Министерство образования Республики Беларусь

« LVI »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Гродно 2006

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 56-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Акулич И. Ф. (9.8)
Архипов С.А. (11.7)
Барабанов Е.А. (10.8)
Блоцкий М.Г. (11.8)
Воронович И.И. (8*.6, 8.5, 9.5, 10.6, 10.7, 10.8, 11.5)
Жук И.К. (9.7, 10.5)
Карамзин В.П. (9.6)
Каскевич В.И. (10.8)
Лебедь В. В. (8*.5, 8*.8, 8.7, 11.6)
Мазаник С.А. (8*.7, 8.6, 8.8, 10.8)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, Д.В.Дудко, В.И.Каскевич, В.В.Лебедь, С.А.Мазаник.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс
(12-летняя программа обучения)

8*.5. Таблица $n \times m$ ($n \leqslant m$) заполняется по правилам, похожим на правила игры "Сапер": в некоторые клетки помещается по мине, а в остальных записывается количество мин в соседних с ними (по стороне) клетках (см. рисунок). Затем вычисляется сумма записанных в таблице чисел (на рисунке она равна 5).

2	•	1
•	2	0

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?

8*.6. Докажите, что при всех различных натуральных a, b и c сумма

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

является натуральным числом.

8*.7. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$(a,b)+3[a,b]-ab=0,$$

где $(9a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b, а $[a,b]$ — их наименьшее общее кратное.

8*.8. В стране есть несколько городов, некоторые из которых соединены между собой прямыми авиалиниями. На прямой перелет между городами, находящимися на расстоянии d друг от друга, затрачивается $\dfrac{d}{d+1}$ литров бензина.

Докажите, что на перелет напрямик между городами, соединенными авиалинией, требуется меньше бензина, чем на перелет через другие города.

8 класс
(11-летняя программа обучения)

8.5. Докажите, что для любых попарно различных натуральных чисел a, b, c число

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

является квадратом некоторого натурального числа.

8.6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Известно, что C_1A_1 — биссектриса угла BC_1C. Докажите, что C_1B_1 — биссектриса угла AC_1C.

8.7. Таблица $n \times m$ ($n \leqslant m$) заполняется по правилам, похожим на правила игры "Сапер": в некоторые клетки помещается по мине, а в остальных записывается количество мин в соседних с ними **по диагонали** клетках (см. рисунок). Затем вычисляется сумма записанных в таблице чисел (на рисунке она равна 3).

•	•	0
•	1	2
0	•	0

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?

8.8. Для некоторых восьми натуральных чисел, больших 1 и не превосходящих 250, вычисляются произведения каждых семи из них. Известно, что среди этих восьми произведений только два совпадают.

Можно ли восстановить исходные восемь чисел, если известны семь различных из указанных произведений ?

9 класс

9.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1.

Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из C_1 на отрезки AC, BC, BB_1 и AA_1 лежат на одной прямой.

9.6. Даны действительные числа a, b, k ($k > 0$). Окружность с центром в точке (a, b) имеет с параболой $y = kx^2$ три общие точки, одна из которых — начало координат, а две другие лежат на прямой $y = kx + b$.

Докажите, что $b \geqslant 2$.

9.7. Какие значения может принимать выражение

$$xyz + 3xy + 2xz - yz + 6x - 3y - 2z\,,$$

где x, y, z — действительные числа, большие 1, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} xy^2 - y^2 + 2xy + 4x - 2y = 4004\,, \\ xz^2 - z^2 + 6xz + 9x - 6z = 1009\,? \end{cases}$$

9.8. Квадрат $2n \times 2n$ линиями, параллельными его сторонам, разбит на $4n^2$ квадратиков 1×1.

Какое наибольшее число диагоналей в квадратиках 1×1 можно провести, так, чтобы никакие две из проведенных диагоналей не имели общих точек (в том числе, и в концах)?

10 класс

10.5. Различные точки A, B, C лежат на параболе $y = x^2$. Пусть R - радиус окружности, проходящей через A, B и C.

а) Докажите, что $R > \frac{1}{2}$.

б) Существует ли константа $\lambda > \frac{1}{2}$, такая, что при любом выборе различных точек A, B, C будет выполняться неравенство $R \geqslant \lambda$?

10.6. Последовательность пар действительных чисел задана следующим образом:

$$(a_{n+1}; b_{n+1}) = (a_n^2 - 2b_n; b_n^2 - 2a_n) \quad \text{при всех } n \geqslant 1.$$

Найдите $2^{512}a_{10} - b_{10}$, если $4a_1 - 2b_1 = 7$.

10.7. На высоте CC_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка K, отличная от точки пересечения высот.

Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки C_1 на отрезки AC, BC, BK и AK лежат на одной окружности.

10.8. Равносторонний треугольник со стороной n линиями, параллельными его сторонам, разбит на n^2 одинаковых равносторонних треугольников (со стороной 1).

Какое наименьшее число этих треугольников нужно отметить, так, чтобы любой из неотмеченных треугольников имел с отмеченными хотя бы одну общую сторону?

11 класс

11.5. На координатной плоскости расположен выпуклый 4-угольник $ABCD$. Его вершины A и D принадлежат отрицательной ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$, а B и C – положительной ветви этой гиперболы, причем B лежит левее C, а отрезок AC проходит через начало координат.

Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

11.6. Таблица $n \times m$ ($n \leqslant m$) заполняется по обычным правилам игры "Сапер": в некоторые клетки помещается по мине, а в остальных записывается количество мин в соседних с ними (по стороне или вершине) клетках (см. рисунок). Затем вычисляется сумма записанных в таблице чисел (на рисунке она равна 9).

1	2	•
•	3	1
•	2	0

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?

11.7. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены высоты AH_A, BH_B, CH_C и медиана BM; K — точка пересечения медианы BM и высоты AH_A, T — точка на стороне BC такая, что $KT \parallel AC$, H — точка пересечения высот.

Докажите, что прямые, проходящие через пары точек (H_C, H_A), (H, T) и (A, C), пересекаются в одной точке.

11.8. а) Существуют ли такие натуральные a и b, что для любого натурального n число $a \cdot 2^n + b \cdot 5^n$ является квадратом натурального числа?

б) Существуют ли такие натуральные a, b и c, что для любого натурального n число $a \cdot 2^n + b \cdot 5^n + c$ является квадратом натурального числа?

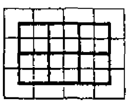
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

(12-летняя программа обучения)

8*.5. Ответ: $2nm - n - m$.

Соединим центры соседних по стороне клеток отрезками (см. рисунок) и *отметим* отрезки, соединяющие клетку, в которой записано число (такие клетки назовем клетками *Ч-типа*), и клетку с миной (клетки *М-типа*).



Число в клетке Ч-типа в точности равно количеству отмеченных отрезков с концом в этой клетке. Но у каждого отмеченного отрезка ровно 1 конец будет в клетке Ч-типа. Отсюда рассматриваемая в задаче сумма совпадет с количеством отмеченных отрезков. Тогда эта сумма не превышает общего количества построенных нами отрезков, а это $n(m-1) + m(n-1) = 2nm - n - m$. С другой стороны, если мы раскрасим клетки доски в шахматном порядке и поставим мины, скажем, во все белые клетки, то для такой расстановки все $2nm - n - m$ отрезков окажутся отмеченными, т.е. полученная оценка достигается.

Замечание. Задачу можно решить и с помощью индукционных рассуждений: сначала индукцией по n оценку получаем для таблицы $n \times n$, а затем ведем индукцию по $m \geqslant n$.

8*.6. Обозначим

$$A = \frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Заметим, что

$$T = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(c-b) + (a-c) + (b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \qquad (1)$$

Точно так же легко получить, что

$$Q = \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(c^2-b^2)+(a^2-c^2)+(b^2-a^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \qquad (2)$$

Найдем, чему равно следующее выражение

$$P = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

$$= \frac{c(a^2-b^2)-c^2(a-b)-ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

$$= \frac{(a-b)(ca+cb-c^2-ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(c(b-c)-a(b-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(c-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1. \qquad (3)$$

Обозначим $S = a+b+c$. С учетом (1) имеем

$$A = A+T(a+b)(b+c)(c+a) = \frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-b)(a-c)} +$$

$$\frac{b(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(b-c)(b-a)} +$$

$$+ \frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{S(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{S(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{S(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{S(S-c)(S-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{S(S-a)(S-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{S(S-b)(S-a)}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{S^3 - S^2(b+c) + Sbc}{(a-b)(a-c)} + \frac{S^3 - S^2(c+a) + Sca}{(b-c)(b-a)} +$$

$$+ \frac{S^3 - S^2(a+b) + Sab}{(c-a)(c-b)} = S^3 \cdot T - S^2 \cdot Q + S \cdot P,$$

откуда, учитывая (1) — (3), получим $A = S = a+b+c$. Таким образом, для любых различных натуральных a, b, c сумма A определена и является натуральным числом.

8*.7. Ответ: пары $(4;16)$, $(16;4)$, $(6;12)$, $(12;6)$.

Пусть $d = (a,b)$, тогда $a = xd$, $b = yd$, $(x,y) = 1$. Исходное уравнение перепишем в виде $d^2 + 3xyd - xyd^2 = 0$. Сократив на d, получим $d + 3xy - 2xyd = 0$. Из полученного равенства следует, что $3xy \vdots d$, откуда $d \leqslant 3xy$, и кроме того, $d \vdots xy$. Поэтому $d = xy$, $d = 2xy$, либо $d = 3xy$.

При $d = xy$ имеем $xy + 3xy - (xy)^2 = 0$, $\Longrightarrow d = xy = 4$, откуда ($(x,y) = 1$) $x = 1$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 1$. Поэтому $a = 4$, $b = 16$ или $a = 16$, $b = 4$.

При $d = 2xy$ имеем $2xy + 3xy - 2(xy)^2 = 0$, что, очевидно, не возможно ни при каких натуральных x, y.

При $d = 3xy$ имеем $3xy + 3xy - 3(xy)^2 = 0$, $\Longleftrightarrow$ $xy = 2, d = 6$, откуда $x = 1, y = 2$ или $x = 2, y = 1$. Поэтому $a = 6$, $b = 12$, или $a = 12$, $b = 6$.

8*.8. Пусть $\rho(X,Y)$ обозначает расстояние между городами X и Y, а $m(X,Y)$ – количество бензина, необходимое на перелет между ними. Пусть далее A и B – некоторые города, соединенные авиалинией.

Докажем сначала, что перелет из города A в город B напрямик дешевле, чем через город C. По неравенству треугольника $\rho(A,B) \leqslant$

$\rho(A,C)+\rho(C,B)$. Далее, функция $F(d)=\dfrac{d}{d+1}=1-\dfrac{1}{d+1}$ возрастает при $d>0$, откуда

$$m(A,B)=F(\rho(A,B))\leqslant F(\rho(A,C)+\rho(C,B))=$$
$$=\frac{\rho(A,C)+\rho(C,B)}{\rho(A,C)+\rho(C,B)+1}=\frac{\rho(A,C)}{\rho(A,C)+\rho(C,B)+1}+$$
$$+\frac{\rho(C,B)}{\rho(A,C)+\rho(C,B)+1}<\frac{\rho(A,C)}{\rho(A,C)+1}+\frac{\rho(C,B)}{\rho(C,B)+1}=$$
$$=F(\rho(A,C))+F(\rho(C,B))=m(A,C)+m(C,B),$$

что и требовалось.

Докажем теперь, что перелет из города A в город B напрямик дешевле, чем через города $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Как показано выше,

$$m(A,B)=F(\rho(A,B))<F(\rho(A,C_1))+F(\rho(C_1,B))<$$
$$<F(\rho(A,C_1))+F(\rho(C_1,C_2))+F(\rho(C_2,B))<\ldots<$$
$$<F(\rho(A,C_1))+F(\rho(C_1,C_2))+\cdots+F(\rho(C_k,B))=$$
$$=m(A,C_1)+m(C_1,C_2)+\cdots+m(C_k,B).$$

Утверждение доказано.

8 класс
11-летняя программа обучения

8.5. Приводя к общему знаменателю, получим

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{a^2(a+b)(a+c)(c-b)+b^2(b+c)(b+a)(a-c)+c^2(c+a)(c+b)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{A}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Перегруппируем слагаемые в числителе:

$$a^2(a+b)(a+c)(c-b)+b^2(b+c)(b+a)(a-c)=$$

$$=(a+b)\big(a^2((a-b)+(b+c))(c-b)+b^2((a-b)+(b-c))(b+c)\big)=$$

$$=(a+b)\big(a^2(a-b)(c-b)+a^2(c^2-b^2)+b^2(a-b)(b+c)+b^2(b^2-c^2)\big)=$$

$$=(a+b)(a-b)\big(a^2(c-b)+b^2(b+c)-(a+b)(b^2-c^2)\big)\quad\Longrightarrow$$

$$A=(a-b)\big(a^2(a+b)(c-b)+b^2(a+b)(b+c)-$$

$$-(a+b)^2(b^2-c^2)-c^2(c+a)(c+b)\big).$$

Так как

$$b^2(a+b)(b+c)-c^2(c+a)(c+b)=(b+c)(b^2a+b^3-c^3-c^2a)=$$

$$=(b+c)(b-c)(b^2+bc+c^2+a(b+c)),$$

то

$$A=(a-b)(b-c)\Big(-a^2(a+b)-(a+b)^2(b+c)+$$

$$+(b+c)(b^2+bc+c^2+a(b+c))\Big)=$$

$$=(a-b)(b-c)\Big(-a^3-a^2b-a^2b-2ab^2-b^3-a^2c-2abc-b^2c+b^3+b^2c+$$

$$+bc^2+ab^2+abc+b^2c+bc^2+c^3+abc+ac^2\Big)=$$

$$=(a-b)(b-c)\Big(-a^3-2a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c+2bc^2+c^3\Big)=$$

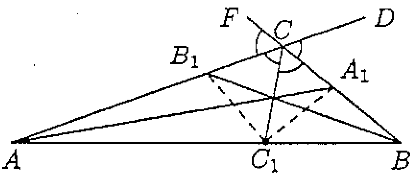
$$=(a-b)(b-c)\Big((c^3-a^3)+2b(c^2-a^2)+ac(c-a)+b^2(c-a)\Big)=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)\Big(a^2+ac+c^2+2bc+2ba+ac+b^2\Big)=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2.$$

Теперь очевидно, что исходное число представляет собой квадрат натурального числа $(a+b+c)$.

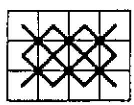
8.6. *Первое решение.* Воспользуемся теоремой о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Так как AA_1 – биссектриса угла CAB, то $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{AC}{AB}$. Так как C_1A_1 — биссектриса угла CC_1B, то $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{CC_1}{C_1B}$. Поэтому $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CC_1}{C_1B}$. С другой стороны, так как BB_1 — биссектриса угла CBA, то $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{BC}$, и так как CC_1 — биссектриса угла ACB, то $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CB}$. Тогда $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AC \cdot C_1B}{BC \cdot CC_1} = \dfrac{AC_1 \cdot C_1B}{C_1B \cdot CC_1} = \dfrac{AC_1}{CC_1}$. Следовательно, C_1B_1 — биссектриса угла AC_1C.



Второе решение. Так как AA_1 — биссектриса угла CAB, то точка A_1 равноудалена от прямых AB и AC, и так как C_1A_1 — биссектриса угла CC_1B, то точка A_1 равноудалена от прямых CC_1 и C_1B. Поэтому точка A_1 равноудалена от прямых AC и CC_1. Поскольку точка A_1 лежит вне угла ACC_1, то она лежит на биссектрисе угла C_1CD (см. рисунок). Следовательно, $\angle DCB = \angle BCC_1 = \angle C_1CA$. Поэтому все эти три угла равны по $60°$, и, значит, $\angle ACB = 120°$. Из полученного равенства получаем $\angle FCA = 60°$, откуда следует, что AC — биссектриса угла FCC_1. Поэтому точка B_1 равноудалена от прямых FC (она же прямая BC) и CC_1. Кроме того, так как BB_1 биссектриса угла CBA, то точка B_1 равноудалена от прямых BC и AB. Поэтому, точка B_1 равноудалена от прямых CC_1 и AB, т.е. лежит на биссектрисе угла AC_1C.

8.7. Ответ: $2(n-1)(m-1)$.

Соединим центры соседних по диагонали клеток отрезками (см. рисунок) и *отметим* отрезки, соединяющие клетку, в которой записано число (такие клетки назовем клетками *Ч-типа*), и клетку с миной (клетки *М-типа*).



Число в клетке Ч-типа в точности равно количеству отмеченных отрезков с концом в этой клетке. Но у каждого отмеченного отрезка ровно 1 конец будет в клетке Ч-типа. Отсюда рассматриваемая в задаче сумма совпадет с количеством отмеченных отрезков. Тогда эта сумма не превышает общего количества построенных нами отрезков, а это $2(n-1)(m-1)$. С другой стороны, если мы поставим мины во все клетки строк с нечетными номерами и только туда, то для такой расстановки все $2(n-1)(m-1)$ отрезков окажутся отмеченными, т.е. полученная оценка достигается.

Замечание. Задачу можно решить и с помощью индукционных рассуждений: сначала индукцией по n оценку получаем для таблицы $n \times n$, а затем ведем индукцию по $m \geqslant n$.

8.8. Ответ : да, можно.

Так как только два из полученных произведений различны, то, следовательно, среди восьми исходных чисел только два равны между собой. Обозначим различные семь из этих восьми чисел через $a_1 < a_2 < \ldots < a_7$, а восьмое число — через x. Пусть $P = a_1 a_2 \ldots a_7 x$. Тогда различными (и известными) являются числа $P_i = P/a_i$, $i = 1, \ldots, 7$. Вычислим значение произведений $A_i = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots P_7 \cdot P_i = \dfrac{P^7 x}{a_i}$, $i = 1, \ldots, 7$. Ясно, что при $a_i = x$ число A_i будет являться седьмой степенью натурального числа. Поэтому, если среди чисел A_i только одно число будет являться седьмой степенью натурального числа, например, число A_1, то тогда $P = \sqrt[7]{A_1}$, а значит, $a_i = P/P_i$, $i = 1, \ldots, 7$, и $x = a_1$.

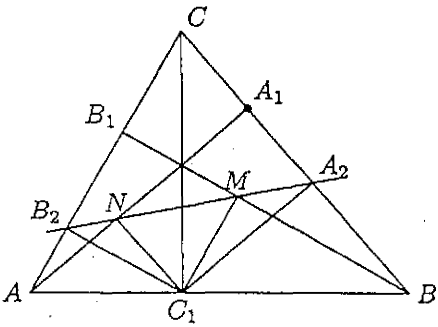
Докажем, что в условиях задачи не менее двух чисел из A_i не могут являться седьмыми степенями натуральных чисел. Допустим, что это не так. Пусть $A_k = m^7$ и $A_j = n^7$ для некоторых натуральных $m \neq n$ и $k \neq j$, $k, j \in \{1, \ldots, 7\}$. Тогда $\dfrac{A_k}{A_j} = \dfrac{a_j}{a_k} = \dfrac{m^7}{n^7}$, откуда $a_k = \dfrac{a_j n^7}{m^7} = a_j \dfrac{r^7}{q^7}$, где НОД$(r, q) = 1$, $r \neq q$. Отсюда, поскольку a_k — натуральное число, то $a_j = d \cdot q^7$ для некоторого натурального d.

Но так как по условию $a_j \leqslant 250 < 256 = 2^8 < 3^7$, то $1 \leqslant q \leqslant 2$. Аналогично, получаем, что $1 \leqslant r \leqslant 2$.

Таким образом, могут представиться только две возможности: либо $r = 1$, $q = 2$, либо $r = 2$, $q = 1$, т. е., соответственно, либо $a_j = 2^7 a_k$, либо $a_k = 2^7 a_j$. Но так как по условию все числа больше 1, то оба эти случая невозможны, поскольку в первом из них $a_j \geqslant 2^8 > 250$, а во втором — $a_k > 2^8 > 250$. Следовательно, среди чисел A_i, $i = 1, \ldots, 7$, лишь одно является седьмой степенью натурального числа, а тогда, как показано выше, все исходные восемь чисел восстанавливаются однозначно.

9 класс

9.5. Пусть основания перпендикуляров, опущенных из C_1 на отрезки AC, BC, BB_1 и AA_1, — это точки B_2, A_2, M и N соответственно; и пусть $\angle CBA = \beta$. Тогда, так как C_1, B_2, C и A_2 лежат на одной окружности, то $\angle CB_2A_2 = \angle CC_1A_2 = 90° - \angle C_1CA_2 = \angle ABC = \beta$. С другой стороны, так как B_2, A, C_1 и N лежат на одной окружности, то



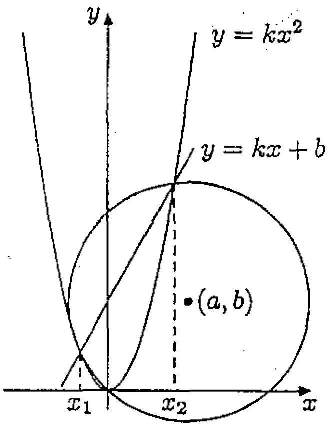
$\angle AB_2N = 90° + \angle C_1B_2N = 90° + \angle C_1AA_1 = 90° + 90° - \angle ABC = 180° - \beta$. Итак $\angle AB_2N + \angle CB_2A_2 = 180°$. Аналогично показывается, что $\angle BA_2M + \angle CA_2B_2 = 180°$. Два последних равенства и означают, что все точки B_2, N, M и A_2 лежат на одной прямой.

9.6. Из условия следует, что уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, а так как окружность проходит через начало координат, то $a^2 + b^2 = R^2$ и уравнение окружности можно переписать в виде $x^2 - ax + y^2 - 2by = 0$.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — указанные в условии точки, которые лежат на параболе, прямой и окружности. Тогда

$$kx_1^2 = kx_1 + b, \quad (1)$$
$$kx_2^2 = kx_2 + b, \quad (2)$$
$$x_1^2 - 2ax_1 + k^2x_1^4 - 2bx_1^2 = 0, \quad (3)$$
$$x_2^2 - 2ax_2 + k^2x_2^4 - 2bx_2^2 = 0. \quad (4)$$

Поскольку $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, то разделим равенства (3), (4) на x_1, x_2 соответственно и вычтем из первого из полученных равенств второе:



$$k^2(x_1^3 - x_2^3) + (1 - 2bk)(x_1 - x_2) = 0. \quad (5)$$

Так как точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат на одной прямой (не параллельной оси абсцисс), то $x_1 \neq x_2$. Сокращая (5) на $x_1 - x_2$, получаем

$$k^2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (1 - 2bk) = 0. \quad (6)$$

Из (1) и (2) следует, что числа x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $kx^2 - kx - b = 0$. Тогда из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -b/k$. Поэтому из равенства (6) следует

$$2bk - 1 = k^2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = k^2((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2) = k^2(1 + b/k),$$

откуда $b = (k^2 + 1)/k$. Требуемое неравенство следует теперь из очевидного неравенства $k + \dfrac{1}{k} \geqslant 2$.

9.7. Ответ: 2006.

Обозначим через A выражение, значения которого нужно найти:

$$A = xyz + 3xy + 2xz - yz + 6x - 3y - 2z.$$

Вычтем из обеих частей этого равенства по 6. Тогда несложно видеть, что правая часть полученного равенства будет являться произведением трех линейных множителей:

$$A-6 = xyz+3xy+2xz-yz+6x-3y-2z-6 = (x-1)(y+2)(z+3).$$

Преобразуем теперь уравнения системы. Вычитая из обеих частей первого равенства по 4 и второго — по 9, придем к системе

$$\begin{cases} xy^2 - y^2 + 4xy + 4x - 4y - 4 = 4000\,, \\ xz^2 - z^2 + 6xz + 9x - 6z - 9 = 1000\,, \end{cases}$$

или, разложив левые части уравнений на множители,

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)^2 = 4000\,, \\ (x-1)(z+3)^2 = 1000\,. \end{cases}$$

В силу этих равенств и полученного выше представления для $A-6$, находим:

$$(A-6)^2 = (x-1)^2(y+2)^2(z+3)^2 = (x-1)(y+2)^2\cdot(x-1)(z+3)^2 = \\ = 4000\cdot 1000 = 4\cdot 10^6.$$

Отсюда, учитывая, что $A-6>0$ (так как по условию x, y, z больше 1), находим $A-6=2000$, или $A=2006$.

9.8. Ответ: $n(2n+1)$ диагоналей.

Допустим противное: можно провести не менее $n(2n+1)+1$ диагоналей в квадратиках 1×1, так, чтобы никакие две из них не имели общих точек (в том числе, и в концах). Рассмотрим горизонтальные полоски $2\times 2n$. Всего таких попарно непересекающихся полосок (т. е. имеющих, самое большее, общую сторону) полосок ровно n штук. Поэтому по принципу Дирихле в квадратиках 1×1 какой-то из этих полосок $2\times 2n$ (обозначим ее П) проведено не менее чем $2n+2$ диагонали. Но один из концов каждой из этих $2n+2$ диагоналей должен совпадать с узлом, лежащим на средней (горизонтальной) линии полоски II, а таких узлов — всего $2n+1$ (на рис. 1 они отмечены). Следовательно, какие-то две из этих диагоналей имеют общую точку. Противоречие.

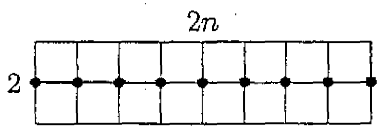


Рис. 1

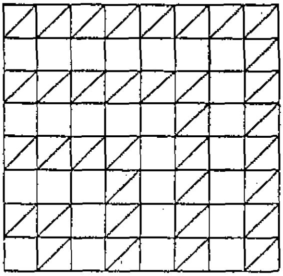


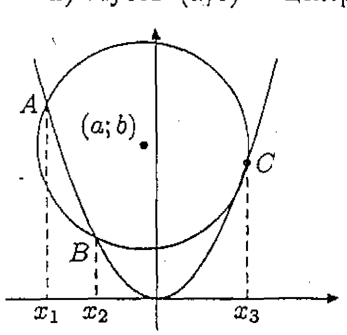
Рис. 2

Остается привести пример, показывающий, что, действительно, в квадратиках 1×1 можно провести $n(2n+1)$ диагоналей так, чтобы выполнялось условие задачи (см. рис. 2).

10 класс

10.5. Ответ: **б)** Нет.

а) Пусть (a, b) – центр окружности, проходящей через точки A, B, C с координатами (x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), (x_3, x_3^2). Числа x_1, x_2, x_3 будут различными решениями уравнения $(x-a)^2 + (x^2-b)^2 - R^2 = 0$, или



$$x^4 - (2b-1)x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{1}$$

Но тогда у этого многочлена все 4 корня x_1, x_2, x_3, x_4 будут действительными. По формулам Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\sum_{i,j=1}^{4} x_i x_j = 0 \Rightarrow$$

$$-(2b-1) = \sum_{i,j=1}^{4} x_i x_j < 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}.$$

Кроме того,

$$2(2b-1) = -2\sum_{i,j=1}^{4} x_i x_j = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2} = 4\sqrt{|x_1 x_2 x_3 x_4|} = 4\sqrt{|a^2+b^2-R^2|} \Longrightarrow$$

$$4b^2-4b+1 \geqslant 4|a^2+b^2-R^2| \geqslant 4(a^2+b^2-R^2) \Longrightarrow R^2-a^2+\frac{1}{4} \geqslant b > \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow R^2 > a^2 + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4} \Longrightarrow R > \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

б) Предположим существование такой константы $c > \frac{1}{2}$. Рассмотрим окружность с центром $(0, c)$ и радиусом R, удовлетворяющим неравенствам

$$c > R > \sqrt{c - \frac{1}{4}} \qquad (2)$$

(такое R существует, так как при $c > \dfrac{1}{2}$ верно $(c - \dfrac{1}{2})^2 > 0$, откуда $c^2 > c - \dfrac{1}{4} > 0$). Уравнение (1) принимает вид

$$x^4 - (2c-1)x^2 + c^2 - R^2 = 0.$$

Это биквадратное уравнение с дискриминантом

$$D = (2c-1)^2 - 4(c^2 - R^2) = 4R^2 - 4c + 1 = 4(R^2 - (c - \frac{1}{4})) > 0$$

(см. (2)) и положительными коэффициентами, т.е. оно имеет 4 различных корня, откуда построенная нами окружность и парабола имеют 4 различных точки пересечения. Но мы выбирали $c > R$, а по предположению $c < R$. Противоречие.

10.6. Ответ: $2^{1024} - 2^{-512}$.

Поскольку число, которое требуется найти, имеет вид $2^{2^9}a_{10} - b_{10}$, то естественно попытаться получить общую формулу для чисел вида $c_n = 2^{2^{n-1}}a_n - b_n$. Для этого вычислим c_n для нескольких первых значений n.

При $n = 1$ из условия следует, что

$$c_1 = 2a_1 - b_1 = \frac{7}{2} = \frac{8-1}{2} = \frac{2^3 - 1}{2} = 2^2 - \frac{1}{2}.$$

При $n = 2$ получим

$$\begin{cases} a_2 = a_1^2 - 2b_1, \\ b_2 = b_1^2 - 2a_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4a_2 = 4a_1^2 - 8b_1, \\ b_2 = b_1^2 - 2a_1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$c_2 = 4a_2 - b_2 = (2a_1 - b_1)(2a_1 + b_1) - 8b_1 + 2a_1 = \frac{7}{2}(2a_1 + b_1) - 8b_1 + 2a_1 =$$

$$= 9a_1 - \frac{9}{2}b_1 = \frac{9}{2}(2a_1 - b_1) = \frac{63}{4} = \frac{64-1}{4} = \frac{2^6 - 1}{2^2} = 2^4 - \frac{1}{2^2}.$$

При $n = 3$ имеем

$$\begin{cases} a_3 = a_2^2 - 2b_2, \\ b_3 = b_1^2 - 2a_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 16a_2 = 16a_1^2 - 32b_1, \\ b_2 = b_1^2 - 2a_1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$c_3 = 16a_2 - b_2 = (4a_1 - b_1)(4a_1 + b_1) - 32b_1 + 2a_1 =$$

$$= \frac{63}{4}(4a_1 + b_1) - 32b_1 + 2a_1 = 65a_1 - \frac{65}{4}b_1 = \frac{65}{4}(4a_1 - b_1) =$$

$$= \frac{65}{4} \cdot \frac{63}{4} = \frac{64+1}{4} \cdot \frac{64-1}{4} = \frac{64^2 - 1}{16} = \frac{2^{12} - 1}{2^4} = 2^8 - \frac{1}{2^4}.$$

Поэтому можно предположить, что

$$c_n = 2^{2^n} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}}. \qquad (1)$$

Доказать эту формулу легко индукцией по n:

$$c_{n+1} = 2^{2^n}a_{n+1} - b_{n+1} = 2^{2^n}(a_n^2 - 2b_n) - b_n^2 + 2a_n =$$

$$= (2^{2^{n-1}}a_n - b_n)(2^{2^{n-1}}a_n + b_n) - 2\cdot 2^{2^n}b_n + 2a_n =$$

$$= (2^{2^n} - 2^{-2^{n-1}})(2^{2^{n-1}}a_n + b_n) - 2\cdot 2^{2^n}b_n + 2a_n =$$

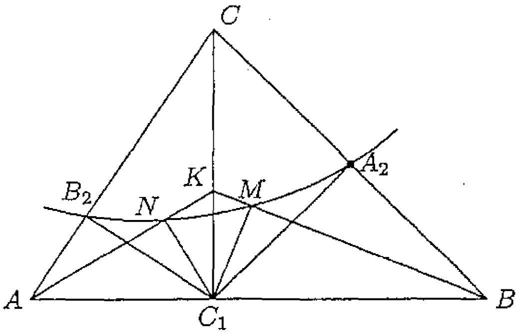
$$= (2^{2^n}\cdot 2^{2^{n-1}} + 1)a_n - (2^{2^n} + 2^{-2^{n-1}})b_n = (2^{2^n} + 2^{-2^{n-1}})(2^{2^{n-1}}a_n - b_n) =$$

$$= (2^{2^n} + 2^{-2^{n-1}})(2^{2^n} - 2^{-2^{n-1}}) = (2^{2^{n+1}} - 2^{-2^n}).$$

Следовательно, формула (1) имеет место для всех натуральных n, в частности, при $n = 10$ получим

$$2^{512}a_{10} - b_{10} = 2^{2^9}a_{10} - b_{10} = c_{10} = 2^{2^{10}} - 2^{-2^9} = 2^{1024} - 2^{-512}.$$

10.7. Решение. Будем рассматривать случай, когда K лежит между C_1 и точкой пересечения высот, в противном случае всё делается аналогично. Пусть основания перпендикуляров, опущенных из C_1 на отрезки AC, BC, BK и AK, — это точки B_2, A_2, M и N соответственно; и пусть $\angle CBA = \beta$, $\angle NAC_1 = \theta$. Тогда, так как C_1, B_2, C и A_2 лежат на одной окружности, то $\angle CB_2A_2 = \angle CC_1A_2 = 90° - \angle C_1CA_2 = \angle ABC = \beta$. С другой стороны, так как B_2, A, C_1 и N тоже лежат на одной окружности, то $\angle AB_2N = 90° + \angle C_1B_2N = 90 +° \angle C_1AN = 90° + \theta$. Итак $\angle NB_2A_2 = 180° - \angle AB_2N - \angle CB_2A_2 = 90° - \beta - \theta$. С другой стороны, так как C_1, M, A_2 и B лежат на одной окружности, то $\angle C_1MA_2 = 180° - \angle C_1BA_2 = 180° - \beta$, а из того, что C_1, N, K и M принадлежат одной окружности, следует что $\angle C_1MN = \angle C_1KN =$



$90^\circ - \angle KAC_1 = 90^\circ - \theta$ и значит $\angle NMA_2 = 360^\circ - \angle C_1MA_2 - \angle C_1MN = 90^\circ + \beta + \theta$. В итоге $\angle NB_2A_2 + \angle NMA_2 = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

10.8. Ответ: $n^2/4$, если n четно, и $(n^2+3)/4$, если n нечетно.

Так как каждый треугольник имеет не более трех соседних (по стороне) треугольников, то отмеченных треугольников должно быть не менее $\frac{n^2}{4}$.

Покажем, что при четном n этого количества и достаточно. В самом деле, в этом случае данный правильный треугольник со стороной n можно разбить на $\frac{n^2}{4}$ правильных треугольников со стороной 2 и в каждом таком треугольнике отметить центральный единичный треугольник (см. рис. 1).

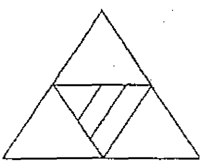


Рис. 1

При нечетном n число $\frac{n^2}{4}$ не является целым, а наименьшее целое число, которое больше $\frac{n^2}{4}$, — это $\frac{n^2+3}{4}$. Покажем, что этого количества отмеченных треугольников будет достаточно. Могут представиться только два случая: $n = 4k+1$ и $n = 4k+3$, где $k \in \mathbb{N}$ (при $k = 0$ примеры строятся тривиально). Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

При $n = 4k+1$ достроим к середине каждой из сторон данного правильного треугольника со стороной n по одному треугольнику со стороной 1, как это показано на рис. 2. Тогда полученную фигуру можно разбить на три угловых треугольных блока со стороной $2k$ и один центральный треугольный блок (включающий и достроенные треугольники) со стороной $2k+2$. Согласно доказанному выше для правильных треугольников с четной стороной, для того, чтобы выполнялось условие задачи, в каждом блоке со стороной $2k$ достаточно отметить k^2 треугольников, а в блоке со стороной $2k+2$ — $(k+1)^2$ треугольников. Всего будет отмечено $3k^2+(k+1)^2 = \dfrac{n^2+3}{4}$ треугольников.

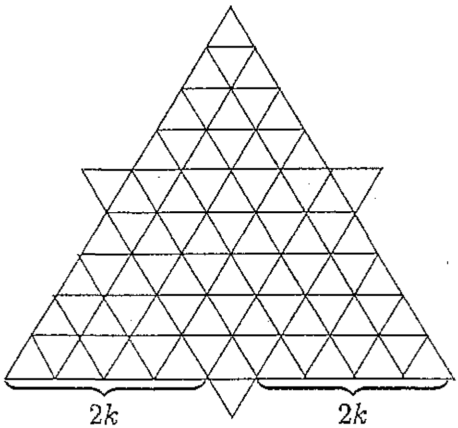


Рис. 2

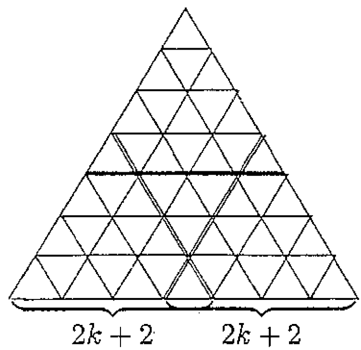


Рис. 3

При $n = 4k+3$ разобьем данный правильный треугольник со стороной n на три угловые треугольные блока со стороной $2k+2$ (при этом они будут попарно перекрываться по одному треугольнику со стороной 1; эти три общие треугольника мы, тем самым будем считать дважды — за каждый из треугольных блоков, которым они принадлежат) и один центральный правильный треугольник со стороной $2k$ (см. рис. 3). Для того, чтобы выполнялось условие задачи во всех блоках, а значит, и во всем треугольнике со стороной n, достаточно отметить $3(k+1)^2+k^2 = \dfrac{n^2+3}{4}$ треугольников, что и утверждалось.

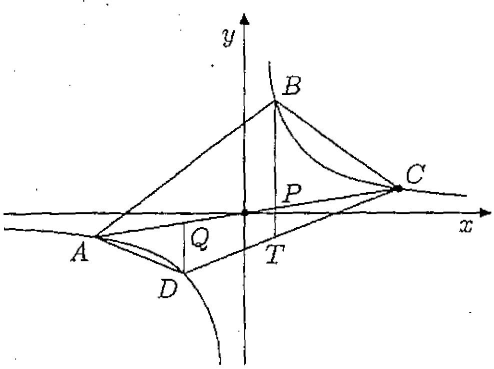
11 класс

11.5. Введем координаты точек: $A\left(-a, -\dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$, $C\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, $D\left(d, \dfrac{1}{d}\right)$. Пусть прямая, проходящая через точку B параллельно оси Oy, пересекает отрезок AC в точке P. Точка P имеет тогда координаты $B\left(b, \frac{b}{a^2}\right)$. Имеем

$$\left(\frac{BC}{CP}\right)^2 = \frac{(b-a)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^2}{(b-a)^2 + \left(\frac{b}{a^2} - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1 + \left(\frac{1}{ab}\right)^2}{1 + \frac{1}{a^4}} =$$

$$= \frac{(b+a)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2}{(b+a)^2 + \left(\frac{b}{a^2} + \frac{1}{a}\right)^2} = \left(\frac{BA}{AP}\right)^2,$$

откуда BP – биссектриса угла ABC, т.е. биссектриса угла ABC параллельна оси Oy. Аналогично биссектриса DQ угла ADC $(Q \in AC)$ параллельна оси Oy. Получаем, что $BP \| DQ$.



Пусть $T = BP \bigcap CD$. Тогда $\angle BCD = \pi - (\angle CBP + \angle CTP) = \pi - (\angle CBP + \angle CDQ) = \pi - \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CDA)$.

Аналогично $\angle BAD = \pi - \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CDA) = \angle BCD$, что и требовалось доказать.

11.6. Ответ: $(3n-2)(m-1)$.

Соединим центры соседних (по стороне или вершине) клеток отрезками и *отметим* отрезки, соединяющие клетку, в которой записано число (такие клетки назовем клетками *Ч-типа*), и клетку с миной (клетки *М-типа*). Число в клетке Ч-типа в точности равно количеству отмеченных отрезков с концом в этой клетке. Но у каждого отмеченного отрезка ровно 1 конец будет в клетке Ч-типа. Отсюда рассматриваемая в задаче сумма совпадет с количеством отмеченных отрезков.

Далее, не существует такого расположения мин, при котором все 4 отрезка фигуры на рис.1 (назовем ее *блоком*) окажутся отмеченными, откуда в ней будет отмечено не более 3-х отрезков.

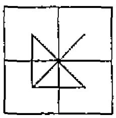


Рис. 1

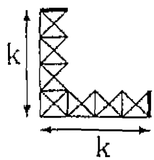


Рис. 2

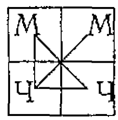


Рис. 3

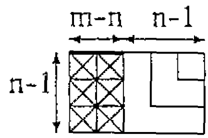


Рис. 4

Покажем теперь, что для любого $k \geqslant 1$ в фигуре, изображенной для $k = 4$ на рис.2 (назовем ее k*-фигурой*), не может быть отмечено более $6k-2$ отрезков. Предположим противное. k-фигура состоит из $2k-1$ блоков и 2-х выделенных на рисунке отрезков. Количество отмеченных во всех блоках отрезков $\leqslant 3(2k-1) \leqslant 6k-3$, значит, более $6k-2$ отрезков может быть отмечено только если *оба выделенных отрезка отмечены; в каждом блоке* k*-фигуры отмечено ровно 3 отрезка.*

Так как правый выделенный отрезок отмечен, его вершины расположены в клетках разного типа. Не нарушая общности, будем считать, что верхняя клетка имеет тип M, а нижняя - Ч. Тогда в самом правом блоке может быть отмечено 3 отрезка только при расположении клеток, изображенном на рис. 3.

Повторяя эти рассуждения последовательно для всех блоков справа налево, а затем снизу вверх, получим, что для каждого блока (в т.ч. для верхнего) расположение клеток будет в точности таким. Но тогда верхний выделенный отрезок никак не может быть отмечен, что противоречит условию (а).

Разобьем нашу сетку из отрезков на 1-фигуру, 2-фигуру,..., $(n-1)$-фигуру, $(m-n)(n-1)$ блоков и $m-n$ отрезков (на рисунке они выделены), как показано на рис.4. Применяя полученные ранее оценки, получим, что число отмеченных отрезков не превосходит

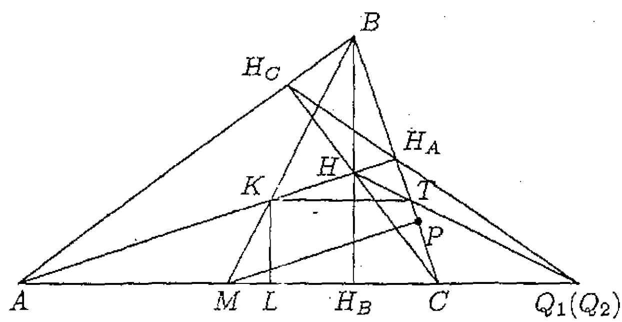
$$\sum_{k=1}^{n-1}(6k-2)+3(m-n)(n-1)+(m-n)=6n(n-1)/2-2(n-1)+$$
$$+(3n-2)(m-n)=(3n-2)(n-1)+(3n-2)(m-n)=(3n-2)(m-1).$$

С другой стороны, на рис.5 показан пример, для которого рассматриваемая сумма в точности равна $(3n-2)(m-1)$, т.к. для сетки, соответствующей данной расстановке, все приведенные выше оценки достигаются.

	2	•	4	•	...
	3	•	6	•	...
n	3	•	6	•	...
	2	•	4	•	...

Замечание. Задачу можно решить и с помощью индукционных рассуждений: сначала индукцией по n оценку получаем для таблицы $n \times n$, а затем ведем индукцию по $m \geqslant n$.

11.7. Построим $KL \perp AC$, $MP \parallel AH_A$. Пусть Q_1 — точка пересечения прямых AC и H_CH_A, Q_2 — точка пересечения прямых



AC и HT. Пусть $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $\lambda=\dfrac{BK}{BM}$.

Из теоремы синусов для треугольника AH_CQ_1 получим

$$AQ_1=AH_C\frac{\sin\angle AH_CQ_1}{\sin\angle H_CQ_1A}=\left[\angle H_CQ_1A=\angle BH_CQ_1-\angle A=\angle C-\angle A\right]=$$

$$= AH_C \frac{\sin(180^\circ - \angle C)}{\sin(\angle A - \angle C)} = \frac{b\cos\angle A \sin\angle C}{\sin(\angle A - \angle C)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{AQ_2}{KT} = \left[\Delta AHQ_2 \sim \Delta KHT\right] = \frac{AH}{KH} = \left[\Delta AHH_B \sim \Delta AKL\right] = \frac{AH_B}{LH_B} =$$

$$= \left[\Delta MKL \sim \Delta MBH_B \Rightarrow \frac{LH_B}{MH_B} = \frac{BK}{BM} = \lambda\right] = \frac{AH_B}{\lambda MH_b} =$$

$$= \frac{AH_B}{\lambda(MC - CH_B)} = \frac{c\cos\angle A}{\lambda(0.5b - a\cos\angle C)}.$$

Из подобия треугольников KBT и MBC следует, что $\frac{KT}{MC} = \frac{BK}{BM} = \lambda$. Поэтому $AQ_2 = \frac{bc\cos\angle A}{b - 2a\cos\angle C}$.

Для доказательства утверждения задачи, т.е. совпадения точек Q_1 и Q_2, достаточно проверить, что

$$(b - 2a\cos\angle C)\sin\angle C = c\sin(\angle C - \angle A),$$

что равносильно (теорема синусов для треугольника ABC) равенству

$$c\sin\angle B - 2c\sin\angle A\cos\angle C = c\sin(\angle C - \angle A) \iff$$

$$\sin\angle B - 2\sin\angle A\cos\angle C = \sin\angle C\cos\angle A - \sin\angle A\cos\angle C \iff$$

$$\sin\angle B = \sin\angle A\cos\angle C + \sin\angle C\cos\angle A \Leftrightarrow \sin\angle B = \sin(\angle A + \angle C).$$

Последнее же равенство очевидно поскольку $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

11.8. Ответ: а) не существуют; б) не существуют.

а) Предположим, что такие числа существуют. То есть найдется такая последовательность (x_n) натуральных чисел, что $x_n^2 = 2^n a + 5^n b$ $(n \geqslant 0)$.

Пусть $a = 5^k c$, где k целое $k \geqslant 1$ и c не делится на 5. Тогда $x_n^2 = 5^k\left(2^n c + 5^{n-k} b\right)$. Поскольку $2^n c + 5^{n-k} b$ не делится на 5 и слева стоит квадрат натурального числа, то k делится на 2, то есть $k = 2m$, где m целое $m \geqslant 0$.

При $n > k$ число $\left(\frac{x_n}{5^m}\right)^2 = \frac{x_n^2}{5^k} = 2^n c + 5^{n-k} b$ является целым. Далее докажем, что $\frac{x_n}{5^m}$ — целое число.

Заметим,что число $\frac{x_n}{5^m}$ рациональное, то есть существуют такие целые p и q, для которых $\frac{x_n}{5^m} = \frac{p}{q}$ и $(p, q) = 1$. Если $q > 1$, то $\left(\frac{x_n}{5^m}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ не является целым, поскольку $(p^2, q2) = 1$ и q>1. Значит $q = 1$ и $\frac{x_n}{5^m}$ целое для любого натурального $n > 2m$.

Рассмотрим последовательность (y_n) $y_n = \frac{x_n}{5^m}$, при $n > 2m$. Далее заметим, что $y_n^2 \equiv 2^n c \pmod 5$. Тогда $y_{n+1}^2 \equiv 2y_y^n \pmod 5$, а поскольку квадрат натурального числа, не делящегося на 5, дает остаток 1 или 4 при делении на 5, то, с одной стороны y_{n+1}^2 дает остаток 1 или 4, а с другой стороны $2y_n^2$ дает остаток 2 или 3 при делении на 5. Получаем противоречие с предположением.

б) Предположим, что такие числа существуют. Это означает, что найдется такая последовательность (x_n) $(n \geqslant 1)$ натуральных чисел, что $x_n^2 = 2^n a + 5^n b + c$. Тогда $25x_n^2 = 25 \cdot 2^n a + 5^{n+2} b + 25c > 2^{n+2} a + 5^{n+2} b + c = x_{n+2}^2$. Поэтому $5x_n > x_{n+2}$, откуда следует $x_{n+2} \leqslant 5x_n - 1$. Возведем последнее неравенство в квадрат: $x_{n+2}^2 \leqslant 25x_n^2 - 10x_n + 1$. После преобразований имеем $10x_n \leqslant 21 \cdot 2^n a + 24c + 1$. Тогда $\frac{10x_n}{2^n} \leqslant 21a + \frac{24c}{2^n} + \frac{1}{2^n}$.

При $n \longrightarrow \infty$ правая часть стремится к $21a$. Покажем, что левая часть неограниченно возрастает:

$$\lim \left(\frac{10x_n}{2^n}\right)^2 = \lim \frac{100x_n^2}{2^{2n}} = \lim \frac{100\,(2^n a + 5^n b + c)}{4^n}.$$

Но $(5/4)^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Получаем противоречие с предположением.