Министерство образования Республики Беларусь

« LV »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день

Гродно 2005

УДК 372.851.046.14

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 55-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Архипов С.А.	**(7.5, 9.5)**
Базылев Д.Ф.	**(8.7, 11.5)**
Воронович И.И.	**(7.6, 7.7, 8.5, 8.6, 9.8, 10.5, 10.7)**
Жихович М.И.	**(11.6)**
Каскевич В.И.	**(7.8)**
Мазаник С.А.	**(9.6)**
Пирютко Е.В.	**(9.7, 9.8)**
Сендеров В.А.	**(9.7)**
Соболевский С.Л.	**(8.8, 11.7)**
Сморщок М.Н.	**(10.6)**
Токарев С.И.	**(10.8, 11.8)**

По заказу Министерства образования Республики Беларусь данное издание подготовлено Е.А.Барабановым, И.И.Вороновичем, В.И.Каскевичем, С.А.Мазаником при участии и финансовой поддержке Общественного объединения «Белорусская ассоциация «Конкурс».

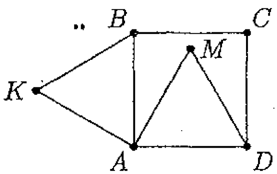
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.5. Докажите, что если при некоторых натуральных a и b число $a^2 - ab(b-2) + b^2 - b^3$ — натуральное простое, то $a - b$ является квадратом ~~натурального~~ целого числа.

7.6. На сторонах квадрата $ABCD$ построены два равносторонних треугольника ABK и ADM (см. рис.).

Докажите, что точки K, M и C лежат на одной прямой.



7.7. Найдите все a, такие, что для всякого числа x неравенство $a > x$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a > 0,8x + 401$.

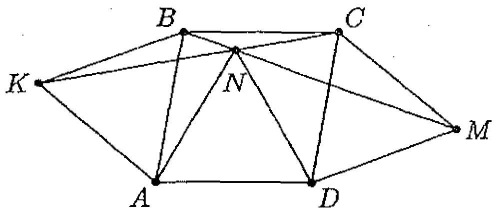
7.8. Квадрат $n \times n$ ($n \geqslant 3$) разбит на клетки со стороной 1. Какая-то из клеток окрашена в черный цвет, остальные клетки — белые. За один ход разрешается перекрасить в противоположные цвета любые три подряд идущие клетки в одном столбце или в в одной строке.

а) Можно ли с помощью таких ходов перекрасить все клетки квадрата в белый цвет ?

б) Можно ли сделать то же самое, если за один ход разрешается перекрасить в противоположные цвета любые три клетки, образующие уголок ?

8 класс

8.5. Острый угол ромба $ABCD$ больше $60°$. На его сторонах построены два равносторонних треугольника ABK и CDM (см. рис.). Пусть N — точка пересечения прямых KC и BM.



Докажите, что треугольник AND равносторонний.

9.6. Найдите все a, такие, что для всякого числа x неравенство $a > x$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$a > \frac{x^3 - 2}{3}$.

9.7. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — целые числа, $a \neq 0$. Известно, что уравнение $f(x) = x$ имеет по крайней мере один целый корень.

Найдите $f(2005)$, если $f(f(2005)) = 2005$.

9.8. Все депутаты парламента разделены на несколько (более одной) фракций. Согласно уставу, никакая из фракций не может состоять менее чем из 5 человек, и численности всех фракций должны быть различны. После парламентских каникул фракции распались, а вместо них, с соблюдением требований устава, образовалось несколько новых фракций, при этом часть депутатов стали независимыми (т.е. не вошли ни в одну из фракций). Кроме того, оказалось, что если до каникул какие-либо два депутата входили в одну и ту же фракцию, то после каникул они в одну и ту же фракцию не входят.

Докажите, что существовала фракция, по меньшей мере 8 из членов которой после каникул стали независимыми.

9 класс

9.5. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n справедливо неравенство

$$|n\sqrt{2005} - m| > \frac{1}{90n}.$$

9.6. На стороне CD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) отмечена точка K так, что треугольник ABK равносторонний.

Докажите, что на прямой AB существует такая точка L, что треугольник CDL также равносторонний.

9.7. Бесконечная последовательность натуральных чисел такова, что произведение ее первых n членов делится на их сумму при любом натуральном n.

Может ли такая последовательность быть

а) арифметической прогрессией; б) геометрической прогрессией ?

9.8. а)Докажите, что множество $M = \{1, 2, 3, ...99, 100\}$ нельзя разбить менее, чем на 4 подмножества так, чтобы из равенства $a - b = n^2$, где n — целое число, a и b принадлежат M, следовало, что a и b лежат в различных подмножествах.

б) Можно ли разбить M на 5 подмножеств указанным образом?

10 класс

10.5. Докажите, что

$$\frac{1}{2n} < \{n\sqrt{7}\} < 1 - \frac{1}{6n}$$

для любого натурального n.

(Здесь через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x.)

10.6. На какое минимальное число подмножеств можно разбить множество $M = \{1, 2, 3, ...29, 30\}$, чтобы из равенства $a + b = n^2$, где a и b — различные числа из M, n — целое число, следовало, что a и b лежат в разных подмножествах?

10.7. Найдите все такие функции f, определенные на множестве натуральных чисел и принимающие только натуральные значения, что для любых натуральных n и m выполняется равенство

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n).$$

10.8. Существует ли выпуклый семиугольник, в котором каждый из внутренних углов делится пополам некоторой диагональю?

11 класс

11.5. Известно, что

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d =$$

$$= 4(\sin a \sin b \sin c \sin d - \cos a \cos b \cos c \cos d),$$

где $0 < a < b < c < d < \dfrac{\pi}{2}$.

Найдите все значения, которые может принимать сумма $a + b + c + d$.

11.6. а) Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ удовлетворяет для каждого натурального n равенству $f(n) = f(n + f(n))$.

Докажите, что если f принимает конечное число значений, то f — периодическая функция.

б) Приведите пример непериодической функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющей для каждого натурального n равенству $f(n) = f(n + f(n))$.

11.7. Все депутаты парламента разделены на 10 фракций. Согласно уставу, никакая из фракций не может состоять менее чем из 5 человек, и численности всех фракций должны быть различны. После парламентских каникул фракции распались, а вместо них, с соблюдением требований устава, образовалось несколько новых фракций, при этом часть депутатов стали независимыми (т.е. не вошли ни в одну из фракций). Кроме того, оказалось, что если до каникул какие-либо два депутата входили в одну и ту же фракцию, то после каникул они в одну и ту же фракцию не входят.

Найдите минимально возможное количество депутатов, которые стали независимыми после парламентских каникул.

11.8. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждый из внутренних углов делится пополам некоторой диагональю?

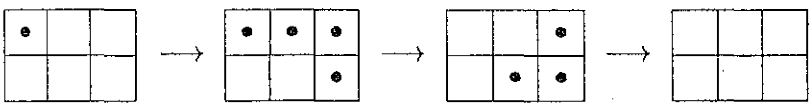
7.7. Ответ: $a = 2005$.

Неравенство $a > 0,8x + 401$ равносильно неравенству $\dfrac{a-401}{0,8} > x$. Поэтому согласно условию $a > x \Leftrightarrow \dfrac{a-401}{0,8} > x$. Утверждаем, что тогда $a = \dfrac{a-401}{0,8}$. Действительно, если это не так, то, взяв x в интервале между a и $\dfrac{a-401}{0,8}$, получили бы, что ровно одно из неравенств $a > x$ и $\dfrac{a-401}{0,8} > x$ не выполнено — противоречие. Итак, $a = \dfrac{a-401}{0,8}$, откуда $a = 2005$.

7.8. Ответ: а) нельзя, б) можно.

а) Пронумеруем клетки данного квадрата числами 1, 2 и 3 так, чтобы любые три подряд идущие клетки в одной строчке и в одном столбце имели разные номера. Рассмотрим n_i — количество всех черных клеток с номером i. Легко заметить, что после каждого хода разности $n_1 - n_j$ ($i \neq j$) не меняют четность. Поэтому перекрасить все клетки квадрата в один цвет нельзя.

б) На следующем рисунке показано, как перекрасить в другой цвет клетку, отмеченную символом $\bullet$, сохранив цвет остальных клеток. Заметим, что любая клетка квадрата $n \times n$, $n \geqslant 3$, является угловой клеткой какого-либо прямоугольника 2×3, кроме случая $n = 3$ и центральной клетки этого квадрата 3×3. Но цвет этой клетки можно изменить за один ход, а затем при необходимости проделать описанные ходы с крайними клетками таблицы 3×3.

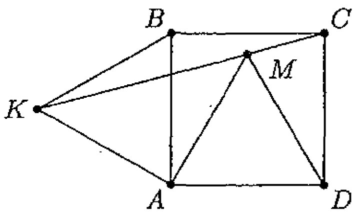


РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.5. Имеем $a^2 - ab(b-2) + b^2 - b^3 = a^2 + 2ab + b^2 - ab^2 - b^3 = (a+b)^2 - b^2(a+b) = (a+b-b^2)(a+b)$. Так как данное число простое и $a+b \geqslant 2$, то $a+b-b^2 = 1$, тогда $a = b^2 - b + 1$, поэтому $a - b = (b-1)^2$, что и требовалось доказать.

7.6. Так как все углы равностороннего треугольника равны $60°$, то $\angle MDC = 90° - \angle MDA = 90° - 60° = 30°$. Кроме того, поскольку треугольник MDC равнобедренный ($MD = CD$), то



$$\angle CMD = \angle MCD = \frac{1}{2}(180° - \angle MDC) = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°.$$

Далее,

$$\angle KAM = 60° + \angle BAM = 60° + (90° - 60°) = 90°;$$

треугольник KAM равнобедренный ($KA = AM$), поэтому

$$\angle KMA = \angle MKA = \frac{1}{2}(180° - \angle KAM) = \frac{1}{2}(180° - 90°) = 45°.$$

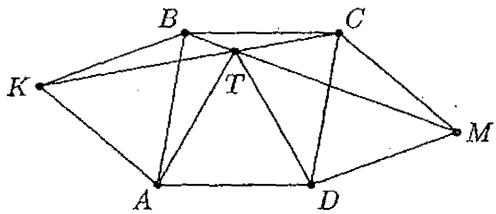
Следовательно,

$$\angle KMC = \angle KMA + \angle AMD + \angle DMC = 45° + 60° + 75° = 180°.$$

Это и означает, что точки K, M и C лежат на одной прямой.

8 класс

8.5. Покажем, что если T — вершина равностороннего треугольника ATD (см. рис.), то точка T совпадает с точкой N. Для этого достаточно доказать, что точки K, T, C лежат на одной прямой и что точки B, T, M также лежат на одной прямой. Пусть



$\angle BAD = \alpha > 60°$. Так как треугольник KAT равнобедренный ($AK = AT$) и

$$\angle KAT = \angle KAB + \angle BAT = 60° + (\angle BAD - \angle TAD) =$$

$$= 60° + (\alpha - 60°) = \alpha,$$

то

$$\angle ATK = \angle AKT = \frac{1}{2}(180° - \angle KAT) = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично,

$$\angle TDC = \angle ADC - \angle ADT = 180° - \alpha - 60° = 120° - \alpha,$$

и, так как треугольник TDC равнобедренный ($TD = DC$), то

$$\angle DTC = \angle DCT = \frac{1}{2}(180° - \angle TDC) = \frac{1}{2}(180° - 120° + \alpha) = 30° + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle KTC = \angle KTA + \angle ATD + \angle DTC = 90° - \frac{\alpha}{2} + 60° + 30° + \frac{\alpha}{2} = 180°.$$

Это и означает, что точки K, T и C лежат на одной прямой. Аналогично показывается, что точки B, T и M также лежат на одной прямой.

Таким образом, точка T принадлежит обеим прямым KC и BM, тем самым, является их точкой пересечения и, значит, совпадает с точкой N, что и требовалось доказать.

8.6. Ответ: $a = -1;\ 2$.

Неравенство $a > \frac{x^3-2}{3}$ равносильно неравенству $3a+2 > x^3$. Кроме того $a > x \Leftrightarrow a^3 > x^3$. Поэтому согласно условию имеем: $a^3 > x^3 \Leftrightarrow 3a+2 > x^3$. Утверждаем, что тогда $a^3 = 3a+2$. Действительно, если это не так, то, взяв x^3 в интервале между a^3 и $3a+2$, получили бы, что ровно одно из неравенств $a^3 > x^3$ и $3a+2 > x^3$ не выполнено — противоречие. Итак, $a^3 = 3a+2$, т. е. $(a-2)(a+1)^2 = 0$, откуда $a = 2$ или $a = -1$.

8.7. Ответ: $f(2005) = 2005$.

Пусть $n = 2005$, $m = f(n)$. Тогда $f(m) = f(f(n)) = n$. Имеем $f(m) = n$ и $f(n) = m$, т. е.

$$\begin{cases} an^2 + bn + c = m, \\ am^2 + bm + c = n. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $(a(n+m)+b)(n-m) = m-n$. Предположим, что $m \neq n$, тогда находим $b = -1 - am - an$, поэтому

$$c = m - an^2 - bn = m - an^2 - (-1 - am - an)n = m + n + amn.$$

Пусть x_0 — целый корень уравнения $f(x) = x$. Тогда $ax_0^2 + (b-1)x_0 + c = 0$, т.е.

$$ax_0^2 - (am + an + 2)x_0 + (m + n + amn) = 0.$$

Следовательно, $D = (am + an + 2)^2 - 4a(m + n + amn)$ является квадратом некоторого целого числа d.

Далее,

$$(am+an+2)^2 - 4a(m+n+amn) = d^2 \iff (a(m-n))^2 + 4 = d^2$$

$$\iff (d - a(m-n))(d + a(m-n)) = 4.$$

Так как числа $d-a(m-n)$ и $d+a(m-n)$ имеют одинаковую четность, то

$$\text{либо} \quad \begin{cases} d-a(m-n)=2, \\ d+a(m-n)=2, \end{cases} \qquad \text{либо} \quad \begin{cases} d-a(m-n)=-2, \\ d+a(m-n)=-2. \end{cases}$$

В обоих случаях получим $a(m-n)=0$, что противоречит условию $a\neq 0$ и предположению $m\neq n$. Стало быть, $m=n$ и, значит, $f(n)=n$ и, в частности, $f(2005)=2005$.

8.8. Пусть в начале размер наибольшей фракции составлял M депутатов, количество фракций равнялось S, и пусть K — количество членов наибольшей фракции, ставших после перегруппировки независимыми. Положим s — количество фракций после перегруппировки, m — размер наибольшей фракции.

Тогда, очевидно, $m\geqslant s+4$, $M\geqslant S+4$. Кроме того, $m\leqslant S$, поскольку в получившиеся после перегруппировки фракции попали представители различных фракций. Также имеет место неравенство $M-K\leqslant s$, поскольку все не ставшие независимыми члены наибольшей фракции распределились по разным фракциям. Итак, $M-K\leqslant s\leqslant m-4\leqslant S-4\leqslant M-8$, откуда $K\geqslant 8$.

9 класс

9.5. Предположим противное, т.е. существуют такие натуральные m и n, что $90n|n\sqrt{2005}-m|\leqslant 1$. Тогда

$$90n|n\sqrt{2005}-m|\leqslant 1 \iff 0<n\sqrt{2005}-\frac{1}{90n}\leqslant m\leqslant n\sqrt{2005}+\frac{1}{90n}$$

$$2005n^2+\frac{1}{8100n^2}-\frac{\sqrt{2005}}{45}\leqslant m^2\leqslant 2005n^2+\frac{1}{8100n^2}+\frac{\sqrt{2005}}{45}. \quad (1)$$

Так как $m\in\mathbb{N}$, то $m^2\leqslant 2005n^2+\frac{1}{8100n^2}+\frac{\sqrt{2005}}{45}<2005n^2+1+1$, т.е.

$$m^2\leqslant 2005n^2+1. \quad (2)$$

С другой стороны,

$$m^2 \geqslant 2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} - \frac{\sqrt{2005}}{45} > 2005n^2 + 0 - 1,$$

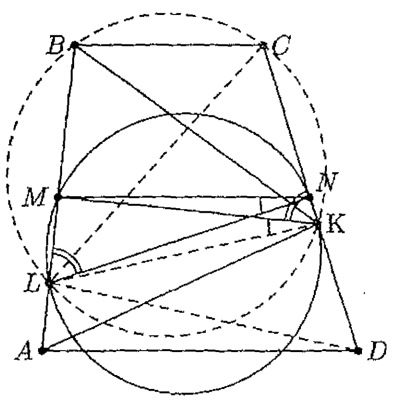
т.е. $m^2 \geqslant 2005n^2$. Однако равенство $\frac{m}{n} = \sqrt{2005}$ невозможно, поэтому $m^2 \geqslant 2005n^2 + 1$. Тогда из (2) следует, что $m^2 = 2005n^2 + 1$. Подставляя это значение m^2 в (1), получим

$$2005n^2 + 1 \leqslant 2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} + \frac{\sqrt{2005}}{45} \iff \frac{45 - \sqrt{2005}}{45} \leqslant \frac{1}{8100n^2}$$

$$\iff n^2 \leqslant \frac{45 \cdot (45 + \sqrt{2005})}{8100 \cdot 20} < \frac{2 \cdot 45^2}{8100 \cdot 20} < 1.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

9.6. Пусть M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Проведем через точку N прямую, перпендикулярную CD, и пусть L — точка ее пересечения с прямой AB. Докажем, что L искомая точка. Так как LN — серединный перпендикуляр к CD, то треугольник CLD равнобедренный, и, значит, для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что $\angle LCD = 60°$.



Поскольку $KM \perp AB$ как медиана равностороннего треугольника ABK, то прямые углы LMK и LNK опираются на общий отрезок LK. Следовательно, точки L, M, N, K лежат на одной окружности. Поэтому $\angle MNL = \angle MKL$ и $\angle MLN = \angle MKN$. Заметим, что $\angle BMN = \angle MNL + \angle MLN$ как внешний угол треугольника LMN. Поэтому $\angle BMN = \angle MKL + \angle MKN = \angle LKN$. Кроме того, MN — средняя линия трапеции $ABCD$, поэтому $\angle BMN + \angle MBC = 180°$. Таким образом, $\angle LKN + \angle MBC = 180°$, откуда следует, что точки L, B, C, K лежат на одной окружности. Но тогда $60° = \angle LBK = \angle LCK = \angle LCD$, что и требовалось доказать.

9.7. Ответ: а) да; б) нет.

а) Рассмотрим прогрессию 24, 40, 56..., т.е. $a_1 = 24$, $a_n = 24+ +16(n-1)$, $a_1 + ... + a_n = 24n + 8n(n-1) = 8n(n+2)$, $a_1 \cdot ... \cdot a_n = = 24\cdot(24+16)\cdot...\cdot(24+16(n-1)) = 8^n\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2n+1)$, т.е. произведение $a_1 \cdot ... \cdot a_n$ делится на любое нечётное число, меньшее $2n+3$. При $n = 1$ и $n = 2$ имеем: $24 \,\vdots\, 24$ и $24 \cdot 40 \,\vdots\, 64$. Положим $n \geqslant 3$, $n = 2^{m_1}(2k_1+1)$, $n+2 = 2^{m_2}(2k_2+1)$, $k_1, k_2 \geqslant 0$, т.к. $n < 2^n$, то $m_1 < n$, $m_2 < n+2$, т.е. $m_1 \leqslant n-1$, $m_2 \leqslant n+1$. Тогда $3n \geqslant 2n+3 \geqslant m_1 + m_2 + 3$, откуда $8^n = 2^{3n} \,\vdots\, 8 \cdot 2^{m_1}2^{m_2}$. Т.к. $(n, n+2) = (2, n) = 1$ или 2, то $(2k_1+1, 2k_2+1) = 1$, кроме того $2k_1 + 1 \leqslant n < 2n+1$, $2k_2 + 1 \leqslant 2n + 1$, откуда $3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1) \,\vdots\, (2k_1+1)(2k_2+1)$ и окончательно:

$$a_1 \cdot ... \cdot a_n = 8^n \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1) \,\vdots\, 8 \cdot 2^{m_1}2^{m_2}(2k_1+1)(2k_2+1) =$$

$$= 8n(n+2) = a_1 + ... + a_n,$$

что и требовалось.

б) Предположим противное. Пусть прогрессия $b_1 = b$, $b_2 = bq$, ..., $b_n = bq^{n-1}$, $q \neq 1$ удовлетворяет условию:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots b_n = b^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \,\vdots\, b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

откуда, т.к. $(q^{\frac{n(n-1)}{2}}, q^n - 1) = 1$, получим для любого натурального n: $b^{n-1}(q-1) \,\vdots\, q^n - 1$. Пусть p — такое простое число, что $(b, p) = 1$, $(q-1, p) = 1$, $(q, p) = 1$. Тогда $q^{p-1} - 1 \,\vdots\, p$, однако $b^{n-1}(q-1)$ не кратно p — противоречие. (Второй способ доказательства того, что b^n не может делиться на Q_n, $Q_n = q^n + q^{n-1} + ... + q + 1$, при всех натуральных n основан на следующем факте: среди членов последовательности (Q_n), существует бесконечно много попарно взаимно простых чисел, в то время как число b, а вместе с ним и b^n, имеет лишь конечное число простых делителей. Действительно, $(Q_2, Q_1) = (q^2+q+1, q+1) = 1$. Нетрудно проверить, что если числа Q_{k_1}, Q_{k_2}, ..., Q_{k_m} — попарно взаимно просты, то при всех $i = 1, ..., m$ будет выполнено $(Q_{k_{m+1}}, Q_{k_i}) = 1$, если $k_{m+1} = (k_1+1)(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_m+1)$.)

Пусть теперь $q = 1$. Тогда $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots b_n = b^n$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = bn$, откуда $b^{n-1} \vdots n$, что, очевидно, не выполняется при всех n. Таким образом, прогрессии с указанным свойством не существует.

9.8. Предположим противное. Обозначим $a \sim b$, если a и b принадлежат одному подмножеству и $a \nsim b$ в противном случае. При $n \leqslant 75$ имеем $n \nsim n+25$ и $n \nsim n+9$, $n \nsim n+16$, $n+9 \nsim n+25$, $n+16 \nsim n+25$, откуда, так как подмножеств не более трёх, $n+9 \sim n+16$. Таким образом, при $m = n+9$, $10 \leqslant m \leqslant 84$ имеем: $m \sim m+7$, откуда при $m = 10$ получим $10 \sim 17 \sim 24 \sim 31 \sim 38 \sim 45 \sim 52 \sim 59$, т.е. $10 \sim 59$, в то время как $59 - 10 = 7^2$ — противоречие.

Покажем, что на 5 подмножеств М разбить можно. Положим

$$A_1 = \{10k, 1 \leqslant k \leqslant 10\} \bigcup \{10k+3, 0 \leqslant k \leqslant 9\},$$

$$A_2 = \{10k+1, 0 \leqslant k \leqslant 9\} \bigcup \{10k+4, 0 \leqslant k \leqslant 9\},$$

$$A_3 = \{10k+2, 0 \leqslant k \leqslant 9\} \bigcup \{10k+5, 0 \leqslant k \leqslant 9\},$$

$$A_4 = \{10k+6, 0 \leqslant k \leqslant 9\} \bigcup \{10k+8, 0 \leqslant k \leqslant 9\},$$

$$A_5 = \{10k+7, 0 \leqslant k \leqslant 9\} \bigcup \{10k+9, 0 \leqslant k \leqslant 9\}.$$

Действительно, так как квадрат натурального числа может давать при делении на 10 в остатке лишь 0, 1, 4, 5, 6, 9, то разность двух чисел a и b из одного подмножества в указанном разбиении может быть квадратом, если только $a - b \vdots 10$, однако тогда $a - b \geqslant 100$. Значит, указанное разбиение удовлетворяет условию.

10 класс

10.5. Докажем, что $\{n\sqrt{7}\} > \frac{1}{2n}$. Обозначим через $[x]$ целую часть числа x. Пусть $m = [n\sqrt{7}]$, тогда $m < n\sqrt{7}$. Получим:

$$\{n\sqrt{7}\} = n\sqrt{7} - [n\sqrt{7}] = n\sqrt{7} - m = \frac{7n^2 - m^2}{n\sqrt{7} + m} > \frac{7n^2 - m^2}{2n\sqrt{7}}.$$

Заметим, что уравнения $7n^2 - m^2 = 1$ и $7n^2 - m^2 = 2$ не имеют решений в целых числах m и n, так как квадрат целого числа не может давать остатки -1 и -2 при делении на 7. Значит, $7n^2 - m^2 \geqslant 3$, тогда $\{n\sqrt{7}\} > \frac{7n^2 - m^2}{2n\sqrt{7}} \geqslant \frac{3}{2n\sqrt{7}} > \frac{1}{2n}$.

Докажем теперь вторую часть неравенства. Пусть $m = [n\sqrt{7}] + 1$. Тогда

$$m > n\sqrt{7} \Rightarrow m^2 > 7n^2 \implies m^2 \geqslant 7n^2 + 1 = 7n^2\left(1 + \frac{1}{7n^2}\right) \implies$$

$$\implies m^2 \geqslant 7n^2\left(1 + \frac{2}{15n^2} + \frac{1}{15^2n^4}\right) = 7n^2\left(1 + \frac{1}{15n^2}\right)^2$$

(так как $\frac{2}{15n^2} + \frac{1}{15^2n^4} < \frac{1}{7n^2}$, поскольку $\frac{1}{15^2n^4} < \frac{1}{105}$), откуда получаем

$$m > n\sqrt{7}\left(1 + \frac{1}{15n^2}\right) \implies m > n\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{15n} \implies$$

$$\implies \{n\sqrt{7}\} < 1 - \frac{\sqrt{7}}{15n} < 1 - \frac{1}{6n}.$$

10.6. Ответ: 3.

Заметим, что числа 6, 19 и 30 лежат в разных подмножествах, так как $6 + 19 = 5^2$, $19 + 30 = 7^2$, $6 + 30 = 6^2$. Значит, количество подмножеств не менее трёх.

С другой стороны, множество M можно разбить на три подмножества с указанным свойством: $M = A \bigsqcup B \bigsqcup C$, где

$$A = \{4k+3 : 0 \leqslant k \leqslant 6\} \bigsqcup \{4k : 0 \leqslant k \leqslant 7\} \setminus \{12, 28, 20\},$$
$$B = \{4k+1 : 0 \leqslant k \leqslant 7\} \bigsqcup \{4k+2 : 0 \leqslant k \leqslant 7\} \setminus \{6, 14, 26\},$$
$$C = \{12, 28, 20, 6, 14, 26\},$$

а знак „ $\bigsqcup$ “ обозначает объединение непересекающихся множеств. Действительно, так как квадрат целого числа при делении на 4 не может давать в остатке 2 или 3, то сумма двух чисел вида $4k+3$ и $4k+3$, $4k+3$ и $4k$, $4k+1$ и $4k+1$, $4k+1$ и $4k+2$ не может быть квадратом. Остаётся непосредственно проверить, что сумма любых двух чисел каждого из множеств

$$\{4k : 0 \leqslant k \leqslant 7\} \setminus \{12, 28, 20\} = \{4, 8, 16, 24\}$$
$$\{4k+2 : 0 \leqslant k \leqslant 7\} \setminus \{6, 14, 26\} = \{2, 10, 18, 22, 30\}$$
$$\{12, 28, 20, 6, 14, 26\},$$

не является квадратом.

10.7. Ответ: $f(n) = 2n$.

Так как по условию равенство

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n) \qquad (1)$$

выполнено для всех натуральных m и n, а функция f определена только на $\mathbf{N}$, то, это, в частности, означает, что аргумент левой части $m - n + f(n) \in \mathbf{N}$, а значит, $f(n) \geqslant n$. Положим $F(n) = f(n) - n$ (согласно предыдущему $F : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \bigcup 0$). Заменим в тождестве (1) $f(n)$ на $F(n) + n$. После очевидных преобразований будем иметь:

$$F(F(n) + m) = F(m) + n \quad \text{для любых} \quad m, n \in \mathbf{N}. \qquad (2)$$

Добавив к обеим частям этого тождества по 1 и положив в нём $m = 1$, получим:

$$F(F(n) + 1) + 1 = F(1) + n + 1 \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N}. \qquad (3)$$

Применим к обеим частям тождества (3) (они — натуральные числа) функцию F. Тогда, учитывая тождество (2), получим:

$$F(1)+F(n)+1=F(n+1)+1,$$

или

$$F(n+1)=F(n)+F(1) \quad \text{при всех} \quad n\in\mathbf{N},$$

т. е.

$$F(n)=F(n-1)+F(1) \quad \text{при всех натуральных} \quad n\geqslant 2. \qquad (4)$$

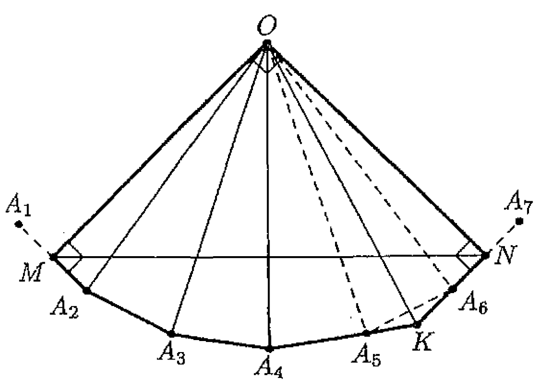
Поэтому, применяя (4), получим: $F(n)=nF(1)$ для всех $n\in\mathbf{N}$.

Подставим это представление в тождество (2), получим $(F(1))^2=$ $=1$, т. е. $F(1)=\pm1$. Если $F(1)=-1$, то $f(1)=0$, чего быть не может, поскольку $0\notin\mathbf{N}$. Значит, $F(1)=1$ и $F(n)=n$. Отсюда $f(n)=2n$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $f(n)=2n$, $n\in\mathbf{N}$, удовлетворяет тождеству (1).

10.8. Ответ: да, существует.

Рассмотрим правильный 20-угольник $A_1A_2\ldots A_{20}$. Пусть O — его центр, точки M и N — середины сторон A_1A_2 и A_6A_7 соответственно, а K — точка пересечения прямых A_4A_5 и A_6A_7 (см. рис.).



Тогда семиугольник $OMA_2A_3A_4KN$ — искомый (на рисунке его периметр выделен жирной линией).

В самом деле, прямые OA_2, OA_3, OA_4 и OK — оси симметрии 20-угольника $A_1A_2\ldots A_{20}$. Поэтому они являются биссектрисами углов семиугольника с вершинами в точках A_2, A_3, A_4

и K соответственно. Так как прямая OA_4, кроме того, является осью симметрии 8-угольника $OMA_2A_3A_4A_5A_6N$, то она — биссектриса угла с вершиной O. Далее, докажем, что прямая MN является биссектрисой углов семиугольника с вершинами M и N. В самом деле, легко видеть, что $\angle MON = 90°$, а так как $\triangle MON$ равнобедренный ($OM = ON$), то $\angle OMN = \angle ONM = 45°$, что и утверждалось.

11 класс

11.5. Ответ: π.

Имеем

$$\cos 2a + \cos 2b = 2\cos(a+b)\cos(a-b) = 2(\cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b)$$

и

$$\cos 2c + \cos 2d = 2\cos(c+d)\cos(c-d) = 2(\cos^2 c\cos^2 d - \sin^2 c\sin^2 d).$$

Переносся все слагаемые в равенстве из условия в левую часть, получим

$$2(\cos^2 a\cos^2 b + \cos^2 c\cos^2 d + 2\cos a\cos b\cos c\cos d) -$$

$$-2(\sin^2 a\sin^2 b + \sin^2 c\sin^2 d + 2\sin a\sin b\sin c\sin d) = 0,$$

откуда

$$(\cos a\cos b + \cos c\cos d)^2 - (\sin a\sin b + \sin c\sin d)^2 = 0,$$

что равносильно

$$(\cos a\cos b - \sin a\sin b + \cos c\cos d - \sin c\sin d)\times$$

$$\times(\cos a\cos b + \sin a\sin b + \cos c\cos d + \sin c\sin d) =$$

$$= (\cos(a+b) + \cos(c+d))(\cos(a-b) + \cos(c-d)) =$$

$$= \cos\frac{a+b+c+d}{2}\cdot\cos\frac{a+b-c-d}{2}\times$$

$$\times \cos\frac{a-b+c-d}{2}\cdot\cos\frac{a-b-c+d}{2}=0.$$

И так как $a,b,c,d \in (0,\pi/2)$, то $\dfrac{a+b+c+d}{2} \in (0,\pi)$,

$$\frac{a+b-c-d}{2},\ \frac{a-b+c-d}{2},\ \frac{a-b-c+d}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{a+b+c+d}{2}=\frac{\pi}{2} \iff a+b+c+d=\pi.$$

Пример: $a=b=c=d=\dfrac{\pi}{4}$. $a=15^\circ$; $b=30^\circ$; $c=60^\circ$; $d=75^\circ$
и вообще $a+b+c+d=\pi$

11.6. а) Подставим в равенство $f(n)=f(n+f(n))$ вместо n выражение $n+f(n)$, получаем $f(n)=f(n+2f(n))$. По индукции доказывается, что $f(n)=f(n+kf(n))$, для любых натуральных n,k.

Пусть $A=\{a_1,...,a_t\}$ — множество значений, которые принимает функция f. Пусть $T=a_1\cdot\ldots\cdot a_t$. Покажем, что T — период функции f, то есть $f(n+T)\equiv f(n)$ для любого натурального n. Мы знаем, что $f(n)=f(n+k_1f(n)), f(n+T)=f(n+T+k_2f(n+T))$ для любых натуральных k_1 и k_2. Пусть $a=f(n), b=f(n+T)$, где $a,b\in A$. Тогда при $k_1=\dfrac{2T}{a}, k_2=\dfrac{T}{b}$ имеем $n+k_1f(n)=n+T+k_2f(n+T)$. Отсюда $a=b$.

б) Для $n=2^km$, $k\in\mathbb{N}\cup 0, (m,2)=1$, определим функцию f следующим образом $f(n)=2^{k+1}$. Легко видеть, что данная функция удовлетворяет равенству $f(n)=f(n+f(n))$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Заметим, что $f(2T)=f(T)+1$, поэтому f непериодична.

11.7. Ответ: 50.

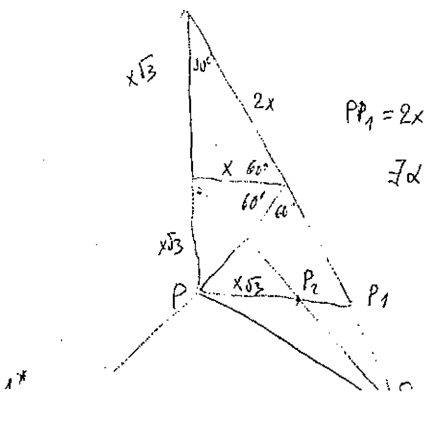
Решим задачу в общем виде. Пусть S — количество исходных фракций, s — количество фракций после перегруппировки, m — размер наибольшей из получившихся фракций.

Тогда, очевидно, $m\leqslant S$, поскольку в получившиеся после перегруппировки фракции попали представители различных фракций. Пусть

n — общее количество депутатов, k — количество депутатов, ставших независимыми. Имеем: $5+6+\ldots+m+k \geqslant n \geqslant 5+6+\cdots+(S+4)$, откуда, в силу $m \leqslant S$, имеем $k \geqslant 4S+10$.

Пример для $k = 4S+10$. Пусть размеры исходных фракций $5, 6$, ..., $S+4$. Распределяем членов наибольшей из фракций по $S+4$ новым фракциям. Членов второй по величине фракции распределяем по из этих первым $S+3$ фракциям, и.т.д, членов наименьшей фракции распределяем по первым пяти фракциям. В итоге, первые пять новых фракций окажутся одинакового размера S, а последние четыре - размера $1, 2, 3, 4$. Сделаем членов первых и последних четырех фракций нейтральными (всего $4S+10$ членов). Останется $S-4$ фракции размера $5, 6$, ..., S. Очевидно, условие задачи выполняется. При $S = 10$ получаем ответ: 50.

11.8. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle A = 30°$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = 150° - \alpha$. Через ω обозначим вневписанную окружность, касающуюся BC, через O — центр ω, через P — точку пересечения прямых BO и AC, а через Q — точку пересечения прямых CO и AB. Будем считать, что $\alpha < 120°$; тогда точка C окажется между A и P, а точка B — между A и Q. Пусть A^* — точка, симметричная точке A относительно прямой PQ. Тогда при $\alpha = 75°$ (т.е. при $AB = AC$) биссектриса угла QA^*P проходит через точку A, а при $\alpha = 90°$ — пересекает отрезок CP. Следовательно, если при фиксированных прямых AB, AC и окружности ω мы будем двигать отрезок BC так, чтобы он все время касался ω, то при некотором значении α из интервала $(75°, 90°)$ окажется, что биссектриса угла QA^*P проходит через точку C, т.е. пятиугольник BQA^*PC — искомый.



$PP_1 = 2x$. Бис. угла A^* не пересечет AC до точки C.
$\exists \alpha$, что бис. A^* перес. AC в точке C.
(непрерывность).
Пятиугольник получается выпуклым.