Министерство образования Республики Беларусь

« LVI »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Гродно 2006

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 56-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Базылев Д. Ф. (11.2)
Барабанов Е.А. (9.1, 10.2)
Близнец И.А. (10.3)
Воронович И.И. (8*.3, 8.3, 10.1,10.4)
Дудко Д. В. (9.4)
Жихович М.И. (11.4)
Карамзин В.П. (9.3)
Каскевич В.И. (8*.1, 8*.2, 8*.4, 8.1)
Лебедь В. В. (8.2, 11.3)
Левин А.М. (8.4)
Мазаник С.А. (9.2)
Миротин А.Р. (11.1)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, Д.В.Дудко, В.И.Каскевич, В.В.Лебедь, С.А.Мазаник.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс
(12-летняя программа обучения)

8*.1. Винтик и Шпунтик сконструировали автомобиль и отправились на его испытание из Солнечного города в Цветочный и обратно по той же дороге. Дорога проходит по холмистой местности, и на ней нет ни одного горизонтального участка. Выезжая, малыши решили придерживаться одной и той же скорости. Однако, в гору автомобиль шел со скоростью на 20% меньше запланированной, а под гору — на 20% больше запланированной. В результате на дорогу до Цветочного города и обратно у них ушло на 10 минут больше времени, чем ушло бы, если бы они двигались с постоянной запланированной скоростью.

Сколько времени были в дороге Винтик и Шпунтик?

8*.2. В каждой клетке таблицы $n \times n$ ($n \geqslant 3$) записано целое число, при этом сумма чисел в любых трех клетках, образующих прямоугольник 1×3 или 3×1, кратна 3.

Найдите все n, при которых из этого условия следует, что сумма всех чисел в таблице обязательно будет кратна 3.

8*.3. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности; Q — точка касания этой окружности со стороной BC; M, K, L — середины отрезков BC, IC и IB соответственно.

Докажите, что $ML = KQ$.

8*.4. При каком наименьшем n ($n > 3$) все стороны и диагонали выпуклого n-угольника можно окрасить в несколько цветов (каждый отрезок в один цвет) так, что все одинаково окрашенные отрезки будут образовывать треугольники (с вершинами в вершинах данного n-угольника), при этом разные треугольники будут окрашены в разные цвета?

8 класс
(11-летняя программа обучения)

8.1. Винтик и Шпунтик сконструировали автомобиль и отправились из Солнечного города в Цветочный и по той же дороге обратно. Дорога проходит по холмистой местности и на ней нет ни одного горизонтального участка. Выезжая, малыши решили двигаться с некоторой постоянной скоростью. Но в действительности на подъемах у них скорость была на 20% ниже запланированной, а на спусках — на 20% выше запланированной. В результате, на дорогу до Цветочного города у них ушло на 10 минут больше, чем на дорогу обратно. Кроме того, на всем пути туда и обратно на подъемы они затратили на 1 час больше, чем на спуски.

Сколько времени были в дороге Винтик и Шпунтик?

8.2. Докажите, что для любых чисел a, b, c, d, f из неравенства

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < f^2$$

следует неравенство $bc + af + df < ad + f^2$.

8.3. В неравнобочную трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$, $AB \neq CD$) вписана окружность с центром в точке O; M и N — середины отрезков AO и DO соответственно.

Найдите отношение $AD:BC$, если известно, что $BM = CN$.

8.4. Вася задумал трехзначное число и сообщил Пете сумму и произведение его цифр а также то, что если переставить в задуманном им числе местами первые две слева цифры, то полученное число будет делиться на задуманное. Затем он дополнительно сообщил, что средняя цифра задуманного числа не равна 6.

Докажите, что полученные сведения позволяют Пете однозначно восстановить задуманное Васей число.

9 класс

9.1. Можно ли множество целых чисел разбить на три непустых непересекающихся подмножества, так, что для любых чисел a и b из двух разных подмножеств в третьем подмножестве

а) найдется такое число c, что $a+b=2c$?

б) найдутся такие два числа c_1 и c_2, что $a+b=c_1+c_2$?

9.2. На сторонах AB, BC, CD ромба $ABCD$ отмечены соответственно точки X, Y, Z так, что отрезок XY параллелен отрезку AZ.

Докажите, что отрезки XZ, AY и BD пересекаются в одной точке.

9.3. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c таких, что $abc=1$, выполнено неравенство

$$2(a^2+b^2+c^2)+a+b+c \geqslant 6+ab+bc+ca.$$

9.4. В начале игры на доске лежит треугольник ABC, $\angle A = 60°$, $AB = 2005$, $AC = 2006$. Вася и Петя по очереди разрезают (по любой линии) треугольник на два треугольника так, чтобы получившиеся треугольники имели площадь не менее 1. После этого на доске игрок, сделавший ход, оставляет остроугольный или любой прямоугольный треугольник. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Кто выиграет при правильной игре, если начинает игру Вася?

10 класс

10.1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ найдите длину диагонали AC, если $DC = a$, $BC = b$, $\angle DAB = 90°$, $\angle DCB = \varphi$ и $AB = AD$.

10.2. Можно ли множество

а) целых чисел,

б) рациональных чисел

разбить на три непустых непересекающихся подмножества, так, чтобы для любых двух чисел a и b из разных подмножеств число $2(a+b)$ принадлежало третьему подмножеству?

10.3. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{a^3-2a+2}{b+c}+\frac{b^3-2b+2}{c+a}+\frac{c^3-2c+2}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

10.4. Натуральные числа a и b таковы, что число $a+17b$ делится на 19, а число $a+19b$ делится на 17.

Найдите наименьшее возможное значение суммы $a+b$.

11 класс

11.1. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в трехмерном пространстве, модули которых равны 1, справедливо неравенство

$$\sqrt{1-\vec{a}\cdot\vec{b}} \leqslant \sqrt{1-\vec{a}\cdot\vec{c}} + \sqrt{1-\vec{c}\cdot\vec{b}}.$$

11.2. Найдите все тройки чисел x, y, z, такие, что $x, y, z \in$ $\in (0;1)$ и

$$\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right) = \\ = \left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right).$$

11.3. На плоскости выбрали несколько целочисленных векторов и каждый из них покрасили в один из n цветов. Цвет назовем *идущим* данному целочисленному вектору, если этот вектор можно представить в виде линейной комбинации (с целочисленными коэффициентами) векторов этого цвета. Известно, что каждому целочисленному вектору идет хотя бы один из цветов.

При каких n обязательно найдется цвет, идущий любому целочисленному вектору?

11.4. Дан четырёхугольник $ABCD$, $\angle ABC = \angle ADC$. BM — высота в треугольнике ABC, где $M \in AC$. На стороне AC взята точка M' такая, что

$$\frac{AM \cdot CM'}{AM' \cdot CM} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$$

Докажите, что DM' и BM пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс
(12-летняя программа обучения)

8*.1 Ответ : 4 часа 10 минут.

Пусть длина всей дороги от Солнечного города до Цветочного $S = S_1 + S_2$, где S_1 – суммарная длина (в км) всех участков подъема на этой дороге, а S_2 – суммарная длина (в км) участков спуска. Тогда на обратной дороге S_1 – суммарная длина всех участков спуска, а S_2 – участков подъема. Поэтому за все время пути (туда и обратно) автомобиль S км будет двигаться на подъем и S км — на спуск. Пусть v – запланированная скорость движения (в км/ч). Тогда время, затраченное на подъемы, равно $\frac{S}{0,8v}$, а время, затраченное на спуски, равно $\frac{S}{1,2v}$. Согласно условию $\frac{S}{0,8v}+\frac{S}{1,2v}-2\cdot\frac{S}{v}=\frac{1}{6}$, откуда после упрощения получим $\frac{S}{v}=2$. Поэтому на всю дорогу от Солнечного города до Цветочного и обратно Винтик и Шпунтик затратили $2+2+\frac{1}{6}=4\frac{1}{6}$ часов, т. е. 4 часа и 10 минут.

8*2. Ответ : при всех n, кратных 3.

Пусть имеется таблица $n\times n$ ($n \geqslant 3$), удовлетворяющая условию. Если n кратно 3, то ее можно разбить на непересекающиеся прямоугольники 1×3. Так как сумма чисел в каждом таком прямоугольнике делится на 3, то и сумма всех чисел в таблице делится на 3.

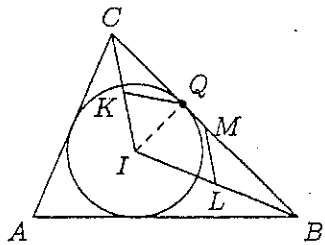
Покажем, что в остальных случаях нельзя утверждать, что сумма всех чисел в таблице делится на 3. Рассмотрим таблицу, в которой во всех клетках первого столбца стоят "единицы", во всех клетках второго столбца — "нули", во всех клетках третьего столбца — "двойки", далее снова во всех клетках четвертого столбца — "единицы", следующего столбца — "единицы" и т. д. Легко видеть, что такая таблица при всех

n удовлетворяет условию задачи. Однако сумма всех чисел в такой таблице при n, не кратном 3, не делится на 3.

Действительно, если $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, то сумма всех чисел в первом столбце, равная $3k + 1$, не делится на 3. Остальная же часть таблицы (без первого столбца) разбивается на прямоугольники 1×3, сумма чисел в каждом из них делится на 3. Так что, сумма всех остальных чисел в таблице (без чисел первого столбца) делится на 3. А стало быть, сумма чисел во всей таблице на 3 не делится.

При $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$, сумма всех чисел в первых двух столбцах, равная $n = 3k + 2$, не делится на 3. А сумма чисел в остальной части таблицы (без первых двух столбцов), которая разбивается на прямоугольники 1×3, делится на 3. Поэтому и в этом случае сумма всех чисел в таблице на 3 не делится.

8*3. Соединим точки I и Q. Поскольку IQ — радиус, то $IQ \perp BC$, поэтому KQ медиана в прямоугольном треугольнике IQC, и, следовательно, $KQ = 0.5IC$. С другой стороны, ML — средняя линия треугольника CIB, поэтому $ML = 0.5IC$, откуда и следует требуемое утверждение.



8*4. Ответ: при $n = 7$.

Рассмотрим n-угольник, удовлетворяющий условию задачи, в котором проведены все стороны и все диагонали, т. е. каждая его вершина соединена отрезками со всеми другими вершинами. Подсчитаем число всех проведенных отрезков. Из каждой из n вершин выходит по $n - 1$ отрезков. Но каждый отрезок соединяет две вершины. Поэтому число всех проведенных отрезков равно $\frac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, так как согласно условию все отрезки можно окрасить в несколько цветов, причем в каждый из этих цветов будет окрашено ровно по 3 отрезка, то число всех отрезков кратно 3. Следовательно, n или $n - 1$

должно делиться на 3. Заметим также, что число всех отрезков, выходящих из данной вершины четно. Это следует из того, что, если данная вершина является вершиной одного из рассматриваемых треугольников, то ровно два отрезка, выходящих из данной вершины, являются сторонами этого треугольника. Поэтому $n-1$ должно быть четным. Наименьшее натуральное $n > 3$, которое удовлетворяет этим условиям, равно 7. В этом случае число всех проведенных отрезков (сторон и диагоналей семиугольника) будет равно $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$. Тогда число всех цветов, которые необходимы для окраски, равно $21 : 3 = 7$. Остается показать, что все отрезки, соединяющие вершины семиугольника, действительно можно окрасить в 7 цветов так, как требуется в условии задачи.

Пронумеруем вершины семиугольника числами от 1 до 7 и рассмотрим следующие тройки вершин:

$$(1, 2, 3),\ (1, 4, 5),\ (1, 6, 7),\ (2, 4, 6),\ (2, 5, 7),\ (3, 4, 7),\ (3, 5, 6).$$

Здесь никакие две тройки не имеют более одной общей вершины. Поэтому если окрасить все отрезки, соединяющие вершины данной тройки в один цвет, свой для каждой тройки, то получим требуемую раскраску.

8 класс

11-летняя программа обучения

8.1. Ответ: 5 часов.

Пусть S_1 — суммарная длина (в км) всех участков подъема, а S_2 — участков спуска на дороге от Солнечного города до Цветочного. Тогда на обратной дороге S_1 — суммарная длина всех участков спуска, а S_2 — участков подъема. Длина всей дороги в один конец равна $S_1 + S_2$. Пусть v — запланированная скорость движения (в км/ч). Тогда время на дорогу от Солнечного города до Цветочного равно $\frac{S_1}{0,8v} + \frac{S_2}{1,2v}$, а на дорогу обратно — $\dfrac{S_2}{0,8\,v} + \dfrac{S_1}{1,2\,v}$. Согласно условию

$$\left(\frac{S_1}{0,8\,v} + \frac{S_2}{1,2\,v}\right) - \left(\frac{S_2}{0,8\,v} + \frac{S_1}{1,2\,v}\right) = \frac{1}{6},$$

откуда после упрощения получим

$$\left(\frac{S_1}{v} - \frac{S_2}{v}\right) = \frac{2}{5}. \qquad (1)$$

Далее, время затраченное на подъемы на всем пути от Солнечного города до Цветочного и обратно $\dfrac{S_1 + S_2}{0,8\,v}$, а на спуски — $\dfrac{S_1 + S_2}{1,2\,v}$. Согласно условию

$$\frac{S_1 + S_2}{0,8\,v} - \frac{S_1 + S_2}{1,2\,v} = 1,$$

откуда после упрощения

$$\left(\frac{S_1}{v} + \frac{S_2}{v}\right) = \frac{12}{5}. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), а затем разделив обе части на 2, найдем $\dfrac{S_1}{v} = \dfrac{7}{5}$, после чего $\dfrac{S_2}{v} = 1$. Тогда время на весь путь от Солнечного города до Цветочного и обратно

$$\frac{S_1 + S_2}{0,8\,v} + \frac{S_1 + S_2}{1,2\,v} = \left(\frac{S_1}{v} + \frac{S_2}{v}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,8} + \frac{1}{1,2}\right) = \left(\frac{7}{5} + 1\right) \cdot \frac{25}{12} = 5.$$

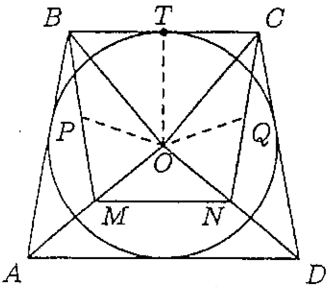
2. Имеем

$$(a + d - f)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 2(af + df) \leqslant a^2 + d^2 + f^2 + 2ad, \quad 2bc \leqslant b^2 + c^2.$$

Сложив эти неравенства с данным в условии и разделив обе части полученного неравенства на 2, получим требуемое.

3. Ответ: $AD : BC = 2$.

Заметим, что MN — средняя линия в треугольнике AOD, так что $MN \parallel AD \parallel BC$. Так как по условию $BM = CN$, то отсюда следует, что $MBCN$ — параллелограмм, либо равнобочная трапеция.



Покажем, что последнее невозможно. Допустим, от противного, что $MBCN$ — равнобочная трапеция. Пусть P и Q — середины BM и CN соответственно. Углы BOA и COD прямые, как углы между биссектрисами в трапеции. Поэтому из прямоугольных треугольников BOM и CON получаем $OP = 0,5BM$, $OQ = 0,5CN$, т.е. $OP = OQ$. Это значит, что точка O лежит на серединном перпендикуляре к средней линии PQ равнобочной трапеции $MBCN$. Стало быть, этот серединный перпендикуляр является ее осью симметрии, а поэтому радиус OT, проведенный в точку T касания окружности с отрезком BC, служит медианой в треугольнике BOC. Поэтому $BO = OC$, и тогда прямоугольные треугольники BOM и CON равны. Тогда $OM = ON$, $OA = OD$, т.е. прямоугольные треугольники AOB и DOC равны. Отсюда $AB = CD$, т.е. $ABCD$ — равнобочная трапеция — в противоречие с условием.

Итак, $MBCN$ — параллелограмм. Поэтому $BC = MN = 0,5AD$.

4. Докажем вначале, что в числе, задуманном Васей, первые две слева цифры совпадают. Пусть трехзначное число, задуманное Васей, — это $\overline{abc}$ (a, b, c — цифры и $a \neq 0$, $b \neq 0$). Согласно условию

$$\overline{bac} = k \cdot \overline{abc} \qquad (1)$$

для некоторого натурального k. Сформулированное утверждение равносильно тому, что $k = 1$. Поэтому докажем, что равенство (1) невозможно, если $k \geqslant 2$.

Равенство (1) равносильно равенству

$$10b(10 - k) = 10a(10k - 1) + (k - 1)c. \qquad (2)$$

Заменив в нем b наибольшим значением 9, а a и c — наименьшими значениями, т. е. $a = 1$, $c = 0$, получим неравенство $90(10 - k) \geqslant 10(10k - 1)$, откуда $k \leqslant 4$. Итак, возможны только три случая: $k = 2$, $k = 3$ или $k = 4$.

Из (2) следует, что $(k-1)c$ делится на 10. Значит, если $k=2$ или $k=4$, то $c=0$. Тогда (2) принимает вид: $b(10-k)=a(10k-1)$. При $k=2$ имеем: $8b=19a$, — что, поскольку a и b — цифры, невозможно. При $k=4$ получаем: $2b=13a$, — что для цифр a и b также невозможно.

Остается поэтому рассмотреть случай $k=3$. В этом случае равенство (2) принимает вид: $5\cdot 7b=5\cdot 29a+c$. Следовательно, $c=0$ или $c=5$. Равенство $c=0$ по той же причине, что и выше, невозможно. При $c=5$ получаем: $7b=29a+1$. Значит, $29a+1$ делится на 7. Но так как $29a+1=7\cdot 4a+a+1$, то это возможно только для цифры $a=6$. Тогда $7b=175$, откуда $b=25$ — не цифра.

Итак, в трехзначном числе, задуманном Васей, первые две слева цифры совпадают, т. е. оно имеет вид: $\overline{aac}$.

Согласно условию

$$2a+c=S,\quad a^2c=P,\quad a\neq 6. \tag{3}$$

Докажем, что этого достаточно, чтобы однозначно восстановить число, задуманное Васей.

Из первого равенства в (3) видим, что четности суммы S и цифры c совпадают. Поэтому Петя, зная S, может определить, какая — четная или нет — цифра c.

Пусть цифра c нечетная. Тогда, выделяя в P полный квадратный множитель d^2, Петя может однозначно узнать a во всех случаях за исключением тех, когда цифра c является произведением квадрата и некоторой цифры. Среди нечетных цифр таких ровно две — 1 и $9=3^2$ — сами являющиеся квадратами. Поэтому, если P — не квадрат, то Петя сразу определяет число Васи ($a=d$, $c=P/d^2$.) Если же P — квадрат, то тогда он знает, что $c=1$ или $c=9$. Значит, если P квадрат и P не делится на 9, то $c=1$ и тогда $a=\sqrt{P}$. Если же P — квадрат и P делится на 9 (т. е. $P=(3m)^2$), то Петя знает, что число Васи может иметь только либо вид $\overline{mm9}$, либо вид $\overline{(3m)(3m)1}$. При этом, если $P\geqslant 12^2$, то $m\geqslant 4$, и, значит, возможно только число $\overline{mm9}$.

Пусть поэтому $P<12^2$, тогда P равно 3^2, 6^2 или 9^2. Если

$P = 3^2$, то число Васи — это 119 или 331, но тогда S соответственно равно 11 или 7, а значит, по значению S Петя однозначно восстанавливает число Васи. Если $P = 6^2$, то число Васи — это 229 или 661. Но цифры 6 быть не может; значит, искомое число равно 229 (отметим, что в этом случае суммы цифр чисел равны по 13, и по сумме S их различить нельзя). Если $P = 9^2$, то число Васи — это 339 или 991, а тогда S соответственно равно 15 или 19, и по значению S число восстанавливается однозначно. Случай нечетной цифры c рассмотрен.

Пусть цифра c четная ($c \neq 0$, так как $P \neq 0$). Тогда, выделяя в P полный квадратный множитель d^2, Петя может однозначно узнать a во всех случаях за исключением тех, когда цифра c является произведением квадрата и некоторой цифры. Среди четных цифр таких ровно две — $4 = 2^2$ и $8 = 2 \cdot 2^2$. Поэтому, если P — не квадрат или не равен произведению квадрата четного числа на 2, то Петя сразу определяет число Васи ($a = d$, $c = P/d^2$). Если P — квадрат, то тогда $c = 4$, и число Васи восстанавливается однозначно.

Остается поэтому рассмотреть только случай, когда произведение $P = 2 \cdot (2m)^2$. В этом случае Петя знает, что число Васи — это только либо $\overline{mm8}$, либо $\overline{(2m)(2m)2}$. Если $P \geqslant 2 \cdot 10^2$, то $m \geqslant 5$, и, значит, число Васи — это $\overline{mm8}$. Пусть поэтому $P < 2 \cdot 10^2$, т. е. P равно $2 \cdot 2^2$, $2 \cdot 4^2$, $2 \cdot 6^2$ или $2 \cdot 8^2$. Эти случаи разбираются точно так же, как и аналогичные случаи для нечетного c.

9 класс

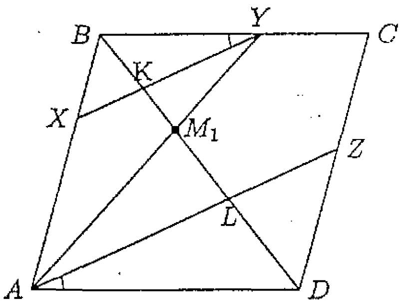
9.1. Ответ: а) нет, нельзя; б) да, можно.

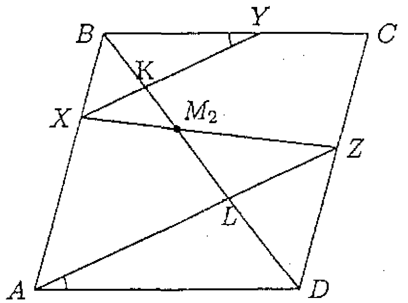
а) Так как по условию сумма чисел из любых двух подмножеств — число четное, то, следовательно, в любых двух подмножествах все числа должны быть одинаковой четности, чего быть не может.

б) Такое разбиение существует. Например,

$$A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\}, \quad C = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

9.2. Заметим, что треугольники XBY и ZDA подобны по двум углам ($\angle BYX = \angle ZAD$ как углы с взаимно параллельными сторонами, а $\angle XBY = \angle ZDA$ как противоположные углы ромба). Поэтому $BX : BY = ZD : DA$. Пусть K и L — точки пересечения диагонали BD с отрезками XY и AZ соответственно. Поскольку диагональ





BD является биссектрисой углов ABC и ADC ромба, то по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $BX : BY = XK : KY$ и $LZ : LA = ZD : DA$. Поэтому $XK : KY = LZ : AL$ или

$$XK : LZ = KY : AL. \tag{1}$$

Пусть отрезок AY пересекает диагональ BD в точке M_1, а отрезок XZ пересекает диагональ BD в точке M_2. Легко видеть, что треугольники KYM_1 и LAM_1 подобны ($\angle KYM_1 = \angle LAM_1$ как внутренние накрест лежащие, а $\angle KM_1Y = \angle LM_1A$ как вертикальные). Поэтому

$$KY : AL = KM_1 : M_1L. \tag{2}$$

Аналогично, треугольники KXM_2 и LZM_2 подобны, поэтому

$$XK : LZ = KM_2 : M_2L. \tag{3}$$

Из соотношений (1)–(3) следует, что $KM_1 : M_1L = KM_2 : M_2L$, т.е. точки M_1 и M_2 делят отрезок KL в одном и том же отношении, и, следовательно, совпадают. Что и требовалось доказать.

9.3. Имеем

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - (ab + bc + ca) + (a + b + c) =$$

$$= (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)-(ab+bc+ca)+(a+b+c) \geqslant$$

$$\geqslant 2(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)+(a+b+c) = (ab+bc+ca)+(a+b+c) =$$

$$= \left[ab=\frac{1}{c}, bc=\frac{1}{a}, ca=\frac{1}{b}\right] = \left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)+\left(\frac{1}{c}+c\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{1}{a}+a\geqslant 2, \frac{1}{b}+b\geqslant 2, \frac{1}{c}+c\geqslant 2\right] \geqslant 2+2+2=6.$$

9.4. Ответ: Вася.

Пусть точка C_1 лежит на отрезке AC, при этом $AC_1 = 2005$. Рассмотрим треугольник ABC_1. Если для этого треугольника выигрышная стратегия у первого игрока, то, учитывая, что рассматриваемый треугольник правильный, можно считать, что первый разрез для этого треугольника должен быть BD, где D — некоторая точка на стороне AC. Поэтому Васе достаточно разрезать по BD, и дальше играть, как будто изначально был треугольник ABC_1. Если для треугольника ABC_1 выигрышная стратегия у второго игрока, то Васе достаточно разрезать по BC_1, и дальше играть за второго игрока относительно треугольника ABC_1. В связи с тем, что каждым ходом площадь треугольника уменьшается не менее чем на 1, то игра конечна.

10 класс

10.1. Ответ: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+2ab\sin\varphi}{2}}$.

Первое решение. Пусть $AD = c$ (см. рис. 1). По теореме косинусов для треугольника DCB получаем

$$DB^2 = DC^2+BC^2-2DC\cdot BC\cos\angle DCB \Leftrightarrow DB^2 = a^2+b^2-2ab\cos\varphi.$$

Из прямоугольного треугольника ADB по теореме Пифагора

$$AD^2+AB^2 = DB^2 \iff DB^2 = 2c^2.$$

Тогда имеем:

$$2c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\varphi. \qquad (1)$$

Пусть $\angle DBC = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 45° + \alpha$. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем равенство :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\alpha + 45°). \tag{2}$$

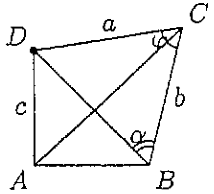


Рис. 1

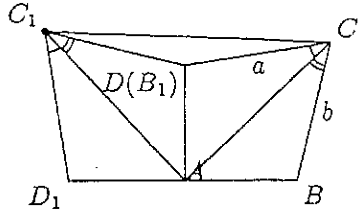


Рис. 2

Теперь выразим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ через a, b, c и φ. По теореме синусов для треугольника BCD имеем:

$$\frac{DB}{\sin\angle DCB} = \frac{BC}{\sin\angle CDB} = \frac{DC}{\sin\angle DBC} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{c\sqrt{2}}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin(180° - \alpha - \varphi)} = \frac{a}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{c\sqrt{2}},$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin(180° - \alpha - \varphi) = \frac{b\sin\varphi}{c\sqrt{2}}, \tag{3}$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{c\sqrt{2}} + \sin\varphi\cos\alpha. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует:

$$\frac{b\sin\varphi}{c\sqrt{2}} = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{c\sqrt{2}} + \sin\varphi\cos\alpha \Longleftrightarrow \frac{b}{c\sqrt{2}} = \frac{a\cos\varphi}{c\sqrt{2}} + \cos\alpha,$$

поскольку $\sin\varphi \neq 0$. Из последнего равенства следует

$$\cos\alpha = \frac{b}{c\sqrt{2}} - \frac{a\cos\varphi}{c\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\cos(\alpha+45^\circ)=\cos\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{b-a\cos\varphi}{2c}-\frac{a\sin\varphi}{2c}.$$

Теперь подставим $\cos(\alpha+45^\circ)$ в равенство (2):

$$AC^2=c^2+b^2-2bc\left(\frac{b-a\cos\varphi}{2c}-\frac{a\sin\varphi}{2c}\right)\iff$$

$$AC^2=c^2+ab\cos\varphi+ab\sin\varphi\iff$$

$$AC^2=\frac{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}{2}+ab\cos\varphi+ab\sin\varphi\iff$$

$$AC^2=\frac{a^2+b^2+2ab\sin\varphi}{2}\iff AC=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab\sin\varphi}{2}}.$$

Второе решение. Повернем четырехугольник $ABCD$ против хода часовой стрелки на 90° вокруг точки A. Тогда точки B, C, D перейдут в точки B_1, C_1, D_1 соответственно (см. рис.2), при этом точка B_1 совпадет с точкой D. Кроме того, при этом будут выполнены равенства

$$AC=AC_1,\ \angle BCA=\angle DC_1A,\ \angle ACD=\angle AC_1B_1,\ \angle CAC_1=90^\circ.$$

Из этих равенств, в частности, следует, что

$$\angle AC_1D+\angle ACD=\angle BCA+\angle ACD=\varphi.$$

Поэтому

$$\angle CDC_1=180^\circ-(\angle DCC_1+\angle DC_1C)=$$

$$=180^\circ-(180^\circ-\angle CAC_1-\angle AC_1D-\angle ACD)=90^\circ+\varphi.$$

Применяя теорему косинусов к треугольнику CDC_1, получим

$$CC_1^2=a^2+b^2-2ab\cos(90^\circ+\varphi)=a^2+b^2+2ab\sin\varphi.$$

Поскольку $CC_1^2 = AC^2 + AC_1^2 = 2AC^2$, то

$$AC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab\sin\varphi}{2}}.$$

10.2. Ответ: а) да, можно; б) нет, нельзя.

а) Можно, например, так:

$$A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\}, \quad C = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

б) Предположим, что такие три множества A, B и C существуют. Не нарушая общности, считаем, что $0 \in A$. Докажем, что справедлива следующая

Лемма. *Для любого $x \in B$ выполнены включения*

$$\{0,\, 3x\} \subset A, \quad \{x,\, -2x\} \subset B, \quad \{-x,\, 2x\} \subset C.$$

Доказательство. Поскольку $0 \in A$ и $x \in B$, то согласно условию $2x = 2(0 + x) \in C$ и тогда $4x = 2(0 + 2x) \in B$.

Кроме того, $-x \in C$, так как если бы $-x \in A$, то $2(x + (-x)) = 0 \in C$, а если бы $-x \in B$, то $2(-x + 2x) = 2x \in A$ — в обоих случаях получаем противоречие. Поскольку $-x \in C$, то $-2x = 2(-x + 0) \in B$.

Если бы $3x \in B$, то $4x = 2(3x - x) \in A$, что по доказанному выше не так. Если бы $3x \in C$, то $2x = 2(3x - 2x) \in A$, что не так. Следовательно, $3x \in A$. Лемма доказана.

Поменяв в этих рассуждениях множества B и C местами, получаем, что если $x \in C$, то $3x \in A$.

Перейдем непосредственно к решению задачи. Пусть $q \in B$. Тогда $q/3 \in A$, поскольку, в силу леммы и замечания к ней, если бы $q/3 \in B$ или $q/3 \in C$, имели бы: $q = 3 \cdot q/3 \in A$. Противоречие.

Поскольку $q/3 \in A$ и в силу леммы $-q \in C$, то $-4q/3 = 2(-q + q/3) \in B$, и тогда $-2q = 2(-4q/3 + q/3) \in C$. Противоречие, так как по лемме $-2q \in B$.

Следовательно, указанное в условии задачи разбиение множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел невозможно.

10.3. *Первое решение.* Заметим, что $a^3 - 2a + 2 \geqslant a$ для всех положительных a. Действительно,

$$a^3 - 2a \geqslant a \iff a^3 - 3a + 2 \geqslant 0 \iff (a-1)(a^2+a-2) \geqslant 0 \iff$$

$$(a-1)^2(a+2) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\frac{a^3 - 2a + 2}{b+c} + \frac{b^3 - 2b + 2}{c+a} + \frac{c^3 - 2c + 2}{a+b} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1 + \frac{a+b+c}{c+a} - 1 + \frac{a+b+c}{a+b} - 1 =$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3. \quad (2)$$

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получим

$$\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c} \cdot \frac{1}{c+a} \cdot \frac{1}{a+b}} \geqslant$$

$$\geqslant \left[3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \leqslant ((b+c)+(c+a)+(a+b)) = 2(a+b+c)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{a+b+c}.$$

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{a^3 - 2a + 2}{b+c} + \frac{b^3 - 2b + 2}{c+a} + \frac{c^3 - 2c + 2}{a+b} \geqslant \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Рассмотри еще один способ доказательства неравенства

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2},$$

из которого в силу (1) будет следовать требуемое неравенство. Это неравенство (после приведения к общему знаменателю и сокращения подобных) равносильно неравенству

$$2a^3+2b^3+2c^3\geqslant a^2b+b^2a+c^2b+b^2c+a^2c+c^2a.$$

Последнее неравенство справедливо поскольку справедливы неравенства

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a \quad b^3+c^3\geqslant b^2c+c^2b \quad c^3+a^3\geqslant c^2a+a^2c,$$

равносильные неравенствам

$$(a-b)^2(a+b)\geqslant 0 \quad (b-c)^2(b+c)\geqslant 0 \quad (c-a)^2(c+a)\geqslant 0$$

10.4. Ответ: $\min(a+b)=43$.
Заметим, что

$$a+17b \,\vdots\, 19 \iff a-2b \,\vdots\, 19 \iff 9a-18b \,\vdots\, 19 \iff 9a+b \,\vdots\, 19,$$

$$a+19b \,\vdots\, 17 \iff a+2b \,\vdots\, 17 \iff 9a+18b \,\vdots\, 17 \iff 9a+b \,\vdots\, 17.$$

Поэтому

$$9a+b \,\vdots\, 19\cdot17 \Longrightarrow 9a+b=19\cdot17k,\ k\in\mathbb{N}\Longrightarrow 9a+9b=19\cdot17k+8b=$$

$$=(18^2-1)k+8b=(18^2-9)k+8(k+b)\Longrightarrow b+k \,\vdots\, 9 \Longrightarrow b+k\geqslant 9$$

$$\Longrightarrow 9a+9b\geqslant(18^2-9)+8\cdot9 \Longrightarrow a+b\geqslant 36-1+8=43.$$

Кроме того, при $b = 8$, $a = 35$ условие задачи выполнено, и $a + b = 43$. Следовательно, $\min(a + b) = 43$.

11 класс

11.1. Заметим, что если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют модули, равные 1, то

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} =$$

$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} = 2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} = 2\left(1 - \vec{x} \cdot \vec{y}\right).$$

Поэтому неравенство из условия равносильно неравенству $|\vec{a} - \vec{b}| \leqslant |\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{c} - \vec{b}|$, которое сразу следует из неравенства треугольника: $|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$ для любых векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, в частности, для $\vec{u} = \vec{a} - \vec{c}$ и $\vec{v} = \vec{c} - \vec{b}$.

11.2. Ответ: $(0{,}5; 0{,}5; 0; 5)$.

Так как x, y, $z > 0$, то

$$\left(x + \frac{1}{2x} - 1\right) > 0, \quad \left(y + \frac{1}{2y} - 1\right) > 0, \quad \left(z + \frac{1}{2z} - 1\right) > 0,$$

значит и $\left(1 - \frac{xy}{z}\right)\left(1 - \frac{yz}{x}\right)\left(1 - \frac{zx}{y}\right) > 0$. Если бы ровно два из этих трех сомножителей были отрицательны, например, $\left(1 - \frac{xy}{z}\right) < 0$ и $\left(1 - \frac{yz}{x}\right) < 0$, то тогда $\frac{xy}{z} > 1$ и $\frac{yz}{x} > 1$, откуда $y^2 > 1$, что невозможно ввиду $y \in (0; 1)$. Итак,

$$\left(1 - \frac{xy}{z}\right) > 0, \quad \left(1 - \frac{yz}{x}\right) > 0, \quad \left(1 - \frac{zx}{y}\right) > 0. \qquad (1)$$

Первое решение. Покажем, что

$$\left(x + \frac{1}{2x} - 1\right)^2 \geqslant \left(1 - \frac{xy}{z}\right)\left(1 - \frac{zx}{y}\right).$$

Действительно, это неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\frac{x}{yz}(y-z)^2\geqslant 0,$$

что, очевидно, имеет место, ибо $x,\ y,\ z>0$, причем равенство достигается в случае, когда $x=\frac{1}{2},\ y=z$.

Аналогично,

$$\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)^2\geqslant\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{xy}{z}\right),$$

$$\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)^2\geqslant\left(1-\frac{zx}{y}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right).$$

Почленно перемножая полученные неравенства и извлекая корень из обеих частей, получаем

$$\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right),$$

причем равенство достигается лишь при одновременном выполнении условий $x=0{,}5, y=z,\ \ y=0{,}5, z=x,\ \ z=0{,}5, x=y$. Итак, окончательно, $x=y=z=0{,}5$.

Второе решение. Поскольку выполнено условие (1), то можно воспользоваться известным неравенством $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$, которое выполнено для всех неотрицательных a,b,c (для доказательства этого неравенства достаточно трижды воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.) Тогда

$$\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8}\left(2-\frac{xy}{z}-\frac{yz}{x}\right)\left(2-\frac{yz}{x}-\frac{zx}{y}\right)\left(2-\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2-y\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right)\left(2-z\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right)\left(2-x\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left[\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\geqslant 2,\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant 2,\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geqslant 2\right]\leqslant(1-y)(1-z)(1-x).$$

С другой стороны, очевидно, что для положительных x, y, z выполнены неравенства

$$x+\frac{1}{2x}-1\geqslant 1-x,\quad y+\frac{1}{2y}-1\geqslant 1-y,\quad z+\frac{1}{2z}-1\geqslant 1-z,$$

причем равенства возможны лишь при $x=y=z=0,5$.

Проверкой убеждаемся, что тройка $(0,5;0,5;0;5)$ удовлетворяет исходному равенству.

11.3. Ответ: $n\leqslant 2$.

Обозначим V_i — множество целочисленных векторов, которым идет i-ый цвет, $i=\overline{1,n}$, V — множество всех целочисленных векторов. Из условия $V=V_1\cup V_2\cup\dots\cup V_n$.

Случай $n=1$ очевиден.

Пусть $n=2$. При $V_1\subset V_2$ (или $V_2\subset V_1$) 2-ой (соответственно 1-ый) цвет удовлетворит требованию задачи. Если же ни одно из этих включений не выполнено, то найдутся векторы $a\in V_1\backslash V_2$ и $b\in V_2\backslash V_1$. Целочисленный вектор $a+b\in V$ должен принадлежать V_1 или V_2; не нарушая общности, $a+b\in V_1$. Но тогда $b=(a+b)-a$ представим в виде линейной комбинации векторов 1-го цвета, т.е. $b\in V_1$, что противоречит выбору вектора b.

Приведем теперь пример для 3-х цветов, на котором условие не выполняется (при $n>3$ остальные цвета при раскраске можно просто игнорировать).

Цвет 1: (2,0), (0,1). Цвет 2: (1,0), (0,2). Цвет 3: (1,-1), (1,1).

Ясно, что $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \vdots 2\}$, $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \vdots 2\}$. Далее, для любых целых a, b получаем

$$a(1,-1) + b(1,1) = (a+b, a-b), \text{ и } (a+b)-(a-b) = 2b \vdots 2,$$

а для любых целых x, y, таких что $x - y \vdots 2$,

$$(x,y) = \frac{x-y}{2}(1,-1) + \frac{x+y}{2}(1,1),$$

откуда $(x,y) \in V_3$. Тогда $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x-y) \vdots 2\}$. Получаем, что $V_i \neq V$, $i = \overline{1,3}$, но $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, так как при нечетных x и y $(x-y) \vdots 2$.

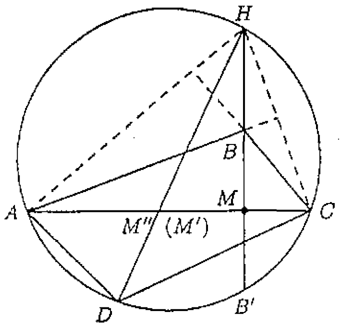
11.4. Решение. Пусть $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. Тогда из условия : $\dfrac{AM\,CM'}{AM'\,CM} = \dfrac{ac}{bd}$. Пусть H – ортоцентр ABC. Докажем, что DH пересекает AC в M'' и $\dfrac{AM\,CM''}{AM''\,CM} = \dfrac{ac}{bd}$, тогда $M' = M''$ и задача решена.

Лемма. *H лежит на окружности, описанной около ACD.*

Действительно, $\angle HAC = 90° - \angle ACB$, $\angle HCA = 90° - \angle BAC$ (поскольку AH и CH высоты треугольника ABC). Тогда $\angle AHC = \angle ACB + \angle BAC = 180° - \angle ABC = 180° - \angle ADC$, т.е. $\angle AHC + \angle ADC = 180°$.

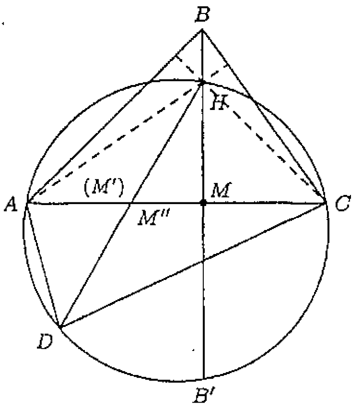
Лемма. *Пусть K точка на стороне AC произвольного треугольника ABC. Пусть $\angle ABK = \alpha, \angle CBK = \beta$. Тогда $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AB}{BC}\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.*

Требуемое равенство получается из теоремы синусов для треугольников ABK и CBK.



$\angle B > 90°$

Рис.1



$\angle B \leq 90°$

Рис.2

Построим точку B' симметричную B относительно AC. Тогда $B'A = BA = a, B'C = BC = b$. Из леммы 1 следует, что $ADCH$ — вписанный четырехугольник, тогда

$$\angle ADM'' = \angle AB'M = \alpha, \angle CDM'' = \angle CB'M = \beta.$$

Из леммы 2 имеем:

$$\frac{AM''}{M''C} = \frac{AD}{DC}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d}{c}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{AM}{MC} = \frac{AB'}{CB'}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Разделив второе равенство на первое, получаем требуемое.