Министерство образования Республики Беларусь

« LVII »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Барановичи 2007

УДК 51(079.1)
ББК 22.1

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 57-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Архипов С.А. (9*.2, 9.1, 9.2, 10.1, 10.4)
Барабанов Е.А. (9.3, 10.4, 11.2, 11.4)
Воронович И.И. (8.3, 9*.4, 9.1, 9.3, 10.4)
Карамзин (10.3)
Каскевич В.И. (8.1, 9*.1)
Мазаник С.А. (8.2, 9*.2, 10.3, 11.1)
Максимов Р.Д. (9.4, 10.2, 11.3, 11.4)
Миротин А.Р. (8.4, 9*.3, 11.2)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: С.А.Архипов, Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник, Р.Д.Максимов.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. У филателиста Бори большое количество марок. Однажды он решил разместить их в большом альбоме, состоящем из 1000 страниц, так, чтобы на всех заполненных страницах марок было поровну (какие-то страницы в конце альбома могут остаться пустыми). Но когда Боря попробовал раскладывать по 7 марок на странице, то у него 5 марок осталось (но не все страницы были заполнены). Тогда он стал раскладывать сначала по 11 марок на странице, затем — по 13 марок на странице. Но снова у него оба раза осталось 5 марок. Наконец, когда Боря решил разложить по 23 марки на странице, то на этот раз у него осталось 6 марок.

Сколько марок в коллекции у Бори?

8.2. Вокруг окружности описаны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, периметры которых относятся как 1:2. Сторона A_1B_1 пересекает стороны BC и AC в точках A_2 и B_3 соответственно, сторона A_1C_1 пересекает стороны AB и BC в точках C_2 и A_3 соответственно, сторона B_1C_1 пересекает стороны AC и AB в точках B_2 и C_3 соответственно.

Найдите отношение суммы периметров треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ к сумме периметров треугольников AB_2C_3, BC_2A_3, CA_2B_3.

8.3. Каждая точка плоскости покрашена в один из двух цветов.

Докажите, что на этой плоскости существует прямоугольный равнобедренный треугольник, все вершины которого одного цвета и длины катетов которого — целые числа.

8.4. Про квадратные трехчлены ax^2+bx+c и kx^2+lx+m известно, что каждый из них имеет действительные корни. Причем корни одного из них различны, а корни другого — одного знака.

Докажите, что квадратный трехчлен $akx^2+blx+cm$ имеет различные действительные корни.

9 класс
(12-летняя программа обучения)

9*.1. Найдите все простые натуральные числа p и q, для которых уравнение $x^2+px+q=100$ имеет целые корни.

9*.2. Докажите, что при любых натуральных n число $\sqrt{2,\underbrace{000...0}_{n}7}$ является иррациональным.

9*.3. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проходят через центры друг друга и пересекаются в точках A и B. Прямая O_1O_2 пересекает окружность S_2 в точке D (отличной от O_1). Хорда AE окружности S_2 параллельна прямой O_1O_2, точка C — середина отрезка AB, а точка F — точка пересечения отрезков AD и BE.

Докажите, что треугольник ACF равносторонний.

9*.4. Каждая точка плоскости покрашена в один из двух цветов.

Докажите, что на плоскости найдется треугольник, у которого все вершины и точка пересечения медиан покрашены в один цвет.

9 класс
(11-летняя программа обучения)

9.1. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle BAC = \angle BCA = 15^\circ$, $\angle CAD = 45^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$.

Найдите величину угла $\angle DBC$.

9.2. Докажите, что для любых положительных действительных чисел x_1, ..., x_{n+1} выполнено неравенство

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_1 x_2 x_3}{x_4} + \ldots + \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{x_{n+1}} \geqslant 4(1 - x_1 \ldots x_{n+1}).$$

9.3. Каждая точка окружности покрашена в один из двух цветов.

а) Докажите, что существует вписанный в эту окружность равнобедренный треугольник, все вершины которого одного цвета.

б) Верно ли утверждение предыдущего пункта для равностороннего треугольника?

9.4. В каждой клетке таблицы $2n \times 2m$ расставлены знаки "+" или "−". Крестом назовем объединение всех клеток, стоящих в некоторой строке и некотором столбце таблицы. Клетку, стоящую на пересечении этих строки и столбца, назовем центром креста. Преобразованием таблицы назовем следующую операцию: отмечаем все клетки, в которых стоит знак "−". Затем поочередно проводим с каждой из отмеченных клеток следующее действие: во всех клетках креста с центром в отмеченной клетке меняем знаки на противоположные, но сам центр не трогаем. (Легко видеть, что порядок выбора отмеченных клеток не имеет значения.)

Докажите, что с помощью указанного преобразования любую таблицу можно получить из какой-нибудь таблицы.

10 класс

10.1. Докажите, что при любых натуральных n число $\sqrt{8,\underbrace{000\ldots01}_{n}}$ является иррациональным.

10.2. В каждой клетке таблицы $2n \times 2m$ расставлены знаки " + " или " – ". Крестом назовем объединение всех клеток, стоящих в некоторой строке и некотором столбце таблицы. Клетку, стоящую на пересечении этих строки и столбца, назовем центром креста. Преобразованием таблицы назовем следующую операцию: отмечаем все клетки, в которых стоит знак " – ". Затем поочередно проводим с каждой из отмеченных клеток следующее действие: во всех клетках креста с центром в отмеченной клетке меняем знаки на противоположные. (Легко видеть, что порядок выбора отмеченных клеток не имеет значения.)

При каких расстановках знаков в таблице два последовательных преобразования превращают ее в таблицу, содержащую только знаки " + "?

10.3. На столе в одной точке сидят три таракана. В некоторый момент они начинают разбегаться и через некоторое время оказываются в вершинах треугольника, радиус вписанной окружности которого равен 2.

Докажите, что по крайней мере один из тараканов пробежал расстояние, большее 3.

10.4. Каждая точка окружности покрашена в один из двух цветов.

а) Докажите, что существует вписанный в эту окружность четырехугольник с двумя параллельными сторонами (т.е. трапеция или прямоугольник), все вершины которого одного цвета.

б) Можно ли утверждать, что обязательно найдется вписанный в окружность прямоугольник, все вершины которого одного цвета ?

в) Можно ли утверждать, что обязательно найдется вписанная в окружность трапеция, все вершины которой одного цвета ?

11 класс

11.1. Найдите все многочлены $P(x)$ степени не выше n с неотрицательными коэффициентами, для которых неравенство $P(x)P(1/x) \leqslant (P(1))^2$ выполнено для всех положительных x.

11.2. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно проходят через центры друг друга; точка A — одна из точек их пересечения. Из точки A одновременно стартуют точки M_1 и M_2. Точка M_1 движется по окружности S_1, а точка M_2 — по окружности S_2; обе — по ходу часовой стрелки и с одной и той же постоянной линейной скоростью v.

а) Докажите, что все треугольники AM_1M_2 равносторонние.

б) С какой линейной скоростью и по какой кривой движется центр треугольников AM_1M_2 ?

11.3. В каждой клетке таблицы $2n \times 2m$ расставлены знаки "$+$" или "$-$". Крестом назовем объединение всех клеток, стоящих в некоторой строке и некотором столбце таблицы. Клетку, стоящую на пересечении этих строки и столбца, назовем центром креста. Преобразованием таблицы назовем следующую операцию: отмечаем все клетки, в которых стоит знак "$-$". Затем поочередно проводим с каждой из отмеченных клеток следующее действие: во всех клетках креста с центром в отмеченной клетке меняем знаки на противоположные. (Легко видеть, что порядок выбора отмеченных клеток не имеет значения.) Таблицу назовем достижимой, если ее можно получить из какой-либо таблицы одним таким преобразованием.

Найдите число всех достижимых таблиц.

11.4. Каждая точка окружности покрашена в один из N цветов ($N \geqslant 2$).

Докажите, что существует вписанная в эту окружность трапеция, все вершины которой одного цвета.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1 Ответ: 2007 марок.

Пусть у Бори x марок. Согласно условию $x-5$ делится на 7, на 11 и на 13. Следовательно, поскольку 7, 11 и 13 – простые числа, то $x-5$ делится на их произведение, т. е. на $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Поэтому $x-5 = 1001k$ для некоторого натурального k, откуда $x = 1001k+5$. Далее, согласно условию $x-6$ делится на 23. Поэтому $x-6 = 23m$ для некоторого натурального m. В результате, получим

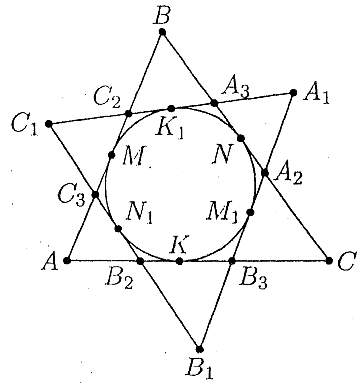
$$1001k - 1 = 23m. \qquad (*)$$

Остается только найти натуральные k и n, удовлетворяющие этому равенству. При этом, поскольку согласно условию $(x-5)/7 < 1000$ и, значит, $x < 7005$, то достаточно рассмотреть $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$. Нетрудно убедиться, что только при $k = 2$ из уравнения $(*)$ получится натуральное значение $m = 87$. Поэтому находим единственное значение $x = 1001 \cdot 2 + 5 = 2007$.

Замечание. В единственности значения $x = 2007$, удовлетворяющего всем условиям задачи, можно убедиться и без перебора всех возможных значения k, указанных выше. Проверив, что при $k = 2$ и $m = 87$ получается правильное равенство $1001 \cdot 2 - 1 = 23 \cdot 87$, вычтем его из равенства $(*)$. Получим после преобразований $1001 \cdot (k-2) = 23 \cdot (m-87)$, откуда (вследствие того, что числа 1001 и 23 – взаимно простые) $k-2$ делится на 23, т. е. $k = 23n+2$ для некоторого целого n. Тогда $x = 1001 \cdot (23n+2) + 5 = 23023n + 2007$. Теперь ясно, что единственное натуральное значение x, не превосходящее 7000, равно 2007.

8.2. Ответ: 1 : 2.

Пусть M, N, K, M_1, N_1, K_1 – точки, в которых окружность касается сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. По теореме о касательных $C_2M = C_2K_1$, $A_3K_1 = A_3N$. Поэтому периметр треугольника BC_2A_3 равен



$$P(BC_2A_3) = BC_2 + C_2A_3 + A_3B =$$
$$= BC_2 + (C_2K_1 + K_1A_3) + A_3B =$$
$$= BC_2 + C_2M + A_3N + A_3B =$$
$$= BM + BN.$$

Аналогично, $P(CA_2B_3) = CN + CK$, $P(AB_2C_3) = AK + AM$. Поэтому

$$P(BC_2A_3) + P(CA_2B_3) + P(AB_2C_3) =$$
$$= BM + BN + CN + CK + AK + AM = P(ABC).$$

Точно также получаем, что

$$P(A_1A_2A_3) + P(B_1B_2B_3) + P(C_1C_2C_3) = P(A_1B_1C_1).$$

Следовательно, требуемое отношение сумм периметров треугольников равно отношению периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т.е. 1:2.

8.3. Предположим, что такого треугольника не существует. Тогда заметим, что у любого квадратика 1×1 ровно две вершины одного цвета и ровно две – другого. Действительно, если бы три вершины квадрата были покрашены в один цвет, то треугольник с вершинами в этих точках оказался искомым. Предположим, что существует квадратик 1×1, у которого две соседние вершины покрашены в один цвет, например, A_1 и B_1 покрашены в цвет 1 (см. рис. 1). Тогда вершины A_3, B_3, A_5, B_5 также должны быть окрашены в цвет 1, а вершины A_2, B_2, A_4, B_4 – в цвет 2. Далее, точки C_3 и C_5 должны иметь цвет 2, иначе треугольники $A_1A_3C_3$, $A_3A_5C_5$ удовлетворяли бы условию задачи. Но тогда точка D_5 должна быть покрашена в цвет 1, ибо в противном случае треугольник $C_3C_5D_5$ был бы искомым равнобедренным прямоугольным треугольником. С другой стороны, точка D_5 должна быть покрашена в цвет 2, ибо в противном случае треугольник $A_1A_5D_5$ удовлетворяет условию — противоречие.

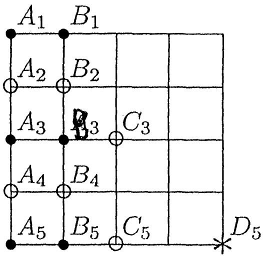


Рис. 1

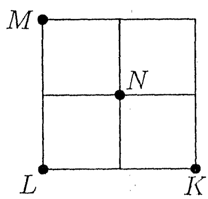


Рис. 2

Следовательно, у любого квадратика 1×1 две вершины одного цвета должны находиться в противоположных вершинах. Но тогда (см. рис. 2) точки M, N, K, L должны быть одного цвета, что не возможно, поскольку треугольник MLK — равнобедренный прямоугольный с целочисленными катетами. Полученное противоречие и завершает доказательство.

8.4. *Первое решение.* Пусть без нарушения общности рассуждений квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1, x_2 одного знака ($x_1 \cdot x_2 > 0$), а квадратный трёхчлен $kx^2 + lx + m$ — различные действительные корни x_3 , x_4 ($x_3 \neq x_4$). По теореме Виета

$$x_1+x_2 = -b/a, \; x_1 \cdot x_2 = c/a \quad \text{и} \quad x_3+x_4 = -l/k, \; x_3 \cdot x_4 = m/k. \quad (*)$$

Воспользовавшись равенствами $(*)$ и неравенством $(x_1+x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2$, справедливым для любых действительных чисел x_1 и x_2, для дискриминанта D квадратного трёхчлена $akx^2 + blx + cm$ получаем оценку:

$$D = (bl)^2 - 4akcm = (ak)^2 \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{l}{k}\right)^2 - 4\,\frac{c}{a}\,\frac{m}{k} \right) =$$

$$= (ak)^2\big((x_1+x_2)^2(x_3+x_4)^2 - 4x_1x_2x_3x_4\big) \geqslant$$

$$\geqslant (ak)^2\big(4x_1x_2(x_3+x_4)^2 - 4x_1x_2x_3x_4\big) =$$

$$= 4(ak)^2x_1x_2((x_3+x_4)^2 - x_3x_4) = 2(ak)^2x_1x_2\big((x_3+x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2\big).$$

Так как $x_1x_2 > 0$ и все остальные сомножители в последнем выражении положительны, то $D > 0$. Значит, квадратный трёхчлен $akx^2 + blx + cm$ имеет два различных действительных корня.

Второе решение. Пусть без нарушения общности рассуждений корни одного знака имеет квадратный трёхчлен ax^2+bx+c. Это равносильно тому, что его дискриминант $D_1 \geqslant 0$ и $ac > 0$. Действительно, корни этого трёхчлена $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D_1}}{2a}$. Чтобы они были одного знака, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_1x_2 > 0 \iff (-b+\sqrt{D_1})(-b-\sqrt{D_1}) > 0 \iff ac > 0.$$

Пусть $D_2 = l^2 - 4km$ — дискриминант квадратного трёхчлена kx^2+lx+m. Так как по условию этот трёхчлен имеет различные действительные корни, то $l^2 - 4km > 0$. Дискриминант D квадратного трёхчлена $akx^2+blx+cm$ равен $D = (bl)^2 - 4ackm$. Стало быть, для решения задачи нам достаточно доказать, что из неравенств

$$ac > 0, \;\; b^2 \geqslant 4ac \quad \text{и} \quad l^2 > 4km \tag{1}$$

вытекает неравенство

$$(bl)^2 > 4ackm. \tag{2}$$

Могут представиться только два случая: либо 1) $km \leqslant 0$, либо 2) $km > 0$.

Если $km \leqslant 0$, то, поскольку $ac > 0$, неравенство (2) очевидно.

Пусть $km > 0$. Тогда, почленно перемножив два последних неравенства в (1), получим, учитывая, что и $ac > 0$, верное неравенство $(bl)^2 > 16ackm$. Но поскольку в рассматриваемом случае $ackm > 0$, то $16ackm > 4ackm$, а значит, $(bl)^2 > 4ackm$, что и требовалось доказать.

9 класс

(12-летняя программа обучения)

9*.1 Ответ: $(p;\ q) = (2;\ 101)$, $(2;\ 97)$, $(2;\ 37)$, $(97;\ 2)$, $(47;\ 2)$ или $(7;\ 2)$.

Заметим, что p и q не могут быть оба нечетными. Действительно, если это не так, то легко видеть, что и при четном x и при нечетном x значение выражения в левой части уравнения $x^2+px+q=100$ будет нечетным и, стало быть, данное равенство не может быть верным ни при каком целом x. Итак, хотя бы одно из чисел p, q должно быть четным. Но единственным четным простым числом является число 2. Поэтому $p=2$ или $q=2$. Рассмотрим отдельно оба эти случая.

Если $p=2$, то данное уравнение принимает вид: $x^2+2x+q-100=0$. Для того, чтобы оно имело целые корни, необходимо, чтобы его дискриминант был полным квадратом, т. е. $4-4\cdot(q-100)=n^2$ для некоторого целого неотрицательного n. Ясно, что $n=2m$ – четное (m – целое неотрицательное). Поэтому $1-q+100=m^2$, или $q=101-m^2$. Так как $q>0$, то $0\leqslant m\leqslant 10$. Поскольку q – простое, и, очевидно, не равно 2, то из указанных значений m достаточно рассмотреть только четные. При этом можно получить только три простых числа: 101, 97 и 37. Нетрудно убедиться, что при $p=2$ и при любом из значений $q=101$, $q=97$ и $q=37$ уравнение $x^2+px+q=100$ действительно имеет целые корни.

Если $q=2$, то данное уравнение принимает вид: $x^2+px-98=0$. Легко видеть, что такое уравнение имеет корни (обозначим их через x_1 и x_2) при любом p. По формулам Виета $x_1\cdot x_2=-98$ и $x_1+x_2=-p$. Отсюда, так как $x_1\cdot x_2=-2\cdot 7\cdot 7$ и $x_1+x_2<0$, возможны только следующие целые значения x_1 и x_2 (для определенности, считаем, что $x_1<0<x_2$).

1) $x_1=-98$, $x_2=1$, тогда $p=-(x_1+x_2)=97$.

2) $x_1=-49$, $x_2=2$, тогда $p=-(x_1+x_2)=47$.

3) $x_1=-14$, $x_2=7$, тогда $p=-(x_1+x_2)=7$.

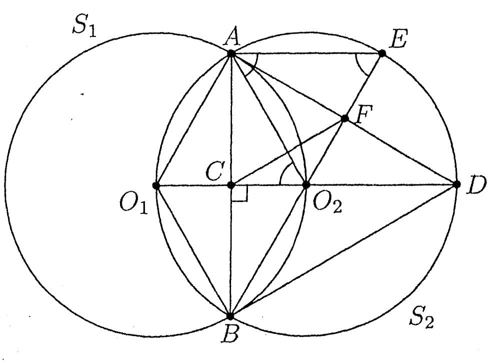
Нетрудно убедиться, что при $q=2$ и при любом из найденных выше значений p уравнение $x^2+px+q=100$ действительно имеет целые корни.

9*.2. Предположим противное, $A = \sqrt{2,\underbrace{000...07}_{n}} = \dfrac{p}{q}$, где p и q взаимно простые числа, $(p, q) = 1$. Тогда

$$A^2 = 2 + \frac{7}{10^n} = \frac{p^2}{q^2} \implies \frac{2 \cdot 10^n + 7}{10^n} = \frac{p^2}{q^2}.$$

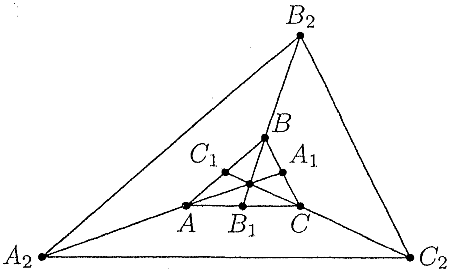
Так как $(2 \cdot 10^n + 7, 10^n) = 1$, то $q^2 = 10^n$, $2 \cdot 10^n + 7 = p^2$. Однако десятичная запись никакого квадрата целого числа не оканчивается на 7. Полученное противоречие и доказывает иррациональность числа A.

9*.3. Так как $O_1O_2 = O_2O_1$ и $O_2 \in S_1$, $O_1 \in S_2$, то радиусы окружностей S_1 и S_2 равны. Значит, $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B$, т. е. четырехугольник AO_1BO_2 – ромб. Поэтому $AB \perp O_1O_2$ и C – точка пересечения его диагоналей AB и O_1O_2. Кроме того, $\angle AO_2O_1 = 60°$, и, значит, $\angle O_2AE = 60°$ (по условию $O_1O_2 \parallel AE$). Следовательно, равнобедренный ($O_2A = O_2E$) треугольник AO_2E – правильный; в частности, $\angle AEO_2 = 60°$.



Далее, так как $\angle BAE$ – прямой ($AB \perp O_1O_2$ и $AE \parallel O_1O_2$), то BE – диаметр окружности S_2, т. е. точки B, O_2 и E лежат на одной прямой. Заметим, что $\angle ADO_1 = \dfrac{1}{2}\angle AO_2O_1 = 30°$. А поскольку $\triangle ADB$ – равнобедренный (CD – его медиана и высота), то он правильный. Наконец, O_2 – центр $\triangle ADB$, поэтому точка F – середина отрезка AD. Итак, CF – средняя линия правильного $\triangle ADB$, а значит, $\triangle ACF$ – правильный, что и требовалось доказать.

9*.4. Предположим, что такого треугольника не существует. Выберем три точки одного цвета, не лежащие на одной прямой: A, B, C (очевидно, что такие точки существуют). Пусть M — центр тяжести



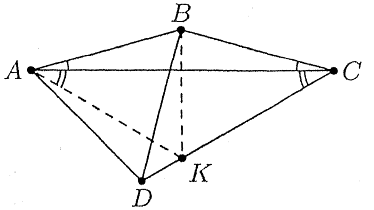
треугольника ABC, т.е. точка пересечения его медиан AA_1, BB_1, CC_1. Пусть A, B, C — точки цвета 1. Тогда по предположению M имеет цвет 2. Тогда рассмотрим точку A_2, расположенную на продолжении отрезка AA_1 (за точку A) причем $AA_2 = 2AA_1$. Аналогично получаем точки B_2 и C_2. Заметим, что A_2A_1 — медиана треугольника A_2BC, причем точка A делит её в отношении $2:1$. Следовательно A — центр тяжести этого треугольника, и поэтому A_2 покрашена в цвет 2. Аналогично в цвет 2 покрашены B_2 и C_2. Заметим, что треугольник $A_2B_2C_2$ получается из ABC при гомотетии с центром M (и коэффициентом 4). Поэтому M — центр тяжести треугольника $A_2B_2C_2$, и тогда этот треугольник имеет все вершины одного цвета — противоречие.

9 класс

(11-летняя программа обучения)

9.1 Ответ: $90°$.

Отметим на CD точку K так, что $\angle CAK = 30°$. Тогда



треугольник AKC равнобедренный ($\angle CAK = \angle ACK = 30°$), а треугольник ABC равнобедренный по условию ($\angle BAC = \angle BCA = 15°$). Поэтому $KB \perp AC$, и, следовательно, $\angle AKB = \angle BKC = 60°$, откуда $\angle AKD = 60^\circ$. Заметим, что

$$\angle BAD + \angle BKD = \angle BAC + \angle CAD + \angle BKA + \angle AKD =$$
$$15^\circ + 45^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно, точки A, B, K, D лежат на одной окружности, откуда следует равенство вписанных углов

$$\angle DBK = \angle DAK = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

и, окончательно,

$$\angle DBC = \angle DBK + \angle KBC = 15^\circ + (90^\circ - \angle BCA) =$$
$$= 15^\circ + (90^\circ - 15^\circ) = 90^\circ.$$

9.2. Заметим, что для любых положительных a b выполнено

$$(2b-1)^2 \geqslant 0 \implies 1 \geqslant 4b(1-b) \overset{b>0}{\implies} \frac{1}{b} \geqslant 4(1-b) \overset{a>0}{\implies} \frac{a}{b} \geqslant 4(a-ab).$$

Поэтому при любом $k = 1, ..., n+1$ выполнено неравенство

$$\frac{x_1x_2...x_k}{x_{k+1}} \geqslant 4(x_1x_2...x_k - x_1x_2...x_kx_{k+1}).$$

Поэтому

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3} + ... + + \frac{x_1x_2...x_n}{x_{n+1}} \geqslant 4(1-x_1) + 4(x_1 - x_1x_2) + ... +$$
$$+4(x_1x_2...x_n - x_1x_2...x_nx_{n+1}) = 4(1 - x_1...x_{n+1}),$$

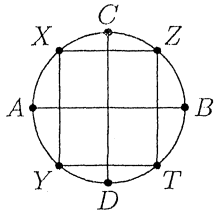
что и требовалось доказать.

Заметим, что равенство достигается при $x_1 = x_2 = ... = x_{n+1} = 0,5$.

9.3. Ответ: б) нет.

а) *Первое решение.* Рассмотрим правильный пятиугольник, вписанный в окружность. Очевидно, что из пяти его вершин по крайней мере три имеют один цвет. С другой стороны, легко видеть, что любые три его вершины являются вершинами некоторого равнобедренного треугольника.

Второе решение. Предположим, что такого треугольника не



существует. Рассмотрим произвольную хорду XY, не являющуюся диаметром, с вершинами одного цвета (пусть они имеют цвет 1). Рассмотрим диаметр AB, перпендикулярный этой хорде. Тогда A и B покрашены в цвет 2 (иначе искомый треугольник нашелся). CD — диаметр, перпендикулярный AB. Тогда C и D покрашены в цвет 1. Пусть Z и T — точки симметричные относительно CD точкам X и Y соответственно. Поскольку X и C покрашены в цвет 1, то Z покрашена в цвет 2. Поскольку Y и D покрашены в цвет 1, то T покрашена в цвет 2. Но тогда треугольник ZBT — равнобедренный, все вершины которого окрашены в один цвет — противоречие.

б) Разделим окружность на две равных полуокружности. Одну из них покрасим в один цвет, другую - во второй. (Граничные точки красим в любой из цветов.) При такой покраске равносторонний треугольник с вершинами одного цвета не найдется, поскольку в полуокружность можно вписать только тупоугольный или прямоугольный треугольник.

9.4. Для удобства будем считать, что на месте знака " $-$ " стоит -1, а на месте знака " $+$ " стоит 1. Обозначим через X исходную таблицу; элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце обозначим x_{ij}, $i = 1, ..., 2n$, $j = 1, ..., 2m$; через $F(X) = Y = (y_{ij})$ и $F^2(X) = F(Y) = Z = (z_{ij})$ — таблицу после одного и двух преобразований соответственно. Пусть $S_i(X)$ произведение чисел, стоящих в i-й строке таблицы X, т.е. $S_i(X) = \prod_{j=1}^{2m} x_{ij}$, а $T_j(X)$ произведение чисел, стоящих в ее j-м столбце X, т.е. $T_j(X) = \prod_{i=1}^{2n} x_{ij}$. Из условия следует, что $y_{ij} = S_i(X)T_j(X)x_{ij}$. Поэтому

$$S_i(Y) = \prod_{j=1}^{2m} y_{ij} = \prod_{j=1}^{2m} S_i(X)T_j(X) = S_i^{2m}(X) \prod_{j=1}^{2m} T_j(X)x_{ij} =$$

$$= S_i^{2m+1}(X)\Pi,$$

$$T_j(Y)=\prod_{i=1}^{2n} y_{ij}=\prod_{i=1}^{2n} S_i(X)T_j(X)x_{ij}=T_j^{2n}(X)\prod_{j=1}^{2n} S_i(X)x_{ij}=$$
$$=T_j^{2n+1}(X)\Pi,$$

где Π — произведение всех чисел в таблице. Но тогда для всех i,j

$$z_{ij}=S_i(Y)T_j(Y)y_{ij}=S_i^{2m+1}(X)T_j^{2n+1}(X)\Pi^2 S_i(X)T_j(X)x_{ij}=x_{ij}$$

при любых первоначальных значениях x_{ij}.

Таким образом, произвольная таблица X может быть получена преобразованием из таблица $F(X)$.

10 класс

10.1 Предположим противное, $A=\sqrt{8,\underbrace{000...01}_{n}}=\dfrac{p}{q}$, где p и q взаимно простые числа, $(p,q)=1$. Тогда

$$A^2=8+\frac{1}{10^n}=\frac{p^2}{q^2}\implies\frac{8\cdot10^n+1}{10^n}=\frac{p^2}{q^2}.$$

Так как $(8\cdot10^n+1,10^n)=1$, то $q^2=10^n$, $8\cdot10^n+1=p^2$. Поэтому $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$. Далее

$$p^2=8\cdot10^n+1\implies p=2k+1\implies k(k+1)=2^{2m+1}\cdot5^{2m}.$$

Поскольку k и $k+1$ взаимно просты и $5^{2m}>2^{2m+1}$ при $m\geqslant1$, то $k=2^{2m+1}$, $k+1=5^{2m}$. Однако, при $m\geqslant1$

$$k+1=5^{2m}>4^{2m}\geqslant2^{2m+1}+2^{2m+1}>2^{2m+1}+1=k+1.$$

Полученное противоречие и доказывает иррациональность числа A.

10.2. Ответ: при любой расстановке знаков.

Для удобства будем считать, что на месте знака "$-$" стоит -1, а на месте знака "$+$" стоит 1. Обозначим через X исходную таблицу, элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце обозначим x_{ij},

$i = 1, ..., 2n$, $j = 1, ..., 2m$; через $F(X) = Y = (y_{ij})$ и $F^2(X) = F(Y) = Z = (z_{ij})$ — таблицу после одного и двух преобразований соответственно. Пусть $S_i(X)$ произведение чисел, стоящих в i-й строке таблицы X, т.е. $S_i(X) = \prod\limits_{j=1}^{2m} x_{ij}$, а $T_j(X)$ произведение чисел, стоящих в ее j-м столбце X, т.е. $T_j(X) = \prod\limits_{i=1}^{2n} x_{ij}$. Из условия следует, что $y_{ij} = S_i(X)T_j(X)$. Поэтому

$$S_i(Y) = \prod_{j=1}^{2m} y_{ij} = \prod_{j=1}^{2m} S_i(X)T_j(X) = S_i^{2m}(X)\prod_{j=1}^{2m} T_j(X) = S_i^{2m}(X)\Pi,$$

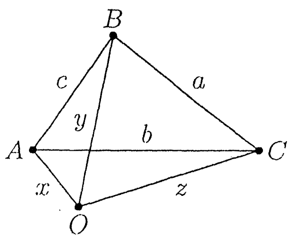
$$T_j(Y) = \prod_{i=1}^{2n} y_{ij} = \prod_{i=1}^{2n} S_i(X)T_j(X) = T_j^{2n}(X)\prod_{j=1}^{2n} S_i(X) = T_j^{2n}(X)\Pi,$$

где Π — произведение всех чисел в таблице. Но тогда

$$z_{ij} = S_i(Y)T_j(Y) = S_i^{2m}(Y)T_j^{2n}(X)\Pi^2 = 1 \quad \forall\, i, j,$$

при любых первоначальных значениях x_{ij}. То есть при любой расстановке знаков два последовательных преобразования превращают таблицу в таблицу, содержащие только знаки " + ".

10.3. Пусть в начальный момент тараканы находились в точке O, а затем оказались в вершинах треугольника ABC. Обозначим $a{=}BC$, $b{=}AC$, $c{=}AB$, $x = OA$, $y = OB$, $z = Oc$. Из неравенства треугольника следует $x + y \geqslant c$, $y + z \geqslant a$, $z + x \geqslant b$, откуда



$$x + y + z \geqslant 0,5(a + b + c). \qquad (1)$$

Так как радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, равен 2, то его площадь S равна $S = rp = a + b + c$. С другой стороны,

$$S = 0,5ab\sin\angle C = 0,5bc\sin\angle A = 0,5ca\sin\angle B.$$

Поэтому $a + b + c \leqslant 0,5ab$, $a + b + c \leqslant 0,5bc$, $a + b + c \leqslant 0,5ca$, и, так как по крайней мере одно из этих неравенств должно быть строгим (только один из синусов может быть равен 1)

$$6(a + b + c) < ab + bc + ca. \tag{2}$$

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,\ b^2+c^2 \geqslant 2bc,\ c^2+a^2 \geqslant 2ca \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Следовательно,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geqslant 3(ab+bc+ca) \overset{(2)}{>} 18(a+b+c),$$

откуда $a + b + c > 18$. Из (1) теперь следует, что $x + y + z > 9$, и, значит, по крайней мере одно их чисел x, y или z должно быть больше 3. Поскольку длина любого отрезка, соединяющего пару точек, всегда не больше, чем длина кривой, соединяющей эти же точки, то это и означает, что по крайней мере один из тараканов пробежал путь, длина которого больше 3.

10.4. Ответ: б) нельзя; в) можно.

а) Предположим, что такой трапеции (или прямоугольника) не существует. Пусть AB — диаметр окружности. CD — другой диаметр, перпендикулярный ему. Заметим, что найдётся не более одной хорды, перпендикулярной AB, с концами цвета 1. Иначе если есть 2 такие хорды, то их концы образуют искомую трапецию (или прямоугольник). Аналогично: найдётся не более одной хорды, перпендикулярной AB с концами цвета 2. Поэтому при симметрии относительно AB точка переходит в точку другого цвета (за исключением конечного числа точек). То же самое можно сказать про симметрию относительно CD. Пусть O — центр окружности. Заметим, что композиция симметрий относительно AB и CD есть центральная симметрия относительно точки O. Следовательно, симметрия относительно O переводит точку в точку того же цвета (за исключением конечного числа точек, которые мы назовём плохими). Среди точек, которые плохими не являются, выберем 2 точки одного цвета, которые не будут диаметрально противоположны. Тогда эти 2 точки вместе с диаметрально противоположными им точками образуют прямоугольник с вершинами одного цвета. Противоречие.

б) Разделим окружность на 2 полуокружности. Одну покрасим в один цвет, другую - в другой. (Граничные точки покрасим в разные цвета). Тогда любые 2 диаметрально противоположные точки будут разного цвета. Любой вписанный в окружность прямоугольник содержит 2 диаметрально противоположные точки. Поэтому при такой раскраске искомый прямоугольник не найдётся.

в) Смотри решение задачи 11.4.

11 класс

11.1 Ответ: $a_k x^k$, $k = 0, 1, ..., n$.

Пусть искомый многочлен имеет вид $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, ..., n$. Рассмотрим произведение

$$P(x)P(1/x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{n} a_j x^{-j} = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i-j=k} a_i a_j x^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j-i=k} a_i a_j x^{-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i-j=k} a_i a_j (x^k + x^{-k}) \geqslant$$

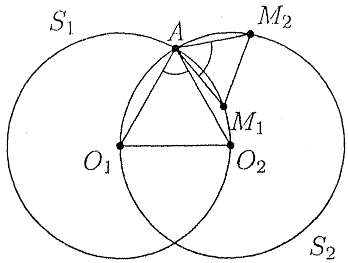
$$\geqslant \left[a_i a_j \geqslant 0, x^k + x^{-k} \geqslant 2, k \geqslant 1, x > 1\right] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i-j=k} 2a_i a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = (P(1))^2.$$

Заметим, что знак равенства возможен, если только $a_i a_j = 0$ для всех i и j. Поэтому, все коэффициенты искомого многочлена, за исключением, быть может, одного, равны нулю. Таким образом, многочлен должен быть или тождественно равным нулю, или иметь вид $a_k x^k$, $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, ..., n$. Легко проверить, что все такие многочлены удовлетворяют условию задачи.

11.2. Ответ: **б)** по окружности, описанной вокруг $\triangle AO_1O_2$, с постоянной линейной скоростью $v/\sqrt{3}$.

а) Так как $O_1O_2 = O_2O_1$ и $O_2 \in S_1$, $O_1 \in S_2$, то радиусы окружностей S_1 и S_2 равны. В частности, $O_1A = O_2A = O_1O_2$, т. е. $\triangle AO_1O_2$ — правильный и $\angle O_1AO_2 = 60°$. Поворот $\mathcal{R}_A^{60°}$ переводит точку O_1 в точку O_2, а значит, окружность S_1 — в окружность S_2 и поэтому точку M_1 переводит в точку M_2. Следовательно, $\triangle AM_1M_2$ — правильный ($AM_1 = AM_2$ и $\angle M_1AM_2 = 60°$), что и требовалось доказать.



б) Докажем, что центр C правильного $\triangle AM_1M_2$ движется по окружности, описанной вокруг $\triangle AO_1O_2$ с постоянной линейной скоростью $v/\sqrt{3}$.

Первое решение. Пусть $\alpha = \smile AM_1 = \smile AM_2$ (дуги отсчитываются по ходу часовой стрелки). Могут представиться только четыре геометрически различных случая: 1) $0 < \alpha \leqslant 60°$, 2) $60° < \alpha \leqslant 120°$, 3) $120° < \alpha \leqslant 240°$, 4) $240° < \alpha < 360°$. Случаи 1) – 4) отличаются друг от друга только взаимным расположением относительно друг друга точек A, O_1, O_2 и C; рассуждения в каждом из этих случаев, фактически, одни и те же. Так как C — центр правильного $\triangle AM_1M_2$, то $\angle AM_1C = 30°$ и $\angle ACM_1 = 120°$.

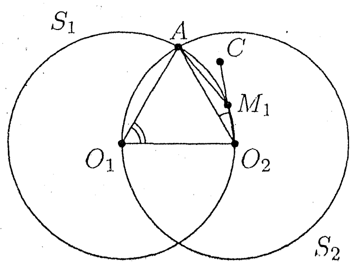


Рис. 1

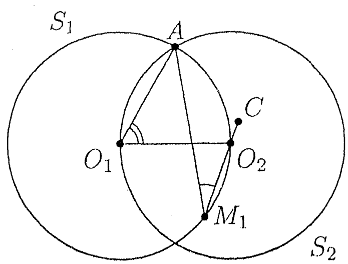


Рис. 2

1) В этом случае (см. рис. 1) имеем: $\angle AM_1O_2 = 150°$ (как вписанный в окружность S_1 угол, опирающийся на дугу $\smile O_2A = 360° - 60° = 300°$). Значит, так как $\angle AM_1C = 30°$, то точки C, M_1 и O_2 лежат на одной прямой. Но поскольку $\angle AO_1O_2 + \angle ACM_1 = 60° + 120° = 180°$, то четырёхугольник O_1ACO_2 – вписанный.

2) В этом случае (см. рис. 2) имеем: $\angle AM_1O_2 = 30°$ (как вписанный в окружность S_1 угол, опирающийся на дугу $\smile AO_2 = 60°$), а поскольку и $\angle AM_1C = 30°$, то точки C, M_1 и O_2 лежат на одной прямой. Так как $\angle AO_1O_2 + \angle ACO_2 = 60° + 120° = 180°$, то четырёхугольник O_1ACO_2 – вписанный.

3) и 4) В этих двух случаях (см. рис. 3 и 4 соответственно) имеем:

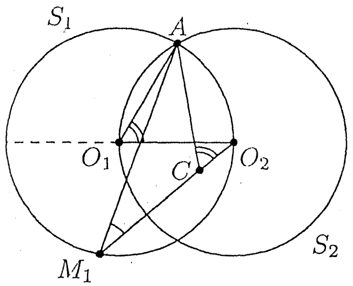


Рис. 3

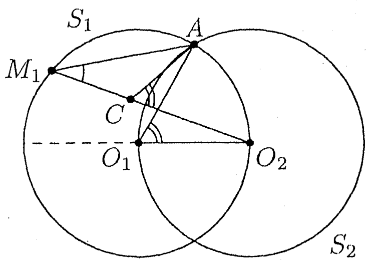
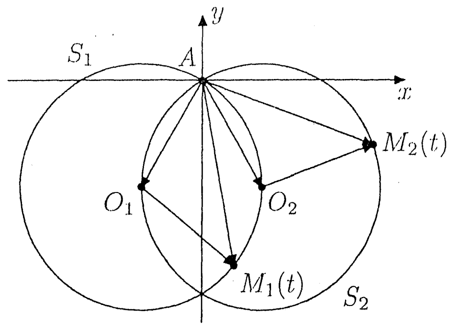


Рис. 4

$\angle AM_1O_2 = 30°$ (как вписанный в окружность S_1 угол, опирающийся на дугу $\smile AO_2 = 60° - 60° = 300°$), а поскольку и $\angle AM_1C = 30°$, то точки C, M_1 и O_2 лежат на одной прямой. Так как $\angle ACO_2 = 180° - \angle M_1CA = 180° - 120° = 60°$, то $\angle AO_1O_2 = \angle ACO_2$. Из равенства этих углов, поскольку точки O_1 и C лежат по одну сторону от прямой AO_2, заключаем, что в случае 3) четырёхугольник O_1AO_2C, а в случае 2) четырёхугольник O_1CAO_2 являются вписанными.

Так как отношение радиусов окружности S_1 и окружности, описанной вокруг $\triangle AO_1O_2$, равно $\sqrt{3}$, и таково же отношение их хорд $AM_1 : AC = \sqrt{3}$, то угловые меры дуг $\smile AM_1$ и $\smile AC$ равны, а значит, линейная скорость точки C равна $v/\sqrt{3}$.

Второе решение. Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке. Считая радиус окружностей S_1 и S_2 единичным, находим координаты их центров: $O_1\left(-1/2\,;\ -\sqrt{3}/2\right)$ и $O_2\left(1/2\,;\ -\sqrt{3}/2\right)$. Обозначим через $M_1(t)$, $M_2(t)$ и $C(t)$ те точки плоскости, в которых в момент времени t находятся точки M_1, M_2 и точка C — центр $\triangle AM_1M_2$ (без нарушения общности считаем, что точки M_1 и M_2 в момент времени $t=0$ совпадают с точкой A и что к моменту t они проходят t радиан).



Имеем (см. рис.): $\overrightarrow{AM_k(t)} = \overrightarrow{AO_k} + \overrightarrow{O_kM_k(t)}$, $k=1,2$. Так как

$$\overrightarrow{AO_1} = \left(-1/2\,;\ -\sqrt{3}/2\right), \quad \overrightarrow{AO_2} = \left(1/2\,;\ -\sqrt{3}/2\right)$$

и

$$\overrightarrow{O_1M_1(t)} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right),$$

$$\overrightarrow{O_2M_2(t)} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-t\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}-t\right)\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right),$$

то

$$\overrightarrow{AM_1(t)} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right),$$

$$\overrightarrow{AM_2(t)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right).$$

Поскольку $\triangle AM_1(t)M_2(t)$ — правильный, то

$$\overrightarrow{AC(t)} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM_1(t)} + \overrightarrow{AM_2(t)}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin t, -\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos t\right) =$$

$$= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin t, \cos t) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC(t)},$$

где O — центр правильного $\triangle AO_1O_2$. Так как длина вектора $\overrightarrow{OC(t)}$ равна $1/\sqrt{3}$ — радиусу окружности, описанной вокруг $\triangle AO_1O_2$, то последнее равенство означает, что точка C движется по этой же окружности с той же угловой скоростью, что и точки M_1 и M_2, а значит, её линейная скорость равна $v/\sqrt{3}$.

11.3. Ответ: $2^{2n+2m-2}$.

Для удобства будем считать, что на месте знака " − " стоит -1, а на месте знака " + " стоит 1. Пусть $Y = (y_{ij})$ — достижимая таблица, полученная преобразованием из какой-то таблицы $X = (x_{ij})$. Обозначим через $S_i(X)$ произведение чисел, стоящих в i-й строке таблицы X, т.е. $S_i(X) = \prod\limits_{j=1}^{2m} x_{ij}$, а через $T_j(X)$ — произведение чисел, стоящих в ее j-м столбце X, т.е. $T_j(X) = \prod\limits_{i=1}^{2n} x_{ij}$. Из условия следует, что $y_{ij} = S_i(X)T_j(X)$. Поэтому выполняются соотношения:

1) $y_{ij}y_{11}=y_{1j}y_{i1}$;

2) $y_{11}y_{12}\cdot\ldots\cdot y_{1\,2m} = y_{11}y_{21}\cdot\ldots\cdot y_{2n\,1}$ (и равно произведению чисел во всей таблице X).

Поэтому достижимая таблица однозначно определяется значениями элементов $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{12m}, y_{21}, y_{31} \ldots, y_{(2n-1)1}$.

Поэтому осталось показать, что какими бы мы ни выбрали эти $2n+2m-2$ элемента, найдётся достижимая таблица Y с такими элементами. Пусть $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{12m}, y_{21}, y_{31} \ldots, y_{(2n-1)1}$ как-то заданы. Полагаем:

$x_{ij} = 1$ для всех $i = 2, 3, \ldots, 2n$, $j = 2, 3, \ldots, 2m$;

$x_{1j} = y_{1j}$ для всех $j = 2, 3, \ldots, 2m$;

$x_{i1} = y_{i1}$ для всех $i = 2, 3, \ldots, 2n - 1$;

$x_{11} = y_{12}y_{13} \cdot \ldots \cdot y_{12m};$

$x_{2n1} = x_{11}y_{21}y_{31} \cdot \ldots \cdot y_{(2n-1)1}.$

Заметим, что при таком выборе значений таблицы X произведения $S_1(X) = T_1(X) = 1$. Поэтому при $y_{11} = 1$ таблица Y будет получена из X после одного ее преобразования.

Если же $y_{11} = -1$, то поменяем в построенной ранее таблице значения x_{i1}, $i = 2, 3, ..., 2n$, на противоположные. Легко видеть, что такая новая таблица после одного преобразования даст нужную таблицу.

11.4. Блоком назовем $N+1$ точку на окружности: A_1, $A_2 \ldots$, A_{N+1}, такие что они лежат на окружности именно в этом порядке и длина дуги $A_iA_{i+1} = a$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, где a — некоторая константа, которую мы выбираем в зависимости от N. Разместим N^2+1 блоков на половине окружности, причем так, чтобы они не перекрывались (a можно выбрать достаточно маленьким, чтобы это было возможно). Заметим, что в каждом блоке есть две точки одного цвета. Каждому блоку ставим в соответствие пару (c, l), где c — цвет каких-то двух точек блока (которые оказались одного цвета), l — расстояние между этими двумя точками. Величины c и l могут принимать только по N различных значений, поэтому найдется два блока, которым сопоставляются одинаковые пары. Следовательно, в них есть по две точки одного цвета (общего для обоих блоков) и расположенных на одном расстоянии. Эти точки и образуют искомую трапецию. Заметим, что она не вырождается в прямоугольник, так как все точки расположены на одной полуокружности.