УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Незнайка сказал, что если сложить все возможные двузначные числа, получающиеся вычёркиванием пяти цифр из его семизначного телефонного номера, то в сумме получится 2008.

Докажите, что Незнайка ошибся в вычислениях.

8.2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) на стороне AC отмечена точка D так, что треугольник ADK равнобедренный, где K — точка пересечения отрезка BD и высоты AH.

Найдите величину угла DBA.

8.3. Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

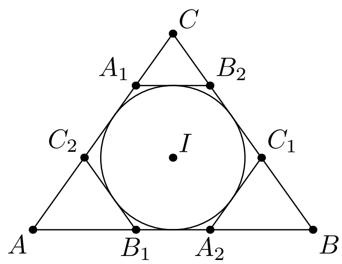
$$(3a - 2b - 6)^2 = a^2 - b^2 - 9.$$

8.4. На плоскости проведены N прямых. Некоторые из них (не менее одной) имеют ровно по пять точек пересечения с проведёнными прямыми, а остальные (не менее одной) — ровно по семь точек пересечения.

Найдите все значения, которые может принимать N.

9 класс

9.1. В треугольнике ABC отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 касаются вписанной в этот треугольник окружности и параллельны сторонам AB, BC и CA соответственно (см. рис.).



Найдите значение суммы

$$\frac{A_1B_2}{AB}+\frac{B_1C_2}{BC}+\frac{C_1A_2}{CA}.$$

9.2. Можно ли на плоскости выбрать девять прямых и восемь точек так, чтобы на каждой из выбранных прямых было бы не менее трёх выбранных точек?

9.3. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству

$$x^2+y^2+xy+\sqrt{3}(x+y)=0.$$

Докажите, что тогда $x^2+y^2\leqslant 3$. При каких x и y это неравенство обращается в равенство ?

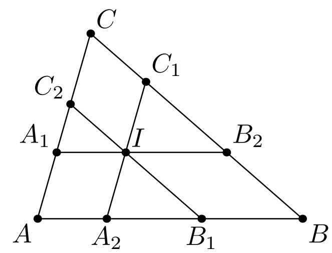
9.4. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству

$$x^4+x^3y+2x^2+y+1=x^3+x.$$

10 класс

(12-летняя программа обучения)

10(12).1. Через центр I вписанной в треугольник ABC окружности проведены отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2, параллельные сторонам AB, BC и CA соответственно (см. рис.).



Найдите значение суммы

$$\frac{A_1B_2}{AB} + \frac{B_1C_2}{BC} + \frac{C_1A_2}{CA}.$$

10(12).2. Найдите все пары $(a; b)$ целых чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$a^4 - 3a^2 + 4a - 3 = 7 \cdot 3^b.$$

10(12).3. Длины всех высот в некотором неравнобедренном треугольнике выражаются целыми числами.

Найдите наименьшую возможную величину радиуса вписанной окружности этого треугольника, если известно, что она также является целым числом.

10(12).4. Какое минимальное число окружностей на плоскости можно выбрать так, чтобы нашлось шесть точек, через каждую из которых проходило бы не менее трёх окружностей?

10 класс

(*11-летняя программа обучения*)

10(11).1. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 3^y.$$

10(11).2. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки A_1 и B_1 соответственно, так что

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \lambda \frac{AB}{CB}, \qquad \frac{BA_1}{CA_1} = \lambda \frac{BA}{CA},$$

где λ — некоторое положительное число. Пусть M — произвольная точка на отрезке A_1B_1, а x, y, z — расстояния от точки M до сторон треугольника BC, AC, AB соответственно.

Докажите, что $z = \lambda(x + y)$.

10(11).3. Многочлен четвёртой степени $P(x)$ со старшим коэффициентом 1 имеет четыре различных корня, принадлежащих отрезку $[-1; 1]$.

а) Докажите, что $P(x) > -4$ для любых действительных x.

б) Найдите наибольшую действительную константу c, такую, что $P(x) > c$ для любого действительного x и любого многочлена $P(x)$, удовлетворяющего указанным выше условиям.

10(11).4. Какое максимальное число прямых на плоскости можно выбрать так, чтобы нашлось семь точек, удовлетворяющих условию, что на каждой прямой лежит не менее трёх из этих точек?

11 класс

11.1. Докажите, что если действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2+y=y^2+z=z^2+x$, то

$$x^3+y^3+z^3=xy^2+yz^2+zx^2.$$

11.2. Четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC$ и $AD=3DC$, вписан в окружность. На диагонали BD отмечена точка R так, что $DR=2RB$, а на отрезке AR отмечена точка Q так, что $\angle ADQ=\angle BDQ$. Оказалось, что $\angle ABQ+$ $+\angle CBD=\angle QBD$. Пусть P — точка пересечения отрезка AB и прямой DQ.

Найдите угол APD.

11.3. а) Найдите хотя бы одно натуральное число k, для которого существуют такие натуральные числа a, b, c, что

$$k^2+a^2=(k+1)^2+b^2=(k+2)^2+c^2. \qquad (*)$$

б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел k, для которых найдутся такие натуральные числа a, b, c (свои для каждого k), что выполнены равенства $(*)$.

в) Докажите, что если числа a, b, c удовлетворяют равенствам $(*)$ при некотором k, то произведение abc делится на 144.

г) Докажите, что не существует натуральных чисел a, b, c, d, k таких, что

$$k^2+a^2=(k+1)^2+b^2=(k+2)^2+c^2=(k+3)^2+d^2.$$

11.4. Какое максимальное число плоскостей в пространстве можно выбрать так, чтобы нашлось 6 точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) на каждой из выбранных плоскостей находится не менее 4 из этих точек;

2) никакие 4 из этих точек не лежат на одной прямой ?

8 класс

8.1. Обозначим номер телефона Незнайки $\overline{abcdefg}$. Если предположить, что среди цифр a, b, c, d, e, f нет нулей, то требуемая сумма S всех двузначных чисел равна:

$$S = \overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ad}+\overline{ae}+\overline{af}+\overline{ag}+\overline{bc}+\overline{bd}+\overline{be}+\overline{bf}+\overline{bg}+\overline{cd}+\overline{ce}+\overline{cf}+\overline{cg}+$$

$$+\overline{de}+\overline{df}+\overline{dg}+\overline{ef}+\overline{eg}+\overline{fg} = 60a+50b+40c+30d+20e+10f+$$

$$+b+2c+3d+4e+5f+6g=$$

$$=60a+51b+42c+33d+24e+15f+6g.$$

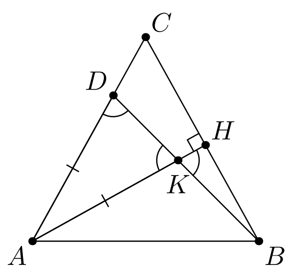
Это число делится на 3 и не может быть равным 2008.

Если же среди цифр a, b, c, d, e, f есть нуль, то

$$S \leqslant (60+50+40+30+20)\cdot 9+(1+2+3+4+5+6)\cdot 9 = 1989 < 2008.$$

8.2. Ответ: 45°.

Обозначим $2x = \angle DAK$. Тогда, так как треугольник ADK равнобедренный, то $\angle ADK = \angle DKA = 90^\circ - x$. В прямоугольном треугольнике ACH имеем $\angle ACH = 90^\circ - 2x$. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, то $\angle CBA = \angle CAB = 0,5(180^\circ - (90^\circ - 2x)) = 45^\circ + x$. Углы HKB и DKA равны как вертикальные, откуда $\angle HKB = 90^\circ - x$. Тогда в прямоугольном треугольнике HKB имеем $\angle HBK = 90^\circ - (90^\circ - x)) = x$.



Таким образом,

$$\angle DBA = \angle CBA - \angle HBK = 45^\circ + x - x = 45^\circ.$$

8.3. Ответ: $a = 4,5$, $b = 3$.

Имеем

$$(3a-2b-6)^2-(a^2-b^2-9)=8a^2-12a(b+3)+5b^2+24b+45.$$

из условия следует, что $8a^2-12a(b+3)+5b^2+24b+45=0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно a и вычислим его дискриминант: $D=12^2(b+3)^2-4\cdot 8(5b^2+24b+45)=4(36b^2+216b+324-$ $-40b^2-192b-360)=4(-4b^2+24b-36)=-16(b^2-6b+9)=$ $=-16(b-3)^2$. Рассматриваемое уравнение имеет решение лишь в случае, когда $D\geqslant 0$, следовательно, необходимо имеем $b=3$. Тогда $a=12(b+3)/16=12(3+3)/16=4,5$.

8.4. Ответ: $N=8$ или $N=12$.

Подсчитаем количество K точек пересечения каждой прямой с каждой из остальных прямых. Для удобства подсчета мы можем считать, что ни в какой точке не пересекаются более двух прямых. Если через какую-либо точку пересечения двух прямых проходят еще прямые, мы можем их сдвинуть параллельно самим себе, чтобы они не проходили через точки пересечения каких-либо двух других прямых.

Пусть теперь m прямых пересекаются пятью прямыми, а n прямых — семью прямыми. Тогда всего точек пересечения будет $K=(5m+7n)/2=n+5(n+m)/2$. Так как число K целое, то общее число прямых $N=m+n$ должно быть четным.

Заметим, что $N\geqslant 8$, поскольку по условию существует по крайней мере одна прямая, которая пересекается с семью другими прямыми. С другой стороны, $N\leqslant 12$. Для доказательства этого факта рассмотрим прямую l_1, которая пересекается пятью прямыми m_1, m_2, ..., m_5. Тогда остальные прямые на плоскости не должны пересекать прямую l_1, и, следовательно, должны быть ей параллельны. Пусть это прямые l_2, l_3, ..., l_k. Любая из них тоже пересекается с пятью прямыми m_1, ..., m_5. Итак, все множество прямых на плоскости разбивается на группы: параллельные между собой k прямых l_1, l_2, ..., l_k и пересекающая их пятерка прямых m_1, m_2, ..., m_5. Поэтому всего прямых $N=k+5$. Так как среди прямых m_1, m_2, ..., m_5 есть (по условию) прямая, пересекающаяся с семью прямыми, причем заведомо ее пересекают прямые l_1, l_2, ..., l_k, то $k \leqslant 7$. тогда $N \leqslant 7+5=12$. Итак, общее число прямых N четно, причем $8 \leqslant N \leqslant 12$.

Примеры расположения прямых для $N=8$ и $N=12$ приведены на рисунках 1 и 2. Покажем, что оставшийся случай $N=10$ невозможен. Пусть l_1 — прямая, которая пересекается пятью прямыми L_1, L_2, ..., L_5. Тогда все остальные прямые (их четыре) на плоскости не должны пересекать прямую l_1 и, следовательно, должны быть ей параллельны. Пусть это прямые l_2, l_3, l_4, l_5. Поскольку прямая L_1, пересекается прямыми l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, то из условия следует, что существует еще только две прямые, скажем, L_4 и L_5, которые пересекают прямую L_1. Это означает, что остальные две прямые L_2, L_3 параллельны L_1. Но тогда, например, прямая L_5 пересекает прямые L_1, L_2, L_3 и прямые l_1, l_2, ..., l_5 — всего 8 прямых — противоречие. Это противоречие и доказывает невозможность случая $N=10$.

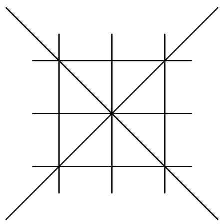


Рис. 1

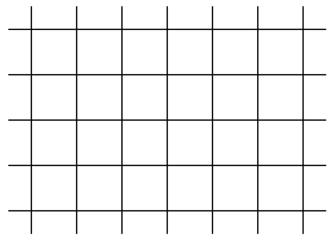


Рис. 2

9 класс

9.1. Ответ: 1.

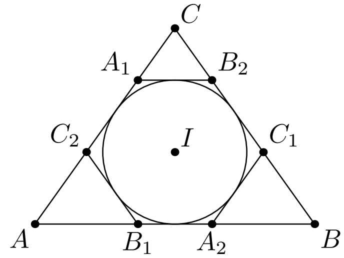
Пусть r — радиус вписанной окружности, h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC, проведенные к сторонам BC, AC и AB соответственно. Так как $A_1B_2 \parallel AB$, то треугольники A_1CB_2 и ACB подобны, причем $A_1B_2 : AB = (h_c - 2r) : h_c$. Аналогично получаем $B_1C_2 : BC = (h_a - 2r) : h_a$, $C_1A_2 : CA = (h_b - 2r) : h_b$.

Следовательно, искомая сумма σ равна

$$\sigma = \frac{A_1B_2}{AB} + \frac{B_1C_2}{BC} + \frac{C_1A_2}{CA} =$$

$$= \frac{h_c - 2r}{h_c} + \frac{h_a - 2r}{h_a} + \frac{h_b - 2r}{h_b} =$$

$$= 3 - 2r\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}\right).$$



Заметим, что удвоенная площадь треугольника ABC равна $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, а, с другой стороны, $2S = r(a+b+c)$. Поэтому

$$\sigma = 3 - 2r\left(\frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}\right) = 3 - \frac{2r(a+b+c)}{2S} = 3 - \frac{4S}{2S} = 1.$$

9.2. Ответ: нельзя.

Предположим, что такая конфигурация точек и прямых существует. Пусть $A_1, \ldots, A_8$ — это точки, а $l_1, \ldots, l_9$ — прямые. Обозначим через x_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, количество прямых l_j, проходящих через точку A_i, а через y_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$, — количество точек A_j, находящихся на прямой l_i. Заметим, что $x_1 + \ldots + x_8 = y_1 + \ldots + y_9$. Действительно, и левая, и правая части равны количеству пар (A_i, l_j), удовлетворяющих условию $A_i \in l_j$. По условию, $y_i \geqslant 3$ для всех i от 1 до 9. Поэтому $x_1 + \ldots + x_8 \geqslant 27$. Значит, для некоторого i, не нарушая общности, $i = 1$, имеет место неравенство $x_i \geqslant 4$. Поэтому через A_1 проходят хотя бы четыре прямые, скажем l_1, l_2, l_3, l_4. Но на каждой из них, помимо точки A_1, имеется еще по крайней мере две из рассматриваемых точек. Все эти точки различны. Итого, их не менее девяти — противоречие, так как по условию всего должно быть восемь точек.

9.3. Ответ: $x = 0, y = -\sqrt{3}$ либо $x = -\sqrt{3}, y = 0.$

Рассмотрим равенство из условия как квадратное уравнение относительно x: $x^2 + (y + \sqrt{3})x + y^2 + \sqrt{3}y = 0$. Для существования решений дискриминант этого уравнения

$$D=(y+\sqrt{3})^2-4y(y+\sqrt{3})=(y+\sqrt{3})(\sqrt{3}-3y)$$

должен быть неотрицательным. Поэтому $y\geqslant-\sqrt{3}$, т.е. $y+\sqrt{3}\geqslant 0$. Из симметричности уравнения относительно x и y получаем, что и $x\geqslant-\sqrt{3}$, или $x+\sqrt{3}\geqslant 0$. Тогда имеем $0\leqslant(x+\sqrt{3})(y+\sqrt{3})=$ $=xy+\sqrt{3}(x+y)+3$, откуда и следует требуемое неравенство $x^2+y^2=$ $-xy-\sqrt{3}(x+y)\leqslant 3$.

Равенство достигается, когда $(x+\sqrt{3})(y+\sqrt{3})=0$, т.е. либо $x=-\sqrt{3}$, либо $y=-\sqrt{3}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $x=0$ соответственно.

9.4. Ответ: $(0;-1)$, $(1;-1)$, $(-2;5)$, $(-3,5)$.

Имеем

$$x^4+x^3y+2x^2+y+1=x^3+x \iff x^4+x^3(y-1)+2x^2-x+y+1=0$$
$$\iff (x^2-x+1)(x^2+xy+y+1)=0.$$

Уравнение $x^2-x+1=0$ не имеет решений. Рассмотрим уравнение $x^2+xy+y+1=0$. Имеем

$$x^2+xy+y+1=0 \iff y(x+1)=-x^2-1.$$

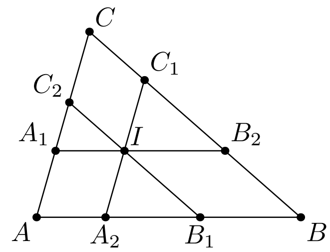
Очевидно, что $x=-1$ не является решением этого уравнения, поэтому $y=-\dfrac{x^2+1}{x+1}=-(x-1)-\dfrac{2}{x+1}$. Для того, чтобы y было целым, необходимо, чтобы целым было число $\dfrac{2}{x+1}$. Поэтому x может принимать лишь значения -3, -2, 0, 1. Соответственно y принимает значения 5, 5, -1, -1. Легко проверить, что пары $(-3,5)$, $(-2;5)$, $(0;-1)$, $(1;-1)$ действительно удовлетворяют исходному уравнению.

10 класс

(*12-летняя программа обучения*)

10(12).1. Ответ: 2.

Пусть r — радиус вписанной окружности, h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC, проведенные к сторонам BC, AC и AB соответственно. Так как $A_1B_2 \parallel AB$, то треугольники A_1CB_2 и ACB подобны, поэтому все их линейные элементы, в частности, высоты, имеют один и тот же коэффициент пропорциональности. Следовательно, $A_1B_2 : AB = (h_c - r) : h_c$. Аналогично получаем $B_1C_2 : BC = (h_a - r) : h_a$, $C_1A_2 : CA = (h_b - r) : h_b$. Следовательно, искомая сумма σ равна



$$\sigma = \frac{A_1B_2}{AB} + \frac{B_1C_2}{BC} + \frac{C_1A_2}{CA} = \frac{h_c - r}{h_c} + \frac{h_a - r}{h_a} + \frac{h_b - r}{h_b} =$$

$$= 3 - r\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}\right).$$

Заметим, что удвоенная площадь треугольника ABC равна $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, а, с другой стороны, $2S = r(a+b+c)$. Поэтому

$$\sigma = 3 - r\left(\frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}\right) = 3 - \frac{r(a+b+c)}{2S} = 3 - \frac{2S}{2S} = 2.$$

10(12).2. Ответ: $(3;2)$, $(-4;3)$ и $(5;4)$.

Представим многочлен, стоящий в правой части уравнения, в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$a^4 - 3a^2 + 4a - 3 = (a^2 + a - 3)(a^2 - a + 1).$$

Следовательно, исходное уравнение представляется в виде

$$(a^2 + a - 3)(a^2 - a + 1) = 7 \cdot 3^b. \qquad (1)$$

Очевидно, что при $b < 0$ правая часть уравнения — не целое число, левая — число целое. Поэтому отрицательные значения b не могут являться решением уравнение (1). Поскольку 7 и 3^b — взаимно простые числа при любом значении $b \geqslant 0$, то уравнение (1), учитывая, что выражение $(a^2 - a + 1)$ принимает только положительные значения при всех целых a, равносильно совокупности двух систем

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-a+1=3^x, x\geqslant 0\\ a^2+a-3=7\cdot 3^y,\ y\geqslant 0,\\ x+y=b, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a^2-a+1=7\cdot 3^m, m\geqslant 0\\ a^2+a-3=3^n,\ n\geqslant 0,\\ m+n=b. \end{array}\right.$$

Рассмотрим первое уравнение первой системы: $a^2-a+1=3^x$; для того, чтобы это уравнение имело целые решения, необходимо, чтобы его дискриминант являлся квадратом некоторого натурального числа, т.е., $D=1-4+4\cdot 3^x=4\cdot 3^x-3=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Заметим, однако, что при $x\geqslant 2$ число D делится на 3, но не делится на 9, и поэтому не может являться полным квадратом.

При $x=0$ получим $a=0$ или $a=1$. Подставляя эти значения во второе уравнение первой системы, убеждаемся, что ни при каком значении y равенство не возможно.

При $x=1$ получим $a=-1$ или $a=2$. Подставляя эти значения во второе уравнение первой системы, опять убеждаемся, что ни при каком значении y равенство не возможно. Следовательно, первая система не имеет целых решений.

Рассмотрим первое уравнение второй системы: $a^2-a+1=7\cdot 3^m$; для того, чтобы это уравнение имело целые решения, необходимо, чтобы его дискриминант являлся квадратом некоторого натурального числа, т.е., $D=1-4+4\cdot 7\cdot 3^m=28\cdot 3^m-3=p^2$, $p\in\mathbb{N}$. Заметим, что при $m\geqslant 2$ число D делится на 3, но не делится на 9, и поэтому не может являться полным квадратом.

При $m=0$ получим $a=-2$ или $a=3$. Подставляя эти значения во второе уравнение второй системы, убеждаемся, что равенство возможно в точности при $a=3$, $n=2$ и $b=m+n=2$.

При $m=1$ получим $a=-4$ или $a=5$. Подставляя эти значения во второе уравнение второй системы, находим соответствующие значения $n=2$ и $n=3$, и соответственно $b=3$ и $b=4$.

Таким образом, искомыми парами являются $(3;2)$, $(-4;3)$ и $(5;4)$.

10(12).3. Ответ: 4.

Заметим что если h_a, h_b, h_c - длины высот треугольника, а r - его радиус вписанной окружности, то верна формула:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$

которая следует из равенств $2S = ah_a = bh_b = ch_c = r(a+b+c)$, где a, b, c — соответствующие стороны треугольника. Не ограничивая общности, считаем, что $h_a < h_b < h_c$, тогда в силу неравнобедренности треугольника верно $1/h_a > 1/3r$, а также в силу неравенства треугольника верно $a < b+c$, или $1/h_a < 1/h_b + 1/h_c$, откуда $1/h_a < 1/2r$. Рассмотрим варианты значений r.

При $r = 1$ получим $1/3 < 1/h_a < 1/2$ и таких целых h_a не существует.

При $r = 2$ получим $1/6 < 1/h_a < 1/4$ и единственный вариант — $h_a = 5$. Тогда $1/h_b + 1/h_c = 3/10$ и, так как $1/h_b > 1/h_c$, то $1/h_b > 3/20 > 1/7$, откуда получаем $h_b = 6$, и $h_c = 15/2$, т.е., число нецелое.

При $r = 3$ получим $1/9 < 1/h_a < 1/6$. Возможны 2 случая: $h_a = 7$ и $h_a = 8$. В первом случае $1/h_b+1/h_c = 4/21$ и $1/h_b > 2/21 > 1/11$, значит возможные значения для h_b - это $8, 9, 10$, для них h_c равно $168/31, 63/5, 210/39$, соответственно, т.е. опять нет целых значений. Во втором случае $1/h_b + 1/h_c = 5/24$ и $1/h_b > 5/48 > 1/10$, значит $h_b = 9$, а h_c равно $216/5$. Следовательно $r = 3$ не возможно.

Пример для $r = 4$ находится из тех же соображений: $h_a = 9$, $h_b=12$, $h_c=18$. Легко проверить, что такой треугольник существует.

10(12).4. Ответ: 5.

На прямой последовательно отметим точки I_1, I_2, I_3, так чтобы $I_1I_2 = I_2I_3 = 1$. Проведем окружности O_1, O_2, O_3 с центрами в точках I_1, I_2, I_3 радиуса 3. Шесть точек их пересечения A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 и будут искомыми. Легко видеть, что эти шесть точек можно разбить на две группы по три, так, чтобы внутри каждой группы точки не лежали на одной прямой (скажем, взять три точки, лежащие по одну сторону от прямой, и три — по другую). Проведем через эти тройки точек по окружности. Всего окружностей будет 5 (см. рис.1). Возможны и другие конфигурации (см. рис. 2).

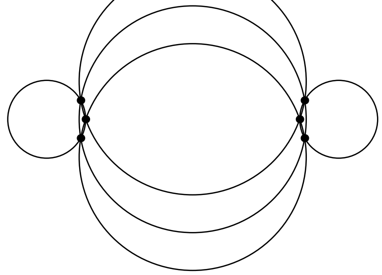


Рис. 1

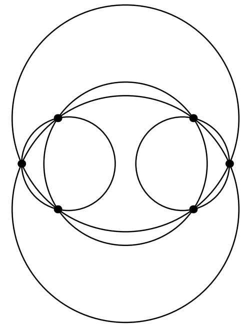


Рис. 2

Покажем, что меньше пяти окружностей быть не может. Пусть мы выбрали точки $A_1, \ldots, A_6$, и окружности $O_1, \ldots, O_4$. Обозначим через $x_i, i = 1, 2, \ldots, 6,$ количество окружностей O_j, проходящих через точку A_i, а через $y_i, i = 1, \ldots, 4,$ — количество точек A_j, находящихся на окружности O_i. Заметим, что $x_1 + \ldots + x_6 = y_1 + \ldots + y_4$. Действительно, и левая, и правая части равна количеству пар (A_i, O_j), удовлетворяющих условию $A_i \in l_j$. По условию $x_i \geqslant 3$ для всех i от 1 до 6. Поэтому $y_1 + \ldots + y_4 \geqslant 18$. Поэтому два из чисел y_i, пусть для $i = 1, 2$, не меньше 5. Поэтому пересечение окружностей O_1, O_2 содержит четыре точки, что невозможно.

Возможно и другое доказательство того факта, что четырех окружностей недостаточно. Сопоставляя точке окружности, которые через нее не проходят, замечаем, что найдется тройка окружностей, пусть O_1, O_2, O_3 и пара точек, пусть A_1, A_2, для которых $O_1 \cap O_2 \cap O_3 = \{A_1, A_2\}$. Но окружности O_1, O_2, O_3 не пересекаются в других точках, кроме A_1, A_2. Поэтому через оставшиеся четыре точки не может проходить более 2 окружностей.

10 класс

(11-летняя программа обучения)

10(11).1. Ответ: $(-2; 2)$, $(-5; 3)$ и $(4; 4)$.

Представим многочлен, стоящий в правой части уравнения, в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$x^4+4x^3+3x^2+2x-1=(x^2+3x-1)(x^2+x+1).$$

Следовательно, исходное уравнение представляется в виде

$$(x^2+3x-3)(x^2+x+1)=7\cdot 3^y. \tag{1}$$

Очевидно, что при $y<0$ правая часть уравнения — дробное число а в левая — число целое. Поэтому отрицательные значения y не могут являться решением уравнение (1). Поскольку 7 и 3^y — взаимно простые числа при любом значении $y\geqslant 0,$ то уравнение (1), учитывая, что выражение (x^2+x+1) принимает только положительные значения при всех целых $x,$ равносильно совокупности двух систем

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+x+1=3^a,\ a\geqslant 0,\\ x^2+3x-1=7\cdot 3^b,\ b\geqslant 0\\ a+b=y,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x^2+x+1=7\cdot 3^m,\ m\geqslant 0\\ x^2+3x-1=3^n,\ n\geqslant 0,\\ m+n=y.\end{array}\right.$$

Рассмотрим первое уравнение первой системы: $x^2+x+1=3^a$; для того, чтобы это уравнение имело целые решения, необходимо, чтобы его дискриминант являлся квадратом некоторого натурального числа, т.е., $D=1-4+4\cdot 3^a=4\cdot 3^a-3=k^2,$ $k\in\mathbb{N}.$ Заметим, однако, что при $a\geqslant 2$ число D делится на 3, но не делится на 9, и поэтому не может являться полным квадратом.

При $a=0$ получим $x=-1$ или $x=0.$ Подставляя эти значения во второе уравнение первой системы, убеждаемся, что ни при каком значении b равенство невозможно.

При $a=1$ получим $x=-2$ или $x=1.$ Подставляя эти значения во второе уравнение первой системы, опять убеждаемся, что ни при каком значении b равенство невозможно. Следовательно, первая система не имеет целых решений.

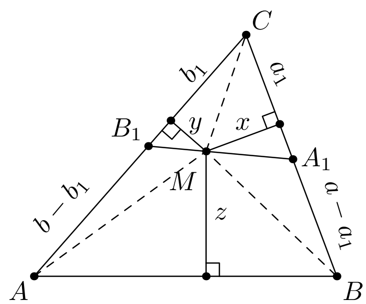
Рассмотрим первое уравнение второй системы: $x^2+x+1=7\cdot 3^m$; для того, чтобы это уравнение имело целые решения, необходимо, чтобы его дискриминант являлся квадратом некоторого натурального числа, т.е., $D=1-4+4\cdot 7\cdot 3^m=28\cdot 3^m-3=p^2,$ $p\in\mathbb{N}.$ Заметим, что при $m\geqslant 2$ число D делится на 3, но не делится на 9, и, поэтому, не может являться полным квадратом.

При $m=0$ получим $x=-3$ или $x=2$. Подставляя эти значения во второе уравнение второй системы, убеждаемся, что равенство возможно лишь при $x=2$ и $n=2$.

При $m=1$ получим $a=-5$ или $a=4$. Подставляя эти значения во второе уравнение второй системы, находим соответствующие значения $n=2$ и $n=3$, при которых уравнения превращаются в верные равенства.

Таким образом, искомыми являются пары $(-2;2)$, $(-5;3)$ и $(4;4)$.

10(11).2. Пусть $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $a_1=A_1C$, $b_1=B_1C$, S — площадь треугольника ABC.



Тогда

$$\frac{b-b_1}{b_1}=\frac{\lambda c}{a},\quad \frac{a-a_1}{a_1}=\frac{\lambda c}{b},\quad \Longrightarrow$$

$$b_1=\frac{ab}{a+\lambda c},\quad a_1=\frac{ab}{b+\lambda c}.$$

Имеем

$$S(A_1B_1C)=S(B_1CM)+S(A_1CM)=0.5b_1y+0.5a_1x=0.5(b_1y+a_1x),$$

$$S(A_1B_1C)=0.5CB_1\cdot CA_1\sin C=0.5b_1a_1\frac{2S}{ab}=\frac{a_1b_1S}{ab},$$

и

$$S=S(BMC)+S(AMC)+S(AMB)=0.5(ax+by+cz).$$

Поэтому

$$0.5(b_1y+a_1x)=\frac{a_1b_1}{ab}\cdot 0.5(ax+by+cz)\iff \frac{b_1y+a_1x}{a_1b_1}=\frac{ax+by+cz}{ab}$$

$$\iff \frac{y}{a_1}+\frac{x}{b_1}=\frac{ax+by+cz}{ab}\iff \frac{(b+\lambda c)y}{ab}+\frac{(a+\lambda c)x}{ab}=\frac{ax+by+cz}{ab}$$

$$\iff \lambda cy+\lambda cx=cz\iff \lambda(x+y)=z,$$

что и требовалось доказать.

Другой способ доказательства основан на следующем факте, если точка M принадлежит отрезку PQ, то

$$M = \alpha P + (1-\alpha)Q, \qquad (*)$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Это равенство можно понимать, например, как равенство для векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, или как соответствующие равенства для координат точек M, P, Q в некотором фиксированном базисе. В любом случае из равенства $(*)$ следует, что $h(M) = \alpha h(P) + (1-\alpha)h(Q)$, где $h(M)$, $h(P)$, $h(Q)$ – расстояния от точек M, P, Q до некоторой (произвольной) оси. Поэтому, если требуемое в условие задачи равенство выполнено для концов отрезка A_1B_1 (а это легко проверяется), то оно выполнено и для любой его точки.

10(11).3. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ –корни многочлена $P(x)$ ($x_k \in [-1; 1]$, $k = 1, 2, 3, 4$). Тогда, так как по условию старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 1, то $P(x) = (x-x_1)\times\times(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Поскольку старший коэффициент многочлена положителен, то $P(x) \geqslant 0$ вне интервалов $(x_1; x_2)$ и $(x_3; x_4)$. Поэтому требуемое неравенство нуждается в доказательстве только в случаях: 1) $x \in (x_1; x_2)$ и 2) $x \in (x_3; x_4)$.

а) В случае 1), перемножая очевидные неравенства

$$0 \leqslant (x-x_1)(x_2-x) \leqslant \frac{(x_1-x_2)^2}{4} < 1$$

и

$$0 \leqslant (x-x_3)(x-x_4) = (x_3-x)(x_4-x) < 2\cdot 2 = 4,$$

получаем: $-P(x) < 4$, т. е. $P(x) > -4$. Случай 2) разбирается аналогично.

б) В случае 1) имеем неравенство

$$|P(x)| = |x-x_1|\cdot(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) < (x+1)(1-x)^3 \qquad (1)$$

(неравенства строгие, так как все корни различны, а значит, $x - x_2 < < 1 - x$).

Найдём наибольшее значение многочлена $f(x) = (x+1)(1-x)^3$.

Имеем:
$$f'(x) = (1-x)^3 - 3(x+1)(1-x)^2 = -2(1-x)^2(2x+1).$$
Значит, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1/2)$ и $f'(x) \leqslant 0$ при $x \in (-1/2; +\infty)$. Поэтому $x = -1/2$ — точка, в которой многочлен $f(x)$ принимает наибольшее значение. Значит, в случае 1) получаем:
$$|P(x)| < \left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{27}{8} = \frac{27}{16}\,.$$

В случае 2) аналогично получаем:
$$|P(x)| = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot|x-x_4| < (x+1)^3(1-x). \qquad (2)$$
Найдём наибольшее значение многочлена $g(x) = (x+1)^3(1-x)$. Имеем:
$$g'(x) = 3(x+1)^2(1-x) - (x+1)^3 = -2(x+1)^2(2x-1).$$
Аналогично, $x = 1/2$ — точка, в которой многочлен $g(x)$ принимает наибольшее значение. Поэтому и в случае 2) получаем ту же оценку:
$$|P(x)| < \left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{27}{16}\,.$$

Следовательно,
$$P(x) > -\frac{27}{8}\,. \qquad (3)$$

Докажем, что постоянную $-27/8$ в оценке (3) улучшить нельзя, т. е., иными словами, докажем, что какую бы (отрицательную) постоянную $c > -27/16$ ни взять, найдётся такой многочлен 4-й степени $P(x)$, все корни которого различны и принадлежат отрезку $[-1;1]$, что $P(x) \leqslant c$ хотя бы при одном значении x. Ясно, что это будет в случае, если оценка (1) или оценка (2) для этого многочлена $P(x)$ будет „почти точной“, т. е. соответственно, многочлен $P(x)$ имеет либо один корень, близкий к -1, а три других — близких к 1, либо один корень, близкий к 1, а три других — близких к -1. Приведём аккуратные рассуждения.

Зафиксируем отрицательное $c > -\dfrac{27}{16}$ и обозначим $\delta = \dfrac{1}{7}\left(c + \dfrac{27}{16}\right)$.

Рассмотрим многочлен $P(x) = (x+1)(x-1)\big(x-(1-2\delta)\big)\big(x-(1-\delta)\big)$ (его корни $-1,\ 1,\ 1-2\delta,\ 1-\delta$). Оценим сверху величину $|P(x)+f(x)|$ при $x \in [-1;\,1]$. Имеем:

$$|P(x) + f(x)| = (x+1)(1-x)\delta|-3x+3-2\delta|. \qquad (4)$$

Так как функция $-3x+3-2\delta$ — линейная, то своё наибольшее по абсолютной величине значение на отрезке $[-1;\,1]$ она принимает на концах этого отрезка, а значит, оно равно наибольшему из чисел 2δ и $6-2\delta$, т. е. числу $6-2\delta$, поскольку $6-2\delta > 2\delta$ в силу выбора δ. Далее, многочлен $(x+1)(1-x) \leqslant 1$ при $x \in [-1;\,1]$. Поэтому, заменяя в неравенстве (4) $(x+1)(x-1)$ на 1, а $|-3x+3-2\delta|$ на большую величину 6, получим: $|P(x)+f(x)| < 6\delta$. В частности, $P(x) \leqslant -f(x)+6\delta$. Если при всех $x \in [-1;\,1]$ выполнялось неравенство $P(x) \geqslant c$, то, значит, при всех $x \in [-1;\,1]$ выполнялось бы и неравенство $-f(x)+6\delta \geqslant c$. Тогда, положив в последнем неравенстве $x = -\dfrac{1}{2}$, получили бы неравенство $-\dfrac{27}{16}+6\delta > > c$, или $6\delta > c+\dfrac{27}{16}$. Но это неравенство неверно, поскольку $c+\dfrac{27}{16} = 7\delta$ в силу выбора δ. Полученное противоречие доказывает неулучшаемость постоянной в оценке (3).

10(11).4. Ответ: 6.

Пример: Рассмотрим треугольник, середины сторон в нем, и точку пересечения медиан. Прямыми будут стороны и медианы.

Покажем, что семи прямых быть не может. Пусть выбраны точки $A_1,\ldots,A_7$, и прямые $l_1,\ldots,l_7$. Обозначим через $x_i, i = 1,2,\ldots,7$ количество прямых l_j, проходящих через точку A_i, а через $y_i, i = 1,2,\ldots,7$, — количество точек A_j, находящихся на прямой l_i. Заметим, что $x_1+\ldots+x_7 = y_1+\ldots+y_7$. Действительно, и левая, и правая части равна количеству пар (A_i, l_j), удовлетворяющих условию $A_i \in l_j$. По условию $y_i \geqslant 3$ для всех i от 1 до 9. Поэтому $x_1+\ldots+x_7 \geqslant 21$. С другой стороны, $x_i \leqslant 3$. Действительно, каждая прямая, проходящая через A_i содержит еще две другие точки. Поэтому всего точек не менее $1+2x_i$, откуда $x_i \leqslant 3$. Отсюда получаем, что все x_i, y_i равны 3.

Фиксируем одну из точек, пусть O. Пусть пары точек (A_1, A_2), $(B_1, B_2), (C_1, C_2)$ лежат на трех прямых, проходящих через точку O. Не нарушая общности, можем считать, что $B_1 = A_1C_1 \cap A_2C_2, B_2 = A_1C_2 \cap A_2C_1$. Надо показать, что точки $O = A_1A_2 \cap C_1C_2, B_1, B_2$ не лежат на одной прямой. Рассмотрим два случая:

а) Точки A_1, A_2, C_1, C_2 являются вершинами выпуклого четырехугольника. Теперь заметим, что неупорядоченная тройка точек O, B_1, B_2 не меняется при переименовании точек A_1, A_2, C_1, C_2. Поэтому можем считать, что точки идут в следующем порядке: A_1, C_1, A_2, C_2. В этом случае точка O лежит внутри четырехугольника. Несложно видеть, что прямая OB_1 пересекает стороны A_1C_2, A_2C_1, а прямая OB_2 – стороны A_1C_1, A_2C_2. Однако прямая может пересекать выпуклый четырехугольник только по двум сторонам.

б) Одна из точек A_1, C_1, A_2, C_2, скажем, A_1, лежит внутри треугольника с вершинами в оставшихся точках. Тогда точки O, B_1, B_2 лежат на сторонах треугольника, и, стало быть, не могут лежать на одной прямой.

11 класс

11.1. Из исходных равенств получаем

$$x^2 - y^2 = z - y,\ y^2 - z^2 = x - z,\ z^2 - x^2 = y - x.$$

Тогда

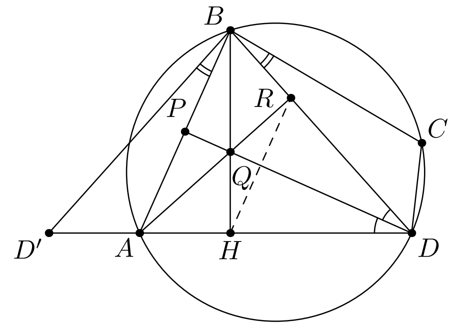
$$x^3 - xy^2 + y^3 - yz^2 + z^3 - zx^2 = x(x^2 - y^2) + y(y^2 - z^2) + z(z^2 - x^2) =$$
$$= x(z - y) + y(x - z) + z(y - x) = 0,$$

откуда и следует требуемое равенство.

11.2. Ответ: 90°.

Повернем треугольник DBC вокруг точки B так, чтобы сторона

BC совпала со стороной BA. При этом точка D перейдет в точку D', причем точки D', A, D будут лежать на одной прямой, поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный и, следовательно, $180^\circ = \angle BCD + \angle DAB = \angle BAD' + \angle DAB$. Пусть H — точка пересечения прямой BQ со стороной AD. Так как $\angle D'BA = \angle DBC$, то



$$\angle D'BQ = \angle D'BA + \angle ABQ = \angle DBC + \angle ABQ = \angle QBD.$$

Следовательно, прямая BH — биссектриса угла $D'BD$ в равнобедренном треугольнике $D'BD$, а, значит, BH — высота и медиана этого треугольника. Из условия следует, что $AD = 3DC = 3D'A$, поэтому $D'H = 0,5D'D = 2D'A$, откуда $AH/AD = 1/3.(*)$ Поскольку точки R, Q, A лежат на одной прямой, то по теореме Менелая, примененной к прямой RA и треугольнику BDH, имеем

$$1 = \frac{DR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QH} \cdot \frac{HA}{AD} \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2 \cdot \frac{BQ}{QH} \cdot \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BQ}{QH} = \frac{3}{2}.$$

Так как DQ — биссектриса угла BDH, то $3 : 2 = BQ : QH = BD : DH$, откуда $BD = 1,5DH = 1,5 \cdot 2AH = 3AH = AD$, т.е. треугольник BDA равнобедренный ($BD = DA$). Таким образом, его биссектриса DP является также и высотой, т.е. $\angle APD = 90^\circ$.

Замечание. После того, как установлено отношение $(*)$, т.е. $AH : AD = 1 : 3$, дальнейшее рассуждение можно проводить следующим образом. Из условия следует, что $BR : BD = 1 : 3$, поэтому $HR \parallel AB$. Следовательно, $ABRH$ — трапеция, для которой точка D — точка пересечения продолжений боковых сторон, а точка Q — точка пересечения диагоналей. Но тогда прямая DP делит основания трапеции пополам. Таким образом, DP — медиана и биссектриса, а, следовательно, и высота в треугольнике ABD, откуда $\angle APD = 90^\circ$.

11.3. а) Например, при $k = 31$ будут верны равенства $31^2 + 12^2 = 32^2 + 9^2 = 33^2 + 4^2$. Заметим, что данное значение k является минимальным.

б) Равенства

$$(4x^3-1)^2+(2x^2+2x)^2 = (4x^3)^2+(2x^2+1)^2 = (4x^3+1)^2+(2x^2-2x)^2 \qquad (*)$$

показывают, что, придавая x любые натуральные значения, большие 1, и полагая $k = 4x^3 - 1$, можно получить бесконечно много решений. Покажем, как можно получить эту серию решений.

Равенства

$$a^2 + k^2 = b^2 + (k+1)^2 = c^2 + (k+2)^2 \qquad (1)$$

равносильны системе

$$a^2 - b^2 = 2k + 1 \quad \text{и} \quad b^2 - c^2 = 2k + 3. \qquad (2)$$

Из (2) легко видеть, что $c < b < a$. В частности, можно положить $b = c + n$ и $a = b + m = c + n + m$, где m, n — натуральные числа. С учетом этих равенств формулы (2) принимают вид

$$\begin{cases} 2cn + n^2 = 2k + 3, \\ 2cm + 2nm + m^2 = 2k + 1, \end{cases} \qquad (3)$$

и тогда вопрос задачи равносилен следующему: существуют ли такие натуральные c, n и m, чтобы при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнялись равенства (3) или, что то же самое,

$$2cn + n^2 - (2cm + 2nm + m^2) = 2 \qquad (4)$$

при некоторых натуральных c, n и m. Из (3) легко видеть, что, во-первых, $n > m$ и, во-вторых, n и m нечетны. Теперь, найдя c из равенства (4), получим, что разрешимость уравнения (4) в нечётных n и m и натуральном c равносильна существованию таких нечётных n и m, при которых будет натуральным число

$$c = \frac{1 + nm}{n - m} - \frac{n + m}{2}\,. \qquad (7)$$

Ясно, что таких нечётных n и m бесконечно много: например, $n = m + 2$, где m — любое нечётное число, большее 1. Действительно, при таких n и m получаем:

$$c = \frac{1+(m+2)m}{2} - \frac{2m+2}{2} = \frac{m^2-1}{2} \in \mathbb{N}.$$

Итак, доказано, что существует бесконечно много натуральных чисел a, b, c и k, удовлетворяющих равенствам (1).

Хотя для решения задачи это не является необходимым, продолжим в случае $n = m+2$ вычисления и найдём в явном виде a, b, c и k. Из второго уравнения в (3) получаем:

$$k = \frac{m^3+3m^2+3m-1}{2}.$$

Далее,

$$c = \frac{m^2-1}{2}, \quad b = c+n = c+m+2 = \frac{m^2+2m+3}{2}$$

и

$$a = c+n+m = b+m = \frac{m^2+4m+3}{2}.$$

Поэтому в этом случае равенства (1) принимают вид:

$$\left(\frac{m^2+4m+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^3+3m^2+3m-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+2m+3}{2}\right)^2 +$$
$$+\left(\frac{m^3+3m^2+3m+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^3+3m^2+3m+3}{2}\right)^2, \tag{6}$$

где m — любое нечётное число, большее 1. В частности, при $m = 3$ получаем

$$12^2+31^2 = 9^2+32^2 = 4^2+33^2.$$

Если обозначить $m = 2x-1$, то равенства (6) получат более простой вид $(*)$.

Хотя для решения задачи это не нужно, опишем все возможные значения k. Поскольку разность $n-m$ чётна (n и m — нечётные), обозначим её через $2q$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда $n = m+2q$. Подставляя это выражение для n в равенство (5), получим

$$c=\frac{1+(m+2q)m}{2q}-\frac{2m+2q}{2}=\frac{1+m^2}{2q}-q.$$

Следовательно, $2q$ — чётный делитель числа $1+m^2$, а поскольку должно выполняться неравенство $\dfrac{1+m^2}{2q}-q>0$, то $q<\sqrt{\dfrac{1+m^2}{2}}$ (в частности, отсюда следует, что $m \geqslant 3$). Легко видеть, что, обратно, при выполнении этих условий число c будет натуральным. Поэтому из второго уравнения в (3) находим, что все возможные значения k даются формулой:

$$k=\frac{(1+m^2)m}{2q}+m^2+mq+\frac{m^2-1}{2}\,, \tag{7}$$

где m — любое нечётное число, большее 1, а q — делитель числа $\dfrac{1+m^2}{2}$, меньший $\sqrt{\dfrac{1+m^2}{2}}$. Для наглядности составим таблицу, в которой по формуле (7) вычислены значения k, соответствующие $m = 3, \ldots, 25$.

m	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$1+m^2$	10	26	50	82	122	170	226	290	362	442	530	626
q	1	1	1	1	1	1 и 5	1	1 и 5	1	1 и 13	1 и 5	1
k	31	107	255	499	863	1371 539	2047	2915 1011	3999	5323 1291	6911 2127	8787

В качестве применения этих вычислений рассмотрим равенства (1), отвечающие наиболее интересному случаю, когда делитель q принимает, кроме значения 1, и другие значения (поскольку случай $q=1$ отвечает соотношению $n=m+2$, для которого равенства (1) задаются формулами (6)). Рассмотрим, например, соответствующие равенства для значения $m=23$ (в этом случае q принимает значения 1 и 5 — см. таблицу), причём, вычисления проведём также и для случая $q=1$. Так как $n=m+2q$, то $n=23+2=25$, если $q=1$, и $n=23+10=33$, если $q=5$. Поскольку $c=\dfrac{1+m^2}{2q}-q$, то

$c = 264$, если $q = 1$, и $c = 48$, если $q = 5$. Значит, соответственно: если $q = 1$, то $c = 264$, $b = c + n = 264 + 25 = 289$, $a = b + m = 289 + 23 = 312$, а если $q = 5$, то $c = 48$, $b = c + n = 48 + 33 = 81$, $a = b + m = 81 + 23 = 104$. Поэтому имеют место равенства (см. в таблице при $m = 23$ значения k, соответствующие $q = 1$ и $q = 5$): $312^2 + 6911^2 = 289^2 + 6912^2 = 264^2 + 6913^2$ (эти равенства — не что иное, как равенства, получающиеся по формуле (6) при $m = 23$) и $104^2 + 2127^2 = 81^2 + 2128^2 = 48^2 + 2129^2$.

в) Из равенств $k^2 + a^2 = (k+1)^2 + b^2 = (k+2)^2 + c^2$ получаем, в частности, $2k + 1 = a^2 - b^2$, и $2k + 3 = b^2 - c^2$. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$a^2 + c^2 = 2(b^2 - 1). \qquad (**)$$

Из последнего равенства заключаем, что числа a и c имеют одинаковую четность.

Предположим, что a и c нечетные, т.е. $a = 2a_1 + 1$, $c = 2c_1 + 1$. Тогда $(*)$ примет вид $2(a_1^2 + a_1) + 2(c_1^2 + c_1) + 1 = b^2 - 1$, откуда b четно, $b = 2b_1$. Тогда $(a_1^2 + a_1) + (c_1^2 + c_1) = 2b_1^2 - 1$, что невозможно, так как в левой части оба слагаемые четны, а правая часть равенства нечетна.

Поэтому в равенстве $(**)$ a и c четные, а тогда b нечетное. Пусть $a = 2a_1$, $c = 2c_1$, $b = 2b_1 + 1$. Тогда $(**)$ перепишется в виде $a_1^2 + c_1^2 = 2b_1(b_1 + 1)$. Правая часть этого равенства делится на 4, поэтому a_1 и c_1 — четные числа. Подытоживая, заключаем, что оба числа a и c в равенстве $(**)$ делятся на 4 (а число b нечетное). Поэтому произведение abc делится на 16.

Заметим далее, что квадрат целого числа при делении на 3 дает в остатке 0 или 1 в зависимости от того, делится оно на 3 или нет. Переписав $(**)$ в виде $a^2+b^2+c^2+2 = 3b^2$ легко видеть, что для того чтобы левая часть этого равенства делилась на 3, необходимо и достаточно, чтобы ровно два из чисел a, b, c делились на 3, а ровно одно — нет. Поэтому произведение abc делится на 9. Так как 9 и 16 взаимно просты, то произведение abc делится на $16 \cdot 9 = 144$, что и требовалось доказать.

г) Допустим, что имеют места равенства

$$k^2 + a^2 = (k+1)^2 + b^2 = (k+2)^2 + c^2 = (k+3)^2 + d^2.$$

Применяя рассуждения предыдущего пункта к первым двум из этих равенств, получим, что a, c делятся на 4, а b нечетное. Применяя эти же рассуждения к последним двум из этих равенств, получим, что b, d делятся на 4, а c нечетное. Противоречие.

11.4. Ответ : 6.

Пример: Возьмем две скрещивающиеся прямые, на каждой выберем по три точки. Шесть плоскостей выберем так: каждая содержит одну из прямых и одну из точек на другой прямой.

Покажем, что семь плоскостей выбрать уже нельзя. Предположим противное.

Покажем, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Пусть это не так: точки a, b, c лежат на прямой l. Оставшиеся точки d, e, f не могут лежать на l. Не более трех плоскостей содержат все точки d, e, f. Поэтому хотя бы четыре плоскости содержат две точки из a, b, c, и, стало быть, и всю прямую l. Одна из этих плоскостей не содержит ни d, ни e, ни f.

Покажем, что никакие пять из выбранных точек не лежат на одной плоскости. От противного, пусть точки a, b, c, d, e лежат в одной плоскости, пусть P, а f - нет. Поскольку никакие три точки не лежат на одной прямой, то любая плоскость, содержащая f, содержит не более двух из точек a, b, c, d, e. Противоречие.

Итак, никакие три точки из a, b, c, d, e, f не лежат на одной прямой, и никакие пять не лежат в одной плоскости. Каждой из семи выбранных плоскостей сопоставим пару точек, которые на ней не лежат. Отметим, что никакие две пары не содержат общих элементов. Действительно, пусть встретились пары $(a, b), (a, c)$. Тогда соответствующие плоскости содержат d, e, f. Но d, e, f не лежат на одной прямой, и их может содержать только одна плоскость. Таким образом, выбранные пары не пересекаются. Но их 7, что невозможно.