC = BC$.



**9.7.** Ответ: при всех $n \geqslant 2$.

При $n = 1$, очевидно, решений нет.

При $n = 2$ уравнение

$$n\,a_1a_2\ldots a_n = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) \qquad (*)$$

имеет решение $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

При $n \geqslant 3$ легко непосредственно проверить, что решением уравнения $(*)$ будет набор $(a_1; a_2; \ldots; a_n) = (2; 3;\; 2; \ldots; n-1)$. В самом деле, $n\,a_1a_2\ldots a_n = n\cdot 2\cdot 3\cdot (n-1)! = 6\,n!$, а $(a_1+1)\times$ $\times(a_2+1)\ldots(a_n+1) = 3\cdot 4\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n = 3\cdot 2\cdot n! = 6\,n!$.

Приведём один способ нахождения решений уравнения $(*)$, позволяющий из целочисленного решения этого уравнения при $n = k$ строить его целочисленные решения при всех натуральных $n > k$. Для этого заметим, что если набор $(a_1^0; a_2^0; \ldots; a_k^0)$ — решение уравнения $(*)$ при $n = k$, то набор $(a_1; a_2; \ldots; a_{k+1}) = (k; a_1^0; a_2^0; \ldots; a_k^0)$ — решение этого уравнения при $n = k+1$. Действительно,

$$(k+1)\,a_1a_2\ldots a_{k+1} = (k+1)\cdot k\cdot a_1^0\cdot a_2^0\cdot\ldots\cdot a_k^0 =$$
$$= (k+1)\cdot(a_1^0+1)(a_2^0+1)\ldots(a_k^0+1) = (k+1)\cdot(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1).$$

Стало быть, присоединяя к набору $(a_1^0; a_2^0; \ldots; a_k^0)$ последовательные натуральные числа $k$, $k+1$, $\ldots$, $k+m$, получим решение уравнения $(*)$ при $n = k+m+1$.

Так, взяв решение $(2; 3)$ уравнения $(*)$ при $n = 2$ (а такое решение — с точностью до порядка его компонент — только одно, поскольку $2a_1a_2 = (a_1+1)(a_2+1) \iff (a_1-1)(a_2-1) = 2$) и присоединяя к нему числа $2$, $3$, $\ldots$, $n-1$, получим указанное в начале решение уравнения $(*)$. Далее, например, легко проверить, что любой из наборов: $(1; 4; 5)$ и $(1; 3; 8)$ доставляет решение уравнения $(*)$ при $n = 3$. Значит, присоединяя к любому из этих наборов числа $3$, $\ldots$, $n-1$, получим ещё два (в добавление к найденному) решения уравнения $(*)$ при $n \geqslant 4$. Точно так же, присоединяя к любому из наборов $(1; 2; 5; 9)$, $(1; 2; 6; 7)$ или $(1; 2; 4; 15)$, дающих решение уравнения $(*)$ при $n = 4$ числа $4$, $\ldots$, $n$, получим ещё три решения уравнения $(*)$ при $n \geqslant 5$.

**9.8.** Ответ : 11.

Следующий пример показывает, что число таких девятиклассников могло равняться 11 (в первой и второй строчках указаны баллы, полученные участниками в первый и во второй дни соответственно).

$$\begin{array}{cccccccccccc} 11, & 12, & 13, & ..., & 20, & 21, & 22, & 23, & 24, & ..., & 39, & 40; \\ 10, & 9, & 8, & ..., & 1, & 0, & 12, & 13, & 14, & ..., & 29, & 30. \end{array}$$

Здесь в каждой из строчек все числа различны; каждое число первой строчки больше нижестоящего числа во второй строчке; сумма чисел в каждом из первых 11 столбцов равна 21.

Покажем, что более 11 девятиклассников в сумме за 2 дня не могло получить одинакового количества баллов. Предположим противное: какие-то 12 или более из этих школьников получили за 2 дня равное число баллов. Рассмотрим таблицу результатов этих участников, расположив их баллы ( $a_1$ , $a_2$ , ...) в первый день в порядке возрастания. Тогда их баллы ( $b_1$ , $b_2$ , ...) во второй день будут идти в порядке убывания. Кроме того, рассмотрим также всех тех школьников (если таковые имеются), у которых баллы в первый день меньше $a_1$ . Пусть количество таких девятиклассников равно $r$ $(r \geqslant 0) >$ .

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & < & x_2 & <\dots< & x_r & < & a_1 & < & a_2 & <\dots< & a_{12} & < & \dots \\ \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & & & & \\ y_1 & & y_2 & \dots & y_r & & b_1 & > & b_2 & >\dots> & b_{12} & > & \dots \end{array}$$

Из таблицы видно, что по крайней мере $12 + r$ девятиклассников во второй день получили менее $a_1$ баллов. Оценим величину числа $r$ . Так как по условию в олимпиаде участвовало 30 девятиклассников, а наибольший возможный результат в первый день не превосходит 40 баллов, то число участников, которые в первый день набрали менее $a_1$ баллов, не меньше, чем $30 - (40 - a_1 + 1) = a_1 - 11$ . Таким образом, по крайней мере $12 + (a_1 - 11) = a_1 + 1$ школьников во второй день получили менее $a_1$ баллов. Но количество целых неотрицательных чисел, меньших $a_1$ , равно $a_1$ . Поэтому какие-то (по крайней мере) два школьника во второй день получили равное число баллов, что противоречит условию задачи. Итак, сделанное предположение ошибочно, и, следовательно, наибольшее число девятиклассников, которые могли за 2 дня олимпиады получить одинаковое число баллов, равно 11.

## *10 класс*

*(12-летняя программа обучения)*

**10(12).5.** Ответ: при всех $n$, не кратных 3.

Если $n$ делится на 3, т.е. $n = 3k$, то всю таблицу $n \times n$ можно разбить на $k^2$ квадратов $3 \times 3$. Поэтому если сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ отрицательная (в частности и в этих $k^2$ квадратах, из которых состоит вся таблица), то и сумма всех чисел в данной таблице будет отрицательной. Стало быть, в этом случае вписать числа в таблицу так, как требуется в условии задачи, нельзя.

Пусть $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Покажем, что тогда в таблицу $n \times n$ можно вписать целые числа так, как требуется в условии задачи. Для этого выделим в данной таблице $k^2$ квадратов $2 \times 2$ так, чтобы они (крайние) отстояли на расстоянии 1 (примем сторону клеткам за 1) от краев таблицы и (соседние) на расстоянии 1 друг от друга (см. рис. 1 в предыдущей задаче для случая $k = 2$). Впишем в каждую клетку таких квадратов число $-b$ ($b > 0$), а в остальные клетки таблицы — число $a > 0$. Тогда сумма чисел в каждом квадрате $3\times3$ будет равна $5a-4b$, а сумма всех чисел в таблице — $((3k+1)^2-4k^2)\cdot a-4k^2\cdot b$. Достаточно показать, что для любого $k$ существуют целые $a$ и $b$, такие, что

$$5a - 4b < 0 \qquad ((3k+1)^2 - 4k^2) \cdot a - 4k^2 \cdot b > 0. \tag{1}$$

Неравенства (1) равносильны соответственно $b > \dfrac{5}{4} \cdot a$ и $b < \dfrac{5k^2+6k+1}{4k^2} \cdot a$, т. е. равносильны двойному неравенству

$$\frac{5}{4} \cdot a < b < \frac{5}{4} \cdot a + \frac{6k+1}{4k^2} \cdot a. \tag{2}$$

Подберем целое $a$ так, чтобы $\frac{6k+1}{4k^2} \cdot a > 1$ (такое $a$, конечно, существует, например $a = 4k^2$ ). Тогда длина интервала на числовой прямой между точками $\frac{5}{4} \cdot a$ и $\frac{5}{4} \cdot a + \frac{6k+1}{4k^2} \cdot a$ будет больше 1, и, значит, на этом интервале имеется целое число. Положим $b$ равным этому целому числу. Для найденных целых $a$ и $b$ неравенства $(2)$, а значит, и все условия задачи, выполняются.

Пусть $n = 3k + 2$ ( $k \in \mathbb{N}$ ). Покажем, что тогда в таблицу $n \times n$ тоже можно вписать целые числа так, как требуется в условии задачи. Для этого выделим в данной таблице $k^2$ клеток , чтобы они (крайние выделенные ) отстояли на расстоянии 2 от краев таблицы и (соседние выделенные) на расстоянии 2 друг от друга (см. рис. 2 в предыдущей задаче для случая $k = 2$ ). Впишем в каждую выделенную клетку число $-b$ ( $b > 0$ ), а в остальные клетки таблицы — число $a > 0$. Тогда сумма чисел в каждом квадрате $3 \times 3$ будет равна $8a - b$, а сумма всех чисел в таблице — $((3k+2)^2 - k^2) \cdot a - k^2 \cdot b$. Достаточно показать, что для любого $k$ существуют целые $a$ и $b$, такие, что

$$8a - b < 0 \qquad ((3k+2)^2 - k^2) \cdot a - k^2 \cdot b > 0. \tag{3}$$

Неравенства (3) равносильны соответственно $b > 8a$ и $b < \frac{8k^2 + 12k + 4}{k^2} \cdot a$, т. е. равносильны двойному неравенству

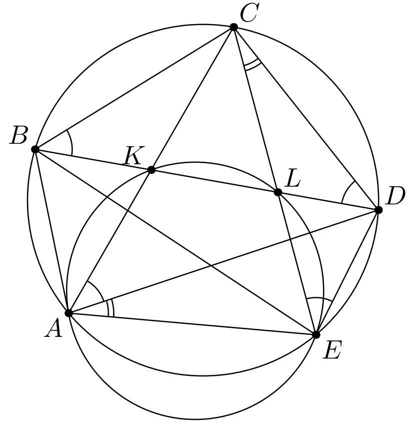
$$8a < b < 8a + \frac{12k+4}{k^2} \cdot a. \tag{4}$$

Подберем целое $a$ так, чтобы $\frac{12k+4}{k^2} \cdot a > 1$ (такое $a$, конечно, существует, например $a = k^2$ ). Тогда длина интервала на числовой прямой между точками $\frac{5}{4} \cdot a$ и $\frac{5}{4} \cdot a + \frac{6k+1}{4k^2} \cdot a$ будет больше 1, и значит, на этом интервале имеется целое число. Положим $b$ равным этому целому числу. Для найденных целых $a$ и $b$ неравенства $(4)$, а значит, и все условия задачи выполняются.

**10(12).6.** Ответ: $\sqrt{10}$.

*Первое решение.* Заметим, что $\angle BKA = 0,5(\smile AB + \smile CD)$.

С другой стороны, так как четырехугольник $AKLE$ вписанный, то $\angle BKA = \angle CEA = 0,5(\smile AB + \smile BC)$. Отсюда следует равенство дуг $\smile BC = \smile CD$. Тогда, в частности, $\angle CBK = \angle BAC$. Поэтому треугольники $BCK$ и $ACB$ подобны, так как угол $\angle C$ у них общий.




Следовательно, $\dfrac{CK}{CB} = \dfrac{BC}{AC}$, или $CK \cdot CA = BC^2 = a^2$. Но по теореме о касательной и секущей квадрат касательной из точки $C$ к окружности, описанной около четырехугольника $AKLE$ равен $CK \cdot CA = a^2$.

*Второе решение.* Пусть $\alpha = \angle CAD$, $\beta = \angle DAE$. Тогда $\angle CBD = \angle CED = \alpha$, $\angle DCE = \beta$. Так как четырехугольник $AKLE$ вписан в окружность, то $\angle KLE = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, и, следовательно, $\angle CLK = 180^\circ - \angle KLE = \alpha + \beta$. Но угол $CLK$ — внешний угол треугольника $CLD$, и, поэтому, $\angle CDL = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$. Следовательно, дуги $BC$ и $CD$ равны, а, значит, равны и стягивающие их отрезки $BC = CD$.

Пусть $R$ — радиус окружности, описанной около пятиугольника $ABCDE$. Поскольку треугольники $BCD$ и $ACE$ также вписаны в эту окружность, то из теоремы синусов для каждого из этих треугольников следует, что

$$BC = 2R\sin\alpha,\ CE = 2R\sin(\alpha+\beta)\ \Rightarrow\ BC = CE\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \quad (1)$$

Применяя теорему синусов к треугольнику $CLD$, получим $CD = CL \cdot \sin(\alpha+\beta)/\sin\alpha$. Поскольку хорды $BC$ и $CD$ равны, то из (1) теперь получаем $BC^2 = BC \cdot CD = CE \cdot CL$. Однако, по теореме о секущих, примененной к окружности, описанной около четырехугольника $AKLE$, получаем, что $CE \cdot CL = a^2$, где $a$ — длина искомой касательной, проведенной из точки $C$ к этой окружности. Таким образом, $a = BC = \sqrt{10}$.

**10(12).7.** По условию существуют треугольники со сторонами и $a+1$, $b$, $c$, и $a$, $b+1$, $c$, и $a$, $b$, $c+1$. Поэтому $b+c > a+1$, $c+a > b+1$, $a+b > c+1$. Тогда $b+c-a > 1$, $c+a-b > 1$, $a+b-c > 1$. Складывая эти неравенства, получим так же неравенство $a+b+c > 3$.

Поэтому для площади $S$ треугольника $ABC$ имеем

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} > \frac{1}{4}\sqrt{3\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

С другой стороны, все значения, большие $\sqrt{3}/4$ достигаются. Действительно, для любого $a > 1$ равносторонний треугольник со стороной $a$ удовлетворяет условию задачи (так как $a + a > a + 1$ ), а его площадь $\sqrt{3}a^2/4$ может принимать любые значения, большие $\sqrt{3}/4$.

**10(12).8.** Опишем решение задачи на языке теории графов. Обозначим людей точками на плоскости, а знакомства - ребрами между точками. Граф знакомств распадается на компоненты связности, причем наличие знакомого у любого человека означает, что все компоненты связности состоят по крайней мере из двух вершин. Утверждение достаточно доказать для любой компоненты связности, т.е. что связный граф из более, чем одной вершины можно разбить на подграфы, в каждом из которых есть не менее 2-х вершин и есть вершина, соединенная со всеми остальными.

Опишем процедуру разбиения. Фиксируем произвольную вершину $A$ и обозначим через $N_i$ - множество вершин, кратчайший путь от которых до $A$ имеет длину $i$. Пусть $k$ - наибольший из номеров, среди всех $N_i$. Выберем любую вершину $B$ в $N_k$, она соединена с какой-то вершиной $C$ из $N_{k-1}$. Рассмотрим подграф, состоящий из вершины $C$ и всех вершин из $N_k$, которые соединены с $C$. Если после удаления этого подграфа остается больше одной вершины или не остается ни одной вершины, то мы его удаляем, а если останется ровно одна вершина, то оставшаяся - это $A$ и добавляем ее к подграфу, который удаляем. Из определения $N_i$ и $k$ видно, что каждый раз мы удаляем требуемый подграф, а после удаления остается связный граф не менее чем с $2$ вершинами. Повторяем эту операцию (на каждом шаге свое $k$ ), пока не придем к пустому графу. Разбиение построено.

## *10 класс*

*(11-летняя программа обучения)*

**10(11).5. Лемма 1.** *Рассмотрим кольцо* $v_1, v_2, ..., v_n, v_1$ *(* $v_i$ *- остановки). Тогда для любых* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i < j$, *не существует пути от* $v_i$ *до* $v_j$ *, не содержащего дорог из кольца* $v_1, v_2, ..., v_n, v_1$ *.*

Действительно, предположим противное: существует путь $v_i$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_k, v_j$ . (Если существует какой-то путь,то существует и путь без повторения остановок. Поэтому считаем, что $a_i$ различны.) Тогда различны все остановки $v_1$, ..., $v_n$, $a_1$, ..., $a_k$ Заметим, что $n$ нечётно.

Тогда имеем два кольца $v_i$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$, $v_j$, $v_{j-1}$, ..., $v_{i+1}$, $v_i$ и $v_i$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$, $v_j, v_{j+1}$, ..., $v_n$, $v_1$, ..., $v_{i-1}$, $v_i$ . В сумме у них $2(k+1)+n$ дорог - нечётное число. Следовательно, одно из них имеет чётную длину. Противоречие. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Кольца не содержат общих дорог.*

Действительно, пусть кольца $V$ и $W$ содержат общую дорогу $(a, b)$ . Едем по дорогам кольца $V$ от остановки $a$ в сторону, отличную от той, где находится $b$ , до тех пор, пока эти дороги общие у $V$ и у $W$ . Приезжаем в $a_1$ . Теперь продолжим ехать из $a_1$ по дорогам из $V$ . Когда-нибудь мы снова вернёмся на остановку, лежащую в кольце $W$ . (Она будет отличной от $a_1$ .) Таким образом, нашёлся путь между двумя дорогами кольца $W$ , не содержащий дорог из $W$ . Противоречие с леммой 1. Лемма 2 доказана.

Таким образом, каждый раз, когда закрывают одно кольцо, район, содержащий это кольцо, распадается на нечётное число районов. То есть количество районов изменяется на чётное число. Следовательно, число районов нечетно.

**10(11).6.** Ответ: $DM = a$.

Покажем, что четырехугольник $ABCD$ вписанный. Действительно, предположим противное. Рассмотрим окружность, проходящую

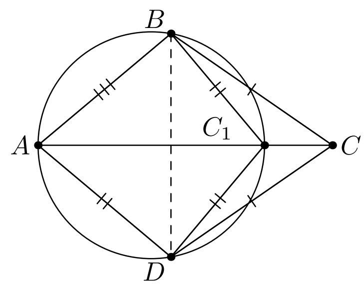



Рис. 1

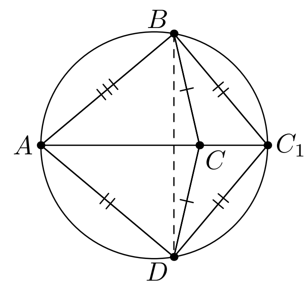
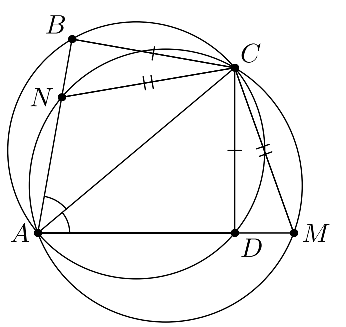



Рис. 2

через точки $A$, $B$, $D$. Пусть $C_1$ — точка пересечения прямой $AC$ с этой окружностью (см. рис. 1, рис. 2). Тогда, так как $\angle BAC_1 = \angle BAC = \angle DAC = \angle DAC_1$, то дуги $BC_1$ и $DC_1$ равны, и, следовательно, равны и стягивающие их хорды $BC_1 = DC_1$. Поскольку по условию $BC = DC$, то $CC_1$ — серединный перпендикуляр к отрезку $BD$. Так как $A \in CC_1$, то $AB = AD$, что противоречит условию. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный.

Рассмотрим теперь окружность, проходящую через точки $A$, $N$, и $C$. Так как четырехугольники $ABCD$ и $ANCM$ вписанные, то $\angle BCD = 180° - \angle DAB = 180° - \angle MAN = \angle NCM$. Отсюда, в частности, следует, что точка $M$ лежит на продолжении стороны $AD$ за точку $D$. Кроме того,

$$\angle NCA = \angle NCM - \angle ACD = \angle BCD - \angle ACD = \angle BCM. \quad (*)$$



Так как $AC$ биссектриса, то дуги дуги $NC$ и $MC$ равны, а, следовательно, равны и стягивающие их хорды $NC = MC$.

Таким образом, из $(*)$, условия и полученного равенства следует, что треугольники $CN$ и $MCD$ равны (первый признак). Следовательно, $DM = BN = a$.

**10(11).7.** Ответ: а) $\sqrt{3}/4$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)^2$.

а) См. решение задачи **10(12).7**.

б) Без ограничения общности, пусть в треугольнике $ABC$ стороны удовлетворяют неравенствам $a \geqslant b \geqslant c$. Так как $a+1$, $b$, $c$, стороны остроугольного треугольника, то

$$b^2 + c^2 > (a+1)^2. \qquad (*)$$

Тогда в частности, $2a^2 \geqslant b^2 + c^2 > (a+1)^2$, или $a^2 > 2a+1$, откуда $a > \sqrt{2}+1$. Далее, сложив неравенство $(*)$ с неравенством $a^2 \geqslant b^2$, получим

$$c^2 > 2a + 1 \geqslant 2(\sqrt{2}+1) + 1 = (\sqrt{2}+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad b \geqslant c > \sqrt{2}+1.$$

Таким образом,

$$c + a - b \geqslant c > \sqrt{2}+1, \quad a + b - c \geqslant a > \sqrt{2}+1,$$

$$(a{+}b{+}c)(b{+}c{-}a) = (b{+}c)^2{-}a^2 = b^2{+}c^2{+}2bc{-}a^2 > (a{+}1)^2{+}2bc{-}a^2 =$$
$$= 2a + 1 + 2bc > 2(\sqrt{2}+1) + 1 + 2(\sqrt{2}+1)^2 = 3(\sqrt{2}+1)^2.$$

Поэтому для площади треугольника $ABC$ имеем

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2 - a^2)\,(c+a-b)(a+b-c)} >$$
$$> \frac{1}{4}\sqrt{3\cdot(\sqrt{2}+1)^2\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)^2.$$

С другой стороны, все значения, большие $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)^2$ достигаются. Действительно, для любого $a > \sqrt{2}+1$ равносторонний треугольник со стороной $a$ удовлетворяет условию задачи, т.е., $a+1$, $a$,

$a$ — стороны остроугольного треугольника (так как $a^2 + a^2 > (a+1)^2$ при $a > \sqrt{2} + 1$), а его площадь $\sqrt{3}a^2/4$ может принимать любые значения, большие $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)^2$.

**10(11).8.** Ответ: нельзя.

Предположим, что вписать числа в клетки таблицы так, как требуется в условии задачи можно. Рассмотрим все квадраты $2 \times 2$ в этой таблице. Их количество равно 9. Для каждого такого квадрата подсчитаем сумму чисел в нем (по условию она отрицательная) и сложим все эти суммы. Полученный результат (обозначим его через $S_1$) является отрицательным числом и в действительности равен сумме всех чисел таблицы, но некоторые из них присутствуют в этой сумме несколько раз. А именно, столько раз, каково количество различных квадратов $2 \times 2$, содержащих клетку, с записанным в ней числом. Эти количества, т. е. кратности вхождения чисел таблицы в сумму $S_1$ указаны на рисунке.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |

Теперь рассмотрим все квадраты $3 \times 3$ в данной таблице. Их количество равно 4. Для каждого такого квадрата также подсчитаем сумму чисел в нем (по условию она положительная) и сложим все эти суммы. Полученный результат (обозначим его через $S_2$) является положительным числом и в действительности равен сумме всех чисел таблицы, но некоторые из них присутствуют в этой сумме несколько раз. А именно, такое количество раз, каково количество различных квадратов $3 \times 3$, которые содержат клетку, в которой записано данное число. Оказывается, эти количества, т. е. кратности вхождения чисел таблицы в сумму $S_2$ такие же, как и в сумму $S_1$ (указаны на том же рисунке). Следовательно, суммы $S_1$ и $S_2$ равны, как суммы, состоящие из одинаковых слагаемых с одинаковыми кратностями. Но этого не может быть, так как $S_1 < 0$, а $S_2 > 0$. Полученное противоречие означает, что вписать числа в клетки таблицы так, как требуется в условии задачи, нельзя.

**11.5.** Имеем

$$\frac{x_1(2x_1-x_2-x_3)}{x_2+x_3}+\frac{x_2(2x_2-x_3-x_4)}{x_3+x_4}+\ldots+$$

$$+\frac{x_{n-1}(2x_{n-1}-x_n-x_1)}{x_n+x_1}+\frac{x_n(2x_n-x_1-x_2)}{x_1+x_2}\geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{2x_1^2}{x_2+x_3}-x_1+\frac{2x_2^2}{x_3+x_4}-x_2+\ldots+\frac{2x_{n-1}^2}{x_n+x_1}-x_{n-1}+\frac{2x_n^2}{x_1+x_2}-x_n\geqslant 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n+x_1}+\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\geqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}.$$

Умножая обе части этого неравенства на положительное число

$(x_2+x_3)+(x_3+x_4)+\ldots+(x_n+x_1)+(x_1+x_2)=2(x_1+x_2+\ldots+x_n)$,

получаем равносильное неравенство

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\ldots\frac{x_{n-1}^2}{x_n+x_1}+\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right)\times$$

$$\times\big((x_2+x_3)+(x_3+x_4)+\ldots+(x_n+x_1)+(x_1+x_2)\big)\geqslant(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Последнее неравенство следует из неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\ldots\frac{x_{n-1}^2}{x_n+x_1}+\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right)\times$$

$$\times\big((x_2+x_3)+(x_3+x_4)+\ldots+(x_n+x_1)+(x_1+x_2)\big)\geqslant$$

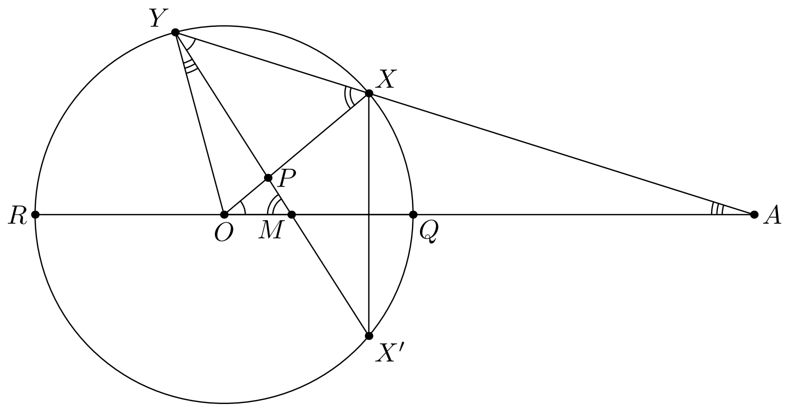
$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{x_1^2}{x_2+x_3}}\sqrt{x_2+x_3}+\ldots+\sqrt{\frac{x_n^2}{x_1+x_2}}\sqrt{x_1+x_2}\right)^2=$$

$$=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

**11.6.** Пусть $R$ – радиус окружности. Соединим центр окружности $O$ с точками $X$ и $Y$. Тогда $OX=OY=R$. Пусть $\alpha=\angle XOA$,

$\beta = \angle OXY$. Так как точка $X'$ симметрична точке $X$ относительно прямой $OA$, а, значит, и относительно диаметра $RQ$, то

$$\alpha = \angle XOQ = \smile XQ = 0,5 \smile XX' = \angle XYX'.$$




Тогда $\angle XAO = \beta - \alpha$ (теорема о внешнем угле треугольника $OXA$). Поэтому из теоремы синусов для треугольника $OXA$ имеем

$$\frac{R}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{OA}{\sin(180^\circ-\beta)} = \frac{OA}{\sin\beta}. \qquad (*).$$

Так как $\angle YPX = \angle OPM$ (как вертикальные), то $\angle YMO = \angle YXO = \beta$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике $YQX$ углы при основании $YX$ равны, и, следовательно, $\angle OYM = \beta - \alpha$. Из теоремы синусов для треугольника $YOM$ получаем

$$\frac{OM}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{R}{\sin\beta}.$$

Учитывая $(*)$, находим $OM = \dfrac{R^2}{OA}$, что и означает независимость точки $M$ от выбора секущей.

Заметим, что расположение точек $X$ и $Y$ не влияет на решение.

**11.7.** См. решение задачи **10(11).7.**

**11.8.** Ответ: $(3;m)$, где $m$ — любое натуральное число, не меньшее 3.

Пусть $n \geqslant 4$. тогда, если в таблицу $n \times m$ ($m \geqslant n \geqslant 4$) можно вписать числа так, как требуется в условии задачи, то тогда, в частности, и любой квадрат $4 \times 4$ этой таблицы также удовлетворяет удовлетворяет всем условиям задачи. Но в таблицу $4 \times 4$ так, как требуется числа вписать нельзя (см. решение задачи **10(11).8**).

Пусть теперь $n = 3$. В таблицу $3 \times m$ при любом $m \geqslant 3$ можно вписать числа с соблюдением условий задачи. Например, так, как это изображено на рис. 1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | $\cdots$ |
| 3 | $-10$ | 3 | $-10$ | 3 | $-10$ | $\cdots$ |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | $\cdots$ |

Рис. 1

В этой таблице во всех квадратах $2 \times 2$ сумма чисел равна $-1$, т.е. отрицательна. И в таблице присутствуют квадраты $3 \times 3$ только двух видов (рис. 2, рис. 3):

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 |
| 3 | $-10$ | 3 |
| 3 | 3 | 3 |

Рис. 2

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 |
| $-10$ | 3 | $-10$ |
| 3 | 3 | 3 |

Рис. 3

В каждом из этих квадратов сумма чисел положительна: или 14, или 1.