Министерство образования Республики Беларусь

« LVII »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Барановичи 2007

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 57-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Базылев Д. Ф. (9.8, 10.7, 11.7)
Близнец И.А. (9.5)
Воронович И.И. (8.6, 8.8, 9*.6, 9*.8, 9.6, 10.5, 10.7, 10.8, 11.5, 11.6, 11.8)
Змейков Д.Ю. (9*.7)
Каскевич В.И. (8.7)
Мазаник С.А. (10.5, 10.6, 11.5)
Миротин А.Р. (8.5, 9.7)
Сморщок М.Н. (9*.5)
Ядренцев А.М. (10.6)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: С.А.Архипов, Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник, Р.Д.Максимов.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. В клетки квадратной таблицы 3×3 вписаны числа $1,\ 2,\ 3, \ldots ,\ 9$ (каждое число используется ровно один раз). Оказалось, что четыре суммы, составленные из чисел второй строки, второго столбца и каждой из двух диагоналей, равны одному и тому же числу.

Найдите все значения, которые может принимать это число.

8.6. Имеются 100 карточек, на которых записаны числа от 1 до 100. Карточки нужно разложить по ящикам так, чтобы ни в каком ящике не нашлось двух карточек, разность чисел на которых равна 2, 3 или 6.

Какое наименьшее число ящиков для этого понадобится?

8.7. Рассмотрим все различные девятизначные числа, в которых каждая из цифр 1, 2, ..., 9 встречается ровно 1 раз. Пусть S – сумма всех этих чисел.

Докажите, что S делится на 3^6, но не делится на 3^7.

8.8. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$; на стороне AB отмечена точка F так, что середина отрезка CF лежит на BD.

Докажите, что $BF = CD$.

9 класс
(12-летняя программа обучения)

9*.5. Квадратная таблица $n \times n$ разбита на n^2 единичных квадратиков линиями, параллельными ее сторонам. Некоторые из единичных квадратиков покрашены. Известно, что один из угловых квадратиков таблицы покрашен и в каждом квадрате 2×2 этой таблицы покрашены ровно два квадратика.

Докажите, что не менее двух угловых квадратиков таблицы покрашены.

9*.6. Имеются 100 карточек, на которых записаны числа от 1 до 100. Карточки нужно разложить по ящикам так, чтобы ни в каком ящике не нашлось двух карточек, разность чисел на которых равна 2, 3 или 5.

Какое наименьшее число ящиков для этого понадобится?

9*.7. Пусть n — натуральное число, последняя цифра в десятичной записи которого равна 1.

Докажите, что существует число, делящееся на n, последние три цифры десятичной записи которого имеют вид 001.

9*.8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Внутри угла ACB взята некоторая точка X .

а) Докажите, что $XA + XB \geqslant \sqrt{2}XC$.

б) Найдите геометрическое место точек X внутри угла ACB, для которых $XA + XB = \sqrt{2}XC$.

9 класс
(11-летняя программа обучения)

9.5. Найдите все тройки простых натуральных чисел p_1, p_2, p_3, такие, что

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 + 7p_3 = 1826, \\ 3p_1 + 5p_2 + 7p_3 = 2007. \end{cases}$$

9.6. Точка O — точка пересечения диагоналей AC и BD дельтоида $ABCD$ ($AB = BC$, $CD = DA$). Точки N и K являются основаниями высот, проведенных из вершин D и B в треугольниках ABD и BCD соответственно.

Докажите, что точки N, O, K лежат на одной прямой.

9.7. Равносторонний треугольник прямыми, параллельными его сторонам, разбит на n^2 ($n > 2$) меньших равносторонних треугольников.

Можно ли в эти n^2 равносторонних треугольников вписать натуральные числа от 1 до n^2 (в каждый треугольник — одно число, и все числа должны быть использованы) так, чтобы одновременно выполнялись два следующих условия:

1) треугольники с числами i и $i+1$ имеют хотя бы одну общую точку при всех $i = 1, 2, \ldots, n^2-1$;

2) треугольники с числами i и $i+2$ имеют хотя бы одну общую точку при всех $i = 1, 2, \ldots, n^2-2$?

9.8. По кругу расположено 2007 целых чисел, обладающих следующим свойством. Среди любых пяти подряд идущих чисел сумма некоторых трех из этих чисел равна удвоенной сумме остальных двух.

Докажите, что все эти 2007 чисел равны 0.

10 класс

10.5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ACB = \angle ADB$, $AB = AD$. Пусть N и K — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на прямые CB и DB.

Докажите, что прямая NK перпендикулярна прямой AC.

10.6. Найдите все такие натуральные числа, которые делят сумму некоторых четырех своих различных натуральных делителей.

10.7. Действительные числа a, b, c, d удовлетворяют неравенству $abcd > a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Докажите, что $abcd > a + b + c + d + 8$.

10.8. Пусть $(m; n)$ – пара натуральных чисел, $m < n$.

а) Докажите, что множество натуральных чисел всегда можно разбить на три непересекающихся подмножества так, чтобы ни в одном из этих подмножеств не нашлось двух чисел, модуль разности которых равен m или n.

б) Найдите все пары $(m; n)$, при которых множество натуральных чисел нельзя разбить на два непересекающихся подмножества с соблюдением указанного условия.

11 класс

11.5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем $AO = CO$. На отрезках AO и CO отмечены точки P и Q соответственно так, что $PO = OQ$. Точки N и K являются точками пересечения сторон AB и CD с прямыми DP и BQ соответственно.

Докажите, что точки N, O, K лежат на одной прямой.

11.6. Число a равно сумме, а число b – произведению действительных корней уравнения $x^4 - x^3 - 1 = 0$.

Докажите, что $b < -11/10$, $a > 6/11$.

11.7. Найдите все натуральные числа n и m, удовлетворяющие равенству $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

11.8. Пусть $(m; n)$ – пара натуральных чисел, $m < n$.

а) Докажите, что множество натуральных чисел всегда можно разбить на четыре непересекающихся подмножества так, чтобы ни в одном из этих подмножеств не нашлось двух чисел, модуль разности которых равен m, n или $m + n$.

б) Найдите все пары $(m; n)$, при которых множество натуральных чисел нельзя разбить на три непересекающихся подмножества с соблюдением указанного условия.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5 Ответ: 12, 15, 18.

Обозначим числа таблицы через a_1, a_2, …, a_9 (см. рис. 1), а искомое число — через x. Тогда условие задачи перепишется в виде следующей системы уравнений

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Рис. 1

$$\begin{cases} a_4 + a_5 + a_6 = x, \\ a_2 + a_5 + a_8 = x, \\ a_1 + a_5 + a_9 = x, \\ a_3 + a_5 + a_7 = x. \end{cases}$$

Почленно складывая эти четыре уравнения и учитывая, что сумма всех чисел таблицы равна 45:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45,$$

получим $45 + 3a_5 = 4x$, или, равносильно, $a_5 - 5 = 4(10 + a_5 - x)$. Так как правая часть последнего равенства делится на 4, то на 4 делится и его левая часть $a_5 - 5$. Но последнее возможно только, если a_5 принимает значения 1, 5 или 9. Тогда соответствующие значения $x = (45 + 3a_5)/4$ — это 12, 15 или 18. Примеры таблиц на рис. 2 – 4 показывают, что реализуются все три возможности.

2	5	7
3	1	8
4	6	9

Рис. 1

8	3	2
4	9	5
7	6	1

Рис. 2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 3

8.6. Ответ: 3 ящика.

Покажем, как можно разложить карточки с числами в 3 ящика (обозначим ящики буквами A, B, C):

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14\ldots \\ \multicolumn{9}{c}{\underbrace{A\quad A\quad B\quad C\quad C\quad A\quad B\quad B\quad C}} & A & A & B & C & C\ldots \end{array}$$

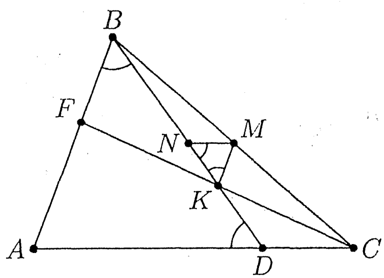
(Здесь под каждым числом указан ящик, в который помещается карточка с этим числом). Видим, что последовательность ящиков, в которые кладутся карточки с последовательными числами, повторяется через 9. Иными словами, в ящик A кладутся карточки с числами вида $9k+1$, $9k+2$, $9k+6$, в ящик B — с числами вида $9k+3$, $9k+7$, $9k+8$, в ящик C — $9k+4$, $9k+5$, $9k+9$. Легко видеть, что разность чисел на карточках из одного ящика при делении на 9 дает в остатке либо 1, либо 4, либо 5, либо 8, т.е. не может равняться 2, 3, или 6,

Осталось доказать, что двумя ящиками обойтись не удастся. Действительно, карточки с номерами 1 и 4 должны быть в разных ящиках, так как $4-1=3$. Далее, карточка с числом 7 не должна лежать ни в одном из этих двух ящиков, так как $7-1=6$ и $7-4=3$. Следовательно ящиков понадобится не менее трех.

8.7. Количество всех девятизначных чисел, о которых говорится в условии задачи, равно числу перестановок из 9 элементов, т. е. равно $9! = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$. Рассмотрим какой-нибудь один разряд у всех этих чисел, например, разряд единиц (т. е. последние цифры всех чисел). Общее количество цифр у всех чисел в данном разряде равно $9!$. При этом ясно, что все цифры в данном разряде встречаются одинаковое количество раз, т. е. каждая из цифр 1, 2, ..., 9 встречается по $9!:9=8!$ раз. Поэтому сумма всех цифр в данном разряде (и, следовательно, в каждом разряде) равна $(1+2+\ldots+9)\cdot8! = 45\cdot8! = 5\cdot9!$. Поэтому сумма всех этих девятизначных чисел $S = 5\cdot9! + 10\cdot5\cdot9! + +10^2\cdot5\cdot9! + \ldots + 10^8\cdot5\cdot9! = 111\,111\,111\cdot5\cdot9!$. Раскладывая число $9!$ на простые множители, получим $9! = 2^7\cdot3^4\cdot5\cdot7$, т. е. $9!$ делится на 3^4, но не делится на большую степень числа 3. Наконец, видим, что сумма цифр числа 111 111 111 равна 9 и, значит, это число делится на 9. Разделив его на $9 = 3^2$ получим частное 12345679, которое по соответствующему признаку на 3 не делится. Таким образом, S делится делится на 3^6, но не делится на 3^7, что и требовалось доказать.

Замечание. Число S нетрудно вычислить: оно равно 201 599 999 798 400.

8.8. Так как по условию $AD = AB$, то из равнобедренного треугольника DAB находим, что $\angle ADB = \angle ABD$. Пусть K – середина FC, принадлежащая по условию BD. Отметим также точки M и N – середины BC и BD соответственно. Тогда NM, MK – средние линии треугольников DBC и BFC соответственно. Поэтому $NM \parallel AC$, так что



$\angle MNK = \angle ADB$, и $MK \parallel AB$, так что $\angle MKN = \angle ABD$. В результате получаем равенство углов $\angle MNK = \angle MKN$, откуда следует, что треугольник NMK равнобедренный и $NM = MK$. Но $NM = 0,5CD$ и $MK = 0,5BF$, как средние линии. Стало быть $CD = BF$, что и требовалось.

9 класс

(12-летняя программа обучения)

9*.5. Клетки, находящиеся в углах, на границе, внутри таблицы назовем *угловыми*,*граничными*, *внутренними* соответственно. Впишем в каждую клетку числа 1 или 0 в зависимости от того, покрашена эта клетка или нет. При этом каждое число в клетке будем повторять столько раз, каково количество квадратов 2×2, в которые входит данная клетка. Пусть S – сумма всех чисел, вписанных в клетки таблицы. Так как в каждом квадрате 2×2 ровно две клетки покрашены, то число S будет четным. С другой стороны, каждая граничная клетка входит в два квадрата 2×2, каждая внутренняя клетка входит в четыре квадрата 2×2, а каждая угловая клетка входит только в один квадрат 2×2. Поэтому сумма чисел в граничных и внутренних клетках будет четной, а, значит, и сумма чисел в угловых клетках, равная количеству покрашенных угловых клеток, так же будет четной. Поскольку количество покрашенных угловых клеток отлично от нуля по условию, то оно будет равно или 2, или 4, что и требовалось доказать.

9*.6. По четырем ящикам (обозначим их A, B, C, D) карточки разложить легко, например, $A = \{1, 2, 9, 10, ...\}$, $B = \{3, 4, 11, 12, ...\}$, $C = \{5, 6, 13, 14, ...\}$, $D = \{7, 8, 15, 16, ...\}$. Легко видеть, что разность чисел на карточках в одном ящике не может быть равна 2, 3, 5.

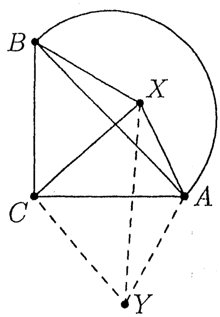
Покажем, что 3 ящика не достаточно. Допустим противное. Для удобства карточку с числом n будем просто называть числом n; запись $n \in F$ будет обозначать, что число n находится в ящике F. Возьме любое число n, $3 \leqslant n \leqslant 97$. Рассмотрим числа $n-2$, n, $n+3$. Так как $n-(n-2) = 2$, $(n+3)-n = 3$, и $(n+3)-(n-2) = 5$, то числа $n-2$, n, $n+3$ должны лежать в разных ящиках. Пусть, например, $(n-2) \in A$, $n \in B$, $(n+3) \in C$. Рассмотрим число $n+1$. Так как $(n+1)-(n-2) = 3$ и $(n-2) \in A$, то $(n+1) \notin A$. Так как $(n+3)-(n+1) = 2$ и $(n+3) \in C$, то $(n+1) \notin C$. Поэтому $(n+1) \in B$. Следовательно, если $3 \leqslant n \leqslant 97$, то число n и следующее за ним число $(n+1)$ лежат в одном и том же ящике. Тогда все числа $3, 4, ..., 97$ должны быть в одном ящике, и разности между ними могут быть равны и 2, и 3, и 5 —противоречие.

9*.7. Рассмотрим 1000 чисел: $n-1$, $2n-1, ..., 1000n-1$. Предположим, что все эти числа не кратны 1000. Тогда из принципа Дирихле следует, что среди них существуют два, имеющие одинаковые остатки при делении на 1000. Пусть, например, это числа $kn-1$ и $mn-1$, $k > m$. Но тогда их разность $(k-m)n$ делится на 1000. Так как n взаимно просто с 1000, то число $k-m$ должно делится на 1000, что невозможно, поскольку $0 < k-m < 1000$, — противоречие.

Итак среди рассматриваемых чисел есть число, делящееся на 1000. Пусть, например, это число $kn-1$, тогда, очевидно, что оно заканчивается тремя нулями, и, значит, последние три цифры в десятичной записи числа kn имеют вид 001, что и требовалось доказать.

9*.8. Ответ: б) полуокружность, построенная на гипотенузе AB как на диаметре во внешнюю сторону.

а) Повернем треугольник CXB вокруг точки C на $90°$ так, чтобы, отрезок CB перешел в отрезок CA. При этом отрезок CX перейдет в отрезок CY такой, что $CY = CX$, $\angle YCX = 90°$, поэтому треугольник YCX – прямоугольный равнобедренный, так что $YX = CX\sqrt{2}$. По неравенству треугольника для точек X, Y, A имеем $XA + YA \geqslant YX$. Учитывая, что $YA = XB$ из равных треугольников YAC и XCB, получаем $XA + XB \geqslant XC\sqrt{2}$.



б) Заметим, что равенство $XA + XB = XC\sqrt{2}$ равносильно равенству $XA + YA = YX$, что имеет место в точности тогда, когда точка A лежит на отрезке YX; или, по-другому, в точности тогда, когда $\angle AYC + \angle AXC = \angle XYC + \angle YXC = 90°$ (из прямоугольного треугольника YXC). Заметим, что $\angle AYC = \angle BXC$ из равных треугольников AYC и BXC. Поэтому равенство $XA + XB = XC\sqrt{2}$ равносильно условию $\angle AXB = \angle BXC + \angle AXC = 90°$. Как известно, множество таких точек X (в одной из двух полуплоскостей относительно прямой AB), что $\angle AXB = 90°$, есть полуокружность с диаметром AB.

9 класс
(11-летняя программа обучения)

9.5. Ответ: $(7; 29; 263)$.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 - 1826 = -7p_3, \\ 3p_1 + 5p_2 - 2007 = -7p_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Следовательно, что при любом p_3 числа $2p_1 - p_2 - 1826$ и $3p_1 + 5p_2 - 2007$ делятся на 7, поэтому положим $p_1 = 7k_1 + r_1$, $p_2 = 7k_2 + r_2$, где r_1, r_2 — остатки от деления p_1 и p_2 на 7 соответственно, $r_1, r_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Поскольку $1826 = 7 \cdot 260 + 6$ и $2007 = 7 \cdot 286 + 5$, то

$$\begin{cases} 2r_1 - r_2 - 6 \vdots 7, \\ 3r_1 + 5r_2 - 5 \vdots 7. \end{cases}$$

Поэтому $(3r_1 + 5r_2 - 5) - (2r_1 - r_2 - 6) = (r_1 + 6r_2 + 1) \vdots 7$, но тогда и $(2r_1 - r_2 - 6) - (r_1 + 6r_2 + 1) = r_1 - 7r_2 - 7 \vdots 7$, откуда следует, что $r_1 \vdots 7$.

Единственным значением (из указанных выше), которое может принимать r_1 — это 0, поэтому число p_1 кратно 7, и так как p_1 простое число, то $p_1 = 7$. Подставляя это значение в исходную систему, получим

$$\begin{cases} -p_2 + 7p_3 = 1812, \\ 5p_2 + 7p_3 = 1986. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -p_2 + 7p_3 = 1812, \\ 6p_2 = 174. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -p_2 + 7p_3 = 1812, \\ p_2 = 29. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p_3 = 263, \\ p_2 = 29. \end{cases}$$

Легко видеть, что найденные значения p_1, p_2, p_3 — простые числа, которые действительно удовлетворяют исходной системе уравнений.

9.6. Хорошо известно, что диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны, т.е. (см. рис. 1) $\angle AOD = 90° = \angle AND$. Поэтому точки A, N, O, D лежат на одной окружности, и, следовательно

$$\angle NOA = \angle NDA = 90° - \angle DAN.$$

Аналогично $\angle COK = 90° - \angle BCK$. А так как противоположные углы дельтоида равны ($\angle DAN = \angle BCK$), то $\angle NOA = \angle KOC$, откуда следует, что эти углы вертикальные, и, значит, точки N, O, K лежат на одной прямой.

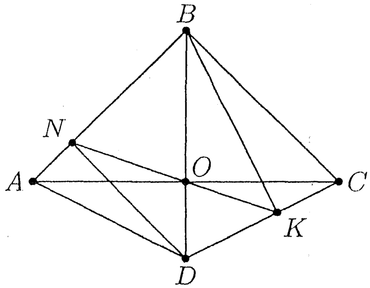


Рис. 1

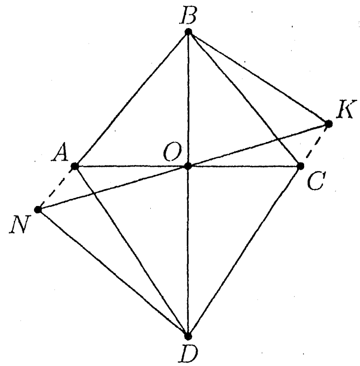


Рис. 2

Случай, когда точки расположены как на рисунке 2, рассматривается аналогично.

9.7. Ответ: нет, нельзя.

Обозначим треугольник, в который вписано число k, через T_k, $k \in \{1, \ldots, n^2\}$.

Допустим, что в треугольники можно вписать натуральные числа $1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$ с соблюдением условий 1) и 2). Покажем, что тогда найдется угловой треугольник T_k с числом $k \notin \{1,\ 2,\ n^2-1,\ n^2\}$. Действительно, если это не так, т. е. числа, вписанные в три угловых треугольника, — это какие-то три из чисел $1,\ 2,\ n^2-1$ и n^2, то имеется пара угловых треугольников, числа в которых — это либо $\{1,\ 2\}$, либо $\{n^2-1,\ n^2\}$. Значит, в силу условия 1) эти два угловых треугольника должны иметь общую точку, т. е. $n = 2$, что по условию задачи не так. Следовательно, имеется угловой треугольник T_k с числом $k \notin \{1,\ 2,\ n^2-1,\ n^2\}$.

Но если T_k — такой угловой треугольник, то в силу условий 1) и 2) он имеет общие точки с четырьмя треугольниками T_{k-2}, T_{k-1}, T_{k+1} и T_{k+2}, что невозможно, поскольку угловой треугольник имеет общие точки только с тремя треугольниками. Противоречие. Следовательно, вписать в треугольники числа с соблюдением условий 1) и 2) нельзя.

9.8. Пусть x_1, x_2, ..., x_{2007} — числа, записанные по кругу. Рассмотрим из них пять подряд идущих чисел a, b, c, d и e (по кругу они могут быть записаны не обязательно в таком порядке). Пусть для определенности сумма первых трех в 2 раза больше суммы последних двух, т. е. $a+b+c=2(d+e)$. Тогда $a+b+c+d+e=3(d+e)$ — делится на 3. Итак, числа, записанные по кругу, обладают следующим свойством: сумма любых пяти подряд идущих чисел делится на 3. Так как, в частности, суммы $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ и $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ делятся на 3, то и их разность x_1-x_6 делится на 3. Запишем это в виде $x_1 \equiv x_6$. Ясно, что всегда, $a \equiv b$, если b стоит по кругу на расстоянии 5 чисел от a (между a и b расположено 4 числа). Заметим также, что из условий $a-b$ делится на 3 и $b-c$ делится на 3 следует, что $a-c$ делится на 3, т.е. из условий $a \equiv b$ и $b \equiv c$ следует, что $a \equiv c$. Поэтому получаем цепочку, в которую в силу того, что числа 2007 и 5 являются взаимно простыми, входят все числа, записанные по кругу:

$$x_1 \equiv x_6 \equiv x_{11} \equiv \ldots \equiv x_{2006} \equiv x_4 \equiv x_9 \equiv x_{14} \ldots \equiv x_{2004} \equiv$$
$$\equiv x_2 \equiv x_7 \equiv x_{12} \ldots \equiv x_{2007} \equiv x_5 \equiv x_{10} \equiv x_{15} \ldots \equiv x_{2005} \equiv$$
$$\equiv x_3 \equiv x_8 \equiv x_{13} \ldots \equiv x_{2003} \equiv x_1.$$

Это значит, что для любых двух чисел x и y, записанных по кругу, $x \equiv y$ (или, что то же самое, $y-x$ делится на 3. Пусть a — какое-то из чисел, записанных по кругу. Рассмотрим сумму 5 подряд идущих чисел a, b, c, d и e. Так как $b-a$ делится на 3, то $b-a=3k$ для некоторого целого k, откуда $b=a+3k$. Аналогично $c=a+3l$, $d=a+3m$, $e=a+3n$, где l, m, n — некоторые целые числа. Поэтому $a+b+c+d+e=5a+3(k+l+m+n)$. Так как мы установили, что эта сумма делится на 3, то из последнего равенства следует, что a делится на 3. Итак, все числа, записанные по кругу, делятся на 3. Но тогда, разделив все их на 3, мы снова получим 2007 чисел, удовлетворяющих условию задачи. Следовательно, как показано выше, они тоже делятся на 3. Разделив их на 3, получим очередной набор целых чисел, удовлетворяющий условию задачи. Этот процесс можно продолжать до бесконечности. Это значит, что все числа, записанные по кругу, могут любое число раз делиться на 3. Единственным целым числом, обладающим таким свойством, является число 0. Следовательно, все числа, записанные по кругу, равны 0, что и требовалось доказать.

10 класс

10.5. Так как треугольник ABD равнобедренный по условию, то $\angle ABD = \angle ADB$, и поэтому $\angle ACB = \angle ABD$. Поскольку углы ANB AKB прямые и опираются на отрезок AB (см. рис. 1), то четыре точки A, B, N, K лежат на одной окружности. Поэтому вписанные углы ABK и ANK равны, как опирающиеся на дугу AK. Следовательно, $\angle ACB = \angle ABD = \angle ABK = \angle ANK = \angle ANM$, где M — точка пересечения прямых AC и NK. Тогда

$$\angle AMN = 180^\circ - \angle ANM - \angle NAM = 180^\circ - \angle ACB - \angle NAC = \\ = \angle ANC = 90^\circ,$$

что и означает перпендикулярность прямых AC и NK.

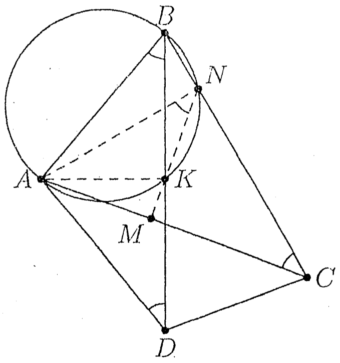


Рис. 1

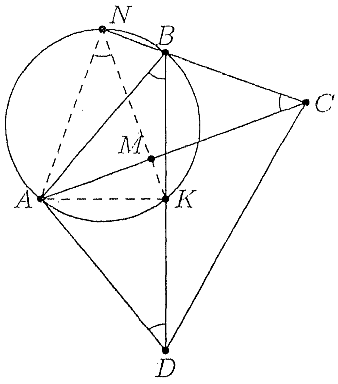


Рис. 2

Для случая, представленного на рисунке 2, рассуждения буквально дословные.

10.6. Ответ: числа, кратные 6 или 20.

Пусть d_0, d_1, d_2, d_3 — такие различные делители натурального числа N, что $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 \,\vdots\, N$. Пусть $m_i = N/d_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Заметим, что числа m_i различны, являются делителями числа N (не нарушая общности, считаем $m_0 < m_1 < m_2 < m_3$), причем

$$aN = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = N\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right), \quad a \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что

$$a = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{12} < 3.$$

Поэтому возможны лишь два случая: $a = 1$ и $a = 2$.

1. Пусть $a = 2$. Если $m_0 \geqslant 2$, то

$$a = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{57}{60} < 2, \text{ — противоречие.}$$

Следовательно, $m_0 = 1$. Если $m_1 \geqslant 3$, то

$$a = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{47}{60} < 2, \text{ — противоречие.}$$

Следовательно, $m_1 = 2$. Если $m_2 \geqslant 4$,

$$a = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{19}{20} < 2, \text{ — противоречие.}$$

Следовательно, $m_2 = 3$. Но тогда

$$\frac{1}{m_3} = 2 - \frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = 2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow m_3 = 6.$$

Таким образом, при $a = 2$ для того, чтобы сумма четырех различных делителей числа N делилась на N, необходимо, чтобы $N \,\vdots\, 6$.

Обратно, легко видеть, что любое число, кратное 6, делит сумму четырех своих различных делителей: N, $N/2$, $N/3$ и $N/6$.

2. Пусть $a = 1$. Тогда, очевидно, что $m_0 \geqslant 2$, и, если бы $m_0 > 2$, то

$$1 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1, \text{ -- противоречие.}$$

Итак, $m_0 = 2$. Если $m_1 = 3$, то $N \vdots 2$ и $N \vdots 3$, откуда $N \vdots 6$, и, как было отмечено выше, такие числа удовлетворяют условию задачи. Поэтому достаточно рассмотреть лишь случай, когда $m_1 \geqslant 4$ и среди чисел m_1, m_2, m_3 нет 6 (в противном случае $N \vdots 6$).

Если $m_1 \geqslant 5$, то $m_3 > m_2 \geqslant 7$ и тогда

$$1 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{69}{70} < 1, \text{ --}$$

противоречие. Следовательно, $m_1 = 4$. В этом случае

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \implies m_2 m_3 = 4(m_2 + m_3) < 8m_3 \implies m_2 < 8.$$

Поэтому число m_2, $m_2 > m_1 = 4$, может принимать лишь два значения: 5 и 7.

При $m_2 = 7$ имеем $7m_3 = 4(7 + m_3)$, что невозможно ни при каких натуральных m_3.

Если же $m_2 = 5$, то $5m_3 = 4(5 + m_3)$, откуда $m_3 = 20$. Это означает, что число N должно делится на 20. С другой стороны, любое число, кратное 20, является делителем суммы своих четырех различных делителей: $N/2$, $N/4$, $N/5$, $N/20$.

Таким образом, только числа, кратные 6 или 20, удовлетворяют условию задачи.

10.7. Очевидно, что достаточно доказать требуемое утверждение для положительных a, b, c, d. Итак, имеем

$$abcd > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = 4\sqrt{abcd},$$

откуда $\sqrt[4]{abcd} > 2$. Допустим, что утверждение не верно, т.е. $a + b + c + d + 8 \geqslant abcd$. Тогда из условия следует, что $a + b + c + d + 8 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, откуда

$$(a - 0,5)^2 + (b - 0,5)^2 + (c - 0,5)^2 + (d - 0,5)^2 < 9.$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном тогда получаем

$$\frac{(a - 0,5) + (b - 0,5) + (c - 0,5) + (d - 0,5)}{4} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[4]{\frac{(a - 0,5)^2 + (b - 0,5)^2 + (c - 0,5)^2 + (d - 0,5)^2}{4}} < \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2},$$

откуда

$$\frac{a + b + c + d - 2}{4} < \frac{3}{2} \Longrightarrow a + b + c + d < 8.$$

Но тогда $2 < \sqrt[4]{abcd} \leqslant \dfrac{a + b + c + d}{4} < \dfrac{8}{4} = 2$ — противоречие.

10.8. Ответ: все пары $(km; kn)$, где m и n взаимно простые и одно из них четное, k — любое натуральное число.

Назовем пару $(m; n)$ *трудной*, если множество $\mathbb{N}$ не представимо в виде двух непересекающихся подмножеств A_1 и A_2 таких, что для любых двух чисел $a, b \in A_i$, $(i = 1, 2)$ $|a - b| \neq m$, $|a - b| \neq n$. В противном случае пару $(m; n)$ назовем *легкой*. Будем также записывать $a \sim b$, если числа a и b принадлежат одному и тому же из подмножеств, на которые разбито множество $\mathbb{N}$. Нам нужно найти все трудные пары.

Лемма. Пара $(m; n)$ — трудная тогда и только тогда, когда пара $(km; kn)$ — трудная для любого $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть пара $(m; n)$ — трудная.Предположим, что пара $(km; kn)$ — легкая при некотором натуральном k, т.е. $\mathbb{N} = A_1 \bigsqcup A_2$, где A_1 и A_2 удовлетворяют условию задачи. Но множество $k\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, тем самым числа вида $k\mathbb{N}$ разбиты на два подмножества $k\mathbb{N} =$

$C_1 \bigsqcup C_2$ так, что $|ka-kb| \neq km, kn$ при любых $ka \sim kb$. Тогда мы можем разбить $\mathbb{N} = B_1 \bigsqcup B_2$ по правилу $a \in B_i$ тогда и только тогда когда $ka \in C_i$, $i = 1, 2$. Тогда $a \sim b$ в новом разбиении, если $ka \sim kb$ в старом. При этом $|a-b| \neq m, n$, так как $|ka-kb| \neq km, kn$.

Обратно, если $(m;n)$ – легкая пара, то $(km;kn)$ – легкая пара. Проведем разбиение следующим образом: если в первом разбиении $\mathbb{N} = A_1 \bigsqcup A_2$ $a \in A_i$, то во втором разбиении $\mathbb{N} = B_1 \bigsqcup B_2$ все числа вида $k(a-1)+r \in B_i$, где $0 \leqslant r < k$, $i = 1, 2$. Покажем, что $|ka-kb| \neq km, kn$, если $ka \sim kb$. Предположим противное, пусть $k(a_1-1)+r_1 \sim k(a_2-1)+r_2$ и $|(k(a_1-1)+r_1)-(k(a_2-1)+r_2)| = km$. Тогда $(k(a_1-1)+r_1)-(k(a_2-1)+r_2) = \pm km$, откуда $r_1-r_2 \,\vdots\, k$, но $0 \leqslant |r_1-r_2| \leqslant k-1$, и, следовательно, $r_1-r_2=0$, т.е. $r_1=r_2$. Тогда $|k(a_1-a_2)| = km$, откуда $|a_1-a_2| = m$, – противоречие.

Из доказанной леммы следует, что достаточно рассматривать лишь взаимно простые значения m и n.

Во-первых, если m и n оба нечетные, то очевидно, что пара $(m;n)$ легкая, так как множество натуральных чисел можно разбить на два непересекающихся подмножества: множество всех четных чисел и множество всех нечетных чисел.

Поэтому пусть взаимно простые m и n таковы, что одно из них (скажем, m) четно. Докажем, что пара $(m;n)$ трудная. Допустим обратное, т.е существует разбиение $\mathbb{N} = A_1 \bigsqcup A_2$, удовлетворяющее условию. Тогда имеем

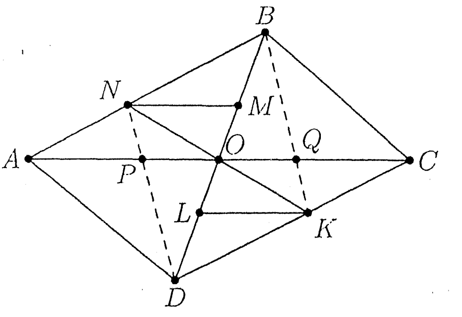
$$a \in A_i \Longrightarrow a+m, a+n \in A_{3-i} \Longrightarrow a+2m, a+2n \in A_i.$$

Следовательно, для любого a из A_i числа $a+2pm$ и $a+2ln$ также принадлежат A_i, а числа $a+m+2pm$ не принадлежат этому множеству при любых натуральных p и l. Но тогда $2ln \neq (2p+1)m$ ни для каких l, $2p+1$, что, очевидно, неверно (например, можно взять $l = m/2$, $2p+1 = n$).

Итак, для взаимно простых m и n трудными являются все пары $(m;n)$, где одно из чисел пары четное. В общем случае трудными являются все пары $(km;kn)$, где m и n взаимно простые и одно из них четное.

11 класс

11.5. Построим $NM \parallel KL \parallel AC$ (см. рис.). Обозначим $a = BO$, $b = DO$, $c = PO = OQ$, $l = AO = OC$, $x = KL$, $u = OL$, $y = NM$, $v = OM$. Из подобия треугольников BOQ и BLK следует, что $\frac{x}{c} = \frac{a+u}{a}$, откуда $\frac{x}{c} = 1 + \frac{u}{a}$. Из подобия треугольников DOC и DLK следует, что $\frac{x}{l} = \frac{b-u}{b}$,



откуда $\frac{x}{l} = 1 - \frac{u}{b}$. Из полученных равенств находим $x\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{l}\right) = u\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Поэтому $\frac{x}{u} = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{cl}{l-c}$.

Совершенно аналогично (меняя в установленных выше формулах a на b, b на a, x на y, u на v, находим $\frac{y}{v} = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{cl}{l-c}$.

Следовательно, треугольники ONM и OKL подобны (по углу $\angle NMO = \angle KLO$ и пропорциональным сторонам $x : u = y : v$. Таким образом, углы NOM и KOL равны, и, значит, являются вертикальными. Следовательно, точки N, O, K лежат на одной прямой.

11.6. Во-первых, покажем, что многочлен $f(x) = x^4 - x^3 - 1$ имеет ровно два действительных корня $x_1 < x_2$. Действительно, производная $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$, поэтому на промежутке $(-\infty, 3/4)$ функция убывает, а на $(3/4, +\infty)$ возрастает, т.е. точка $3/4$ — единственная точка минимума функции f, причем $f(3/4) < 0$. Поскольку $f(x) \to +\infty$, при $x \to \pm\infty$, то график функции f ровно два раза пересекает ось абсцисс.

Можно попытаться оценить корни x_1, x_2 по отдельности (например, легко получить, что $-1 < x_1 < 0$, $1 < x_2 < 2$), однако это едва ли приведет к простому доказательству нужных оценок для их суммы и произведения. Поэтому поступим следующим образом.

Так как x_1, x_2 — корни многочлена f, то $f(x) \vdots (x-x_1)$ и $f(x) \vdots (x-x_2)$. Тогда $f(x) \vdots (x-x_1)(x-x_2)$, где $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - ax + b$ в силу формул Виета. Следовательно, можно записать $f(x) = (x^2 - ax + b)(x^2 + px + q)$. Раскрывая здесь скобки и приравнивая свободные члены, а также коэффициенты при x^3, легко находим $q = -1/b$, $p = a - 1$. Стало быть, $x^4 - x^3 - 1 = (x^2 - ax + b)(x^2 + (a-1)x - 1/b)$. Снова раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при x^2 и x, получим соотношения

$$-1/b - a(a-1) + b = 0, \tag{1}$$

$$a/b + b(a-1) = 0. \tag{2}$$

Домножив (1) на b^2, а (2) — на ab и сложив, получим

$$-b + a^2 + b^3 = 0 \iff b - b^3 = a^2. \tag{3}$$

Кроме того, выражая a из (2), получим

$$a = \frac{b^2}{1+b^2} = 1 - \frac{1}{1+b^2}. \tag{4}$$

Далее заметим, что многочлен $x^2+(a-1)x-1/b$ не имеет действительных корней, иначе многочлен $x^4 - x^3 - 1$ имел бы более двух действительных корней, что, как показано выше, не так. В частности, отсюда следует, что $-1/b > 0$, т.е. $b < 0$. Теперь из (3) имеем $b(1-b^2) \geqslant 0$, откуда $1 - b^2 \leqslant 0$, откуда $b \leqslant -1$. В силу этого из (4) $a \geqslant 1 - 1/(1+1) = 0,5$. Тогда опять из (3)

$$b - b^3 \geqslant \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Заметим, что при $x \leqslant -1$ функция $h(x) = x - x^3$ убывает. При этом

$$h(-1,1) = -1,1 + 1,331 = 0,231 < \frac{1}{4}.$$

Поэтому из (5) следует, что $b < -1,1$ и, значит, $b^2 > 1,21$. Тогда из (3) получаем

$$a > 1 - \frac{1}{1+1,21} > 1 - \frac{1}{2,2} = \frac{6}{11}.$$

11.7. Ответ: $n = 2$, $m = 2$.

Уравнение из условия задачи равносильно уравнению

$$(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = 7^m. \qquad (1)$$

Очевидно, что, если $n = 1$, оно не может быть верным ни при каких m. Если $n = 2$, то $m = 2$. Покажем, что найденные значения n и m – единственные, удовлетворяющие уравнению (1). Действительно, пусть $n \geqslant 3$. Тогда $n^3 - n + 1 = n(n^2 - 1) + 1 > 1$ и $n^2 + n + 1 > 1$. Поэтому ввиду равенства (1) имеем $n^3-n+1=7^a$ и $n^2+n+1=7^b$ для некоторых натуральных a и b. Из последних двух равенств получим $(n-1)(7^b - 1) = 7^a - 1$, откуда следует, что $7^a - 1$ делится на $7^b - 1$.

Покажем, что тогда a делится на b. Предположим, что это не так, т. е. $a = bq + r$ для некоторых целых неотрицательных q и r, причем $0 < r < b$. Тогда $7^a - 1 = 7^{bq+r} - 1 = 7^r(7^{bq} - 1) + 7^r - 1$. Заметим, что $7^{bq} - 1 = (7^b - 1)(7^{bq-b} + 7^{bq-2b} + ... + 7^b + 1)$ делится на $7^b - 1$. Следовательно, $7^r - 1$ должно делиться на $7^b - 1$, что невозможно, поскольку $0 < 7^r - 1 < 7^b - 1$.

Итак, $a = bk$ для некоторого натурального k. Тогда

$$n^3 - n + 1 = 7^a = 7^{bk} = (n^2 + n + 1)^k.$$

Но при $k = 1$ имеем

$$(n^3-n+1)-(n^2+n+1)^k=(n^3-n+1)-(n^2+n+1)=n(n(n-1)-2)>0,$$

а при $k \geqslant 2$ имеем

$$(n^3 - n + 1) - (n^2 + n + 1)^k \geqslant (n^3 - n + 1) - (n^2 + n + 1)^2 =$$

$$= -n^4 - n^3 - 3n^2 - 3n < 0.$$

Поэтому, действительно, равенство (1) не может быть верным ни при каких $n \geqslant 3$, что и требовалось показать.

11.8. Ответ: все пары чисел вида $(km; kn)$, где взаимно простые m и n таковы, что $m-n$ не кратно 3, k — любое натуральное число.

Назовем пару $(m; n)$ *трудной*, если множество $\mathbb{N}$ нельзя разбить на три непересекающиеся подмножества так, чтобы разность элементов ни в каком из этих подмножеств не равнялась m, n или $m+n$. В противном случае пару $(m; n)$ назовем *легкой*.

Как и в задаче 10.8 легко доказывается

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пара $(m; n)$ — трудная тогда и только тогда, когда пара $(km; kn)$ — трудная.

Поэтому достаточно найти все трудные пары взаимно простых чисел m и n.

Пусть $(m; n)$ — трудная пара и m и n взаимно простые. Заметим, что тогда хотя бы одно из чисел m, n, $m+n$ кратно 3. Действительно, если ни одно из них не кратно 3, то мы можем разбить множество натуральных чисел следующим образом: $\mathbb{N} = \{3k\} \bigcup \{3k+1\} \bigcup \{3k+2\}$. Видим, что разность любых двух элементов в каждом из подмножеств кратна 3 и, следовательно, не может быть равна ни m, ни n, ни $m+n$, а тогда пара $(m; n)$ легкая — противоречие.

Итак, хотя бы одно из чисел m, n или $m+n$ кратно 3. Заметим, что тогда $n-m \not\vdots\, 3$. Действительно, если это не так, то m n дают одинаковые остатки r при делении на 3, причем $r \neq 0$, ибо в противном случае оба и m, и n кратны 3 и, значит, не являются взаимно простыми. Но тогда $m+n \equiv 2r \not\equiv 0 \pmod 3$, и, следовательно, ни одно из чисел m, n, $m+n$ не кратно 3 — противоречие.

Итак, $n-m \not\vdots\, 3$, и m и n взаимно просты. Докажем, что все такие пары трудные. Предположим, что какая-либо из таких пар легкая и в этом предположении докажем леммы 2 и 3.

Лемма 2. Если $a \geqslant m$, то числа a и $a+n-m$ из одного подмножества.

Действительно, рассмотрим числа $a-m$, a, $a+n$ — они из трех разных подмножеств. Точно также $a-m$, $a+n-m$, $a+n$ из трех разных подмножеств. Следовательно, a и $a+n-m$ из одного подмножества.

Из леммы 2 сразу вытекает, что любые два числа, большие либо равные m, разность которых кратна $n-m$, принадлежат одному подмножеству.

Лемма 3. Числа a и $a+n+2m$ из одного подмножества.

Действительно, числа a, $a+m$, $a+m+n$ из трех разных подмножеств; числа $a+m$, $a+m+n$, $a+n+2m$ также из трех разных подмножеств. Следовательно, числа a и $a+n+2m$ из одного подмножества.

Из леммы 3 следует, что любые два числа, разность между которыми кратна $n+2m$ принадлежат одному подмножеству.

Заметим теперь, что

$$\text{НОД}(n-m; n+2m) = \text{НОД}(n-m; 3m) = \text{НОД}(n-m; m) =$$

$$= \left[\text{так как } n-m \not\vdots\, 3\right] = \text{НОД}(n; m) = 1,$$

поэтому существуют такие натуральные p и q, что

$$p(n+2m) - q(n-m) = 1 \implies np(n+2m) - nq(n-m) = n.$$

Возьмем теперь любое $a \geqslant m$ и рассмотрим числа a и $a+np(n+2m)$. В силу леммы 3 они из одного подмножества, так как их разность кратна $n+2m$. Аналогично, в силу леммы 2 числа a и $a+nq(n-m)$ также принадлежат одному подмножеству, так как их разность кратна $n-m$. Но тогда числа $a+pn(n+2m)$ и $a+qn(n-m)$ из одного подмножества, между тем как их разность равна n — противоречие.

Итак, для взаимно простых m и n все трудные пары — это те, для которых $n-m \not\vdots\, 3$.

Окончательно получаем ответ: трудные пары — пары вида вида $(km; kn)$, где взаимно простые m и n таковы, что $m-n$ не кратно 3, k — любое натуральное число.