Министерство образования Республики Беларусь

« LV »

Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Первый день

Гродно 2005

УДК 372.851.046.14

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 55-й Белорусской математической олимпиады школьников (первый день).

Авторы задач

Архипов С.А.	**(8.1, 9.1, 11.1)**
Воронович И.И.	**(9.2)**
Дудко Д.В.	**(7.2, 8.4, 9.4, 10.4, 11.4)**
Жихович М.И.	**(7.2, 8.4, 9.4, 11.4)**
Змейков Д.Ю.	**(10.3)**
Каскевич В.И.	**(9.3)**
Кохан А.И.	**(11.3)**
Лебедь В.В.	**(10.1)**
Мазаник С.А.	**(7.3, 8.3, 9.3)**
Миротин А.Р.	**(10.2)**
Пирютко Е.В.	**(10.1, 11.2)**
Соболевский С.Л.	**(8.2, 11.1)**
Шамрук А.А.	**(7.1, 7.4)**

По заказу Министерства образования Республики Беларусь данное издание подготовлено Е.А.Барабановым, И.И.Вороновичем, В.И.Каскевичем, С.А.Мазаником при участии и финансовой поддержке Общественного объединения «Белорусская ассоциация «Конкурс».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.1. Докажите, что если сумма квадратов натуральных простых чисел $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{2005}^2$ делится на 6, то и произведение этих чисел $p_1 p_2 \ldots p_{2005}$ также делится на 6.

7.2. При каком максимальном n существует таблица $3 \times n$, клетки которой можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух различных строчек и для любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет?

7.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. На стороне AC отмечена точка D так, что $AB = BD = DC$.

Докажите, что $\angle BKA = \angle CKD$.

7.4. Одноклассники Андрей, Юра и Петя участвовали в однокруговом (т. е. каждый участник с каждым из остальных сыграл ровно одну партию) турнире по шахматам. Оказалось, что из всех участников турнира: только Андрей одержал больше всех побед, только Юра не проиграл ни одной партии и только Петя набрал больше всех очков. (За выигрыш партии участник получает 1 очко, за проигрыш — 0 очков и за ничью $0,5$ очка.)

Какое число участников могло быть в таком турнире? (Найдите все возможные значения.)

8 класс

8.1. Некоторые три цифры в десятичной записи куба натурального числа увеличили на 1 или на 2 (независимо друг от друга).

Могло ли оказаться так, что полученное число также является кубом некоторого натурального числа?

8.2. Докажите, что для любых положительных чисел a и b имеет место неравенство

$$\left(a^2 + b^2 + 1/4\right)^2 \geqslant a^3 + b^3 + a^2b^2 + ab.$$

8.3. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AB = BD = DC$, а на стороне BC отмечена точка K так, что $\angle BKA = \angle CKD$.

Докажите, что AK — биссектриса угла BAC.

8.4. При каком максимальном n существует таблица $4 \times n$, клетки которой можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух различных строчек и для любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет?

9 класс

9.1. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$abc + ab + c = a^3.$$

9.2. Пусть N — точка пересечения отрезков AM и CK, где точки K и M отмечены соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что четырехугольники $AKMC$ и $KBMN$ вписанные.

Найдите угол ABC, если радиусы окружностей, описанных около указанных четырехугольников, равны.

9.3. Найдите $\left[\frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^{100}}{100!}\right]$, где через $[x]$ обозначается целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

(По определению $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$)

9.4. Найдите наибольшее n, при котором существует таблица $n \times n$, клетки которой можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух различных строк и для любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет.

10 класс

10.1. В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle A = 45^\circ$. Высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

Докажите, что прямые BC, B_1C_1 и прямая ℓ, проходящая через точку A перпендикулярно AC, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда H — середина BB_1.

10.2. Множество $\mathcal{M}$ неотрицательных действительных чисел вместе с любыми двумя своими числами (не обязательно различными) содержит и их сумму.

Докажите, что $\mathcal{M}$ содержит некоторый бесконечный промежуток (луч), если известно, что $\mathcal{M}$ содержит конечный интервал.

10.3. Найдите все натуральные n, при которых существуют такие простые числа p и q, $p+2=q$, что числа 2^n+p и 2^n+q также являются простыми.

10.4. Найдите максимальное n, при котором существует таблица $(n+1)\times(n-1)$, клетки которой можно покрасить в три цвета так, чтобы для любых двух различных строк и для любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет.

11 класс

11.1. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geqslant \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

11.2. Прямая, параллельная стороне AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^0$), пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, так, что $\dfrac{CN}{BN} = \dfrac{AC}{BC} = 2$. Пусть O — точка пересечения отрезков CM и AN. На отрезке ON взята точка K так, что $MO + OK = KN$. Перпендикуляр к отрезку AN в точке K и биссектриса угла B треугольника ABC пересекаются в точке T. Найдите угол MTB.

11.3. Найдите все пары натуральных чисел a, b, $a > b$, при которых

$$(a-b)^{ab} = a^b \cdot b^a.$$

11.4. Таблицу $n \times n$, назовем *хорошей*, если ее клетки можно покрасить в три цвета так, чтобы для любых двух различных строк и для любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет.

а) Покажите, что существует хорошая таблица 9×9.

б) Докажите, что $n < 11$ для всякой хорошей таблицы $n \times n$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

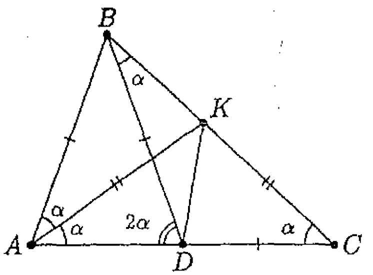
7.1 Если все числа p_1, p_2, ..., p_{2005} нечетные, то и сумма $S = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{2005}^2$ также нечетная и, значит, не может делиться на 6. Поэтому среди чисел p_1, p_2, ..., p_{2005} есть по крайней мере одно число, равное 2. Покажем, что среди них есть также хотя бы одно число, равное 3. Действительно, предположим, что это не так, т. е. все числа p_1, p_2, ..., p_{2005} не кратны 3. Поскольку каждое такое число p_i представимо в виде $p_i = 3k \pm 1$, то $p_i^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ имеет остаток 1 при делении на 3. Поэтому $S \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = 2005 \equiv 1 \pmod 3$, т. е. S имеет остаток 1 при делении на 3, что противоречит условию задачи. Итак, среди данных простых чисел есть по крайней мере одно число 2 и по крайней мере одно число 3. Поэтому их произведение делится на 6, что и требовалось доказать.

7.2 Ответ: 6.

Пронумеруем цвета цифрами 1 и 2 и рассмотрим n трехзначных чисел, образованных цифрами в столбцах таблицы. Условие раскраски равносильно тому, что никакие два из этих чисел не совпадают более, чем в двух разрядах. Понятно, что все числа должны быть различными. Так как в каждом разряде может быть одна из двух цифр, то количество таких чисел равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Кроме того, из каждой пары чисел (111, 112) и (222, 221) среди данных n чисел может встретиться не более, чем одно число. Видим, что $n \leqslant 6$. С другой стороны, пример на рисунке показывает, что n может равняться 6.

1	2	2	1	1	2
2	1	2	1	2	1
2	2	1	2	1	1

7.3 Пусть $\angle BCA = \alpha$. Так как по условию $BD = DC$, то $\angle DBC = \angle BCD = \alpha$. Поэтому $\angle BDA = 2\alpha$ (как внешний угол треугольника BDC). Так как по условию $AB = BD$, то $\angle BAC = 2\alpha$, откуда $\angle BAK = \angle KAC = \alpha$, и, следовательно, треугольник AKC равнобедренный, т.е. $AK = KC$. Тогда $\Delta ABK = \Delta DKC$ (по двум сторонам $AB = DC$, $AK = KC$ и углу между ними $\angle BAK = \angle KCD = \alpha$). Поэтому $\angle BKA = \angle CKD$.



7.4 Ответ: любое число участников, не меньшее 8.

Пусть в турнире участвовало n человек. Тогда каждый участник сыграл ровно $n-1$ партию. Так как Петя набрал больше всех очков, то это, в частности, означает, что число выигранных им партий больше числа проигранных им партий. Но Петя хотя бы одну партию проиграл (по условию только Юра не проиграл ни одной партии); значит, Петя выиграл не менее 2-х партий. А так как по условию Андрей одержал больше всех побед, то, значит, Андрей выиграл не менее 3-х партий. Но согласно условию Петя набрал очков больше, чем Андрей. Поэтому Андрей проиграл по крайней мере на 2 партии больше, чем Петя, т. е. не менее $1+2=3$ -х партий.

Партия между Андреем и Юрой могла закончиться либо вничью, либо победой Юры (Юра не проиграл ни одной партии). Если она закончилась вничью, то Андрей имеет хотя бы одну ничью и, как доказано, не менее 3-х выигрышей и 3-х проигрышей, т. е. он сыграл не менее $3+3+1=7$ партий. Поэтому число участников турнира не менее $7+1=8$.

Если же партия между Андреем и Юрой закончилась победой Юры, то Юра набрал не менее $1+\dfrac{n-2}{2}=\dfrac{n}{2}$ очков. Петя же, если бы он одержал только 2 победы, набрал бы не более $2+0+\dfrac{n-4}{2}=\dfrac{n}{2}$ очков, т. е. не больше, чем Юра. Значит, в этом случае Петя должен был одержать не менее 3-х побед. Следовательно, Андрей выиграл не менее 4-х партий и, как доказано выше, проиграл не более 3-х. Значит, Андрей сыграл не менее $4+3=7$ партий. Так что и в этом случае число участников турнира не менее 8.

Следующая таблица показывает, что число участников такого турнира может быть равно 8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки
1. Петя		1	0,5	0	0,5	0,5	1	0,5	4
2. Андрей	0		0,5	1	0	1	0	1	3,5
3. Юра	0,5	0,5		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,5
4	1	0	0,5		0,5	0,5	0,5	0,5	3,5
5	0,5	1	0,5	0,5		0	0,5	0,5	3,5
6	0,5	0	0,5	0,5	1		0,5	0,5	3,5
7	0	1	0,5	0,5	0,5	0,5		0,5	3,5
8	0,5	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5		3

Пример турнира с числом участников, большим 8, также легко построить. Пусть первые 8 участников между собой сыграли так, как показано в таблице, и выиграли у всех остальных. Остальные же участники все встречи между собой завершили вничью.

8 класс

8.1. Ответ: нет, не могло.

Нетрудно проверить, что куб натурального числа при делении на 9 может давать в остатке только 0, 1 и 8. Кроме того, сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 9, как и само число. В то же время, если мы изменим число так, как говорится в условии задачи, то его сумма цифр увеличится на 3, 4, 5 или 6. Видим, что какой бы из остатков (0 , 1 или 8) ни имела сумма цифр исходного числа, сумма цифр полученного числа не может иметь ни один из этих трех остатков и, значит, полученное число не может быть кубом натурального числа.

8.2. Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует, что $a^2 + \frac{1}{4} \geqslant a$ и $b^2 + \frac{1}{4} \geqslant b$. Поэтому

$$\left(a^2 + b^2 + 1/4\right)^2 \geqslant (a + b^2)(b + a^2) = a^3 + b^3 + a^2b^2 + ab.$$

Равенство достигается при $a = b = 1/2$.

8.3. *Первое решение.* Если AK_1 — биссектриса угла BAC треугольника ABC, то, как показано в решении задачи 7.3, $\angle BK_1A = \angle DK_1C$. Если точка K расположена на стороне BC между точками B и K_1 (см. рис. 1), то, по свойству внешнего угла треугольника, получим

$$\angle AKB = \angle KAK_1 + \angle KK_1A > \angle KK_1A =$$
$$= \angle DK_1C = \angle KDK_1 + \angle DKC > \angle DKC,$$

что противоречит условию.

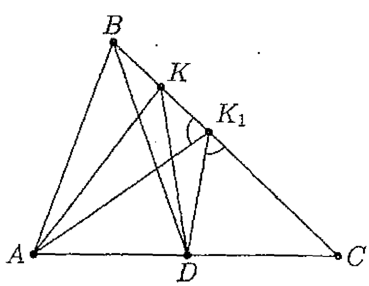


Рис. 1

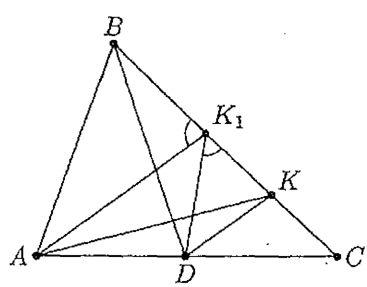


Рис. 2

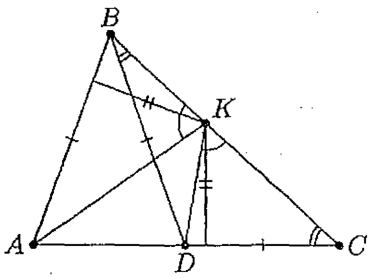
Аналогично, если K расположена на стороне BC между точками C и K_1 (см. рис. 2), то

$$\angle AKB = \angle BK_1A - \angle K_1AK < \angle BK_1A =$$

$$= \angle DK_1C = \angle DKC - \angle K_1DK < \angle DKC,$$

что также противоречит условию. Следовательно, точки K и K_1 совпадают, т.е. AK — биссектриса треугольника ABC.

Второе решение. Так как по условию $BD = DC$, то $\angle DBC = \angle BCD$. А так как $\angle BKA = \angle DKC$, то



$$\angle BKD = \angle BKA + \angle AKD =$$
$$= \angle CKD + \angle AKD = \angle CKA.$$

Поэтому $\triangle BKD \sim \triangle CKA$. Следовательно, $\frac{AK}{KD} = \frac{KC}{BK}$, откуда $AK \cdot BK = KC \cdot KD$. Тогда

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BK \cdot \sin \angle BKA = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot KD \cdot \sin \angle DKC = S_{DKC}.$$

Так как по условию у треугольников ABK и DKC стороны AB и DC равны, то и высоты, опущенные на эти стороны, также будут равны. Следовательно, точка K равноудалена от сторон угла BAC и, значит, AK — биссектриса.

8.4. Ответ: 6.

Допустим, что таблица $4 \times n$ покрашена нужным образом, и пусть $n \geqslant 7$. Тогда в первой строчке не менее четырех клеток покрашено в один цвет. Без ограничения общности можно считать, что первая, вторая, третья и четвертая клетки покрашены в цвет 1. Тогда во всех следующих строчках среди первых четырех клеток по крайней мере три покрашены в цвет 2. Без ограничения общности можно считать, что во второй строчке в цвет 2 покрашены первые три клетки. Тогда в третьей строке среди первых трех клеток по крайней мере две должны быть окрашены в цвет 1 и, значит, среди первых четырех клеток этой строчки нет трех клеток цвета 2. Противоречие. Таким образом, $n \leqslant 6$. С другой стороны, пример на рисунке показывает, что n может равняться 6.

1	1	2	1	2	2
1	2	1	2	1	2
2	1	1	2	2	1
2	2	2	1	1	1

9 класс

9.1. Ответ: $(t+1, 1, t(t+1))$ и $(t+1, t, t+1)$, где $t \in \mathbb{N}$.

Легко заметить, что число c должно делиться на a, т.е. $c = ap$. Тогда

$$abc+ab+c = a^3 \iff abp+b+p = a^2 \iff a^2-bpa-(b+p) = 0.$$

Рассмотрим последнее соотношение как квадратное уравнение относительно a. Тогда для того, чтобы оно имело натуральные решения, необходимо, чтобы его дискриминант был полным квадратом, т.е. $D = (bp)^2 + 4(b+p) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $b, p \in \mathbb{N}$, то $4(b+p) \leqslant 4(bp+bp) = 8bp < 8bp+16$. Поэтому $(bp)^2 < D < (bp+4)^2$. Это означает, что D может принимать лишь три значения: $(bp+1)^2$, $(bp+2)^2$, $(bp+3)^2$. Однако, число $D-(bp)^2 = 4(b+p)$ четное, поэтому $D \neq (bp+1)^2$ и $D \neq (bp+3)^2$. Если же $D = (bp+2)^2$, то

$$4(b+p) = 4bp+4 \iff bp-b-p+1 = 0 \iff (b-1)(p-1) = 0.$$

При $b = 1$ имеем

$$a^2 - pa - (1+p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{p \pm (p+2)}{2} = \left[\begin{array}{ll} -1 \notin \mathbb{N}, & \\ p+1, & p \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Легко проверить, что тройка $(a, b, c) = (t+1, 1, t(t+1))$ удовлетворяет исходному равенству при любом $t \in \mathbb{N}$.

При $p = 1$ имеем

$$a^2 - ba - (1+b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{b \pm (b+2)}{2} = \left[\begin{array}{ll} -1 \notin \mathbb{N}, & \\ b+1, & p \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Легко проверить, что тройка $(a, b, c) = (t+1, t, t+1)$ удовлетворяет исходному равенству при любом $t \in \mathbb{N}$.

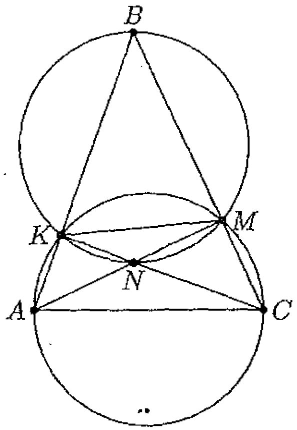
9.2. Ответ: $45°$.

Пусть R — радиус описанных окружностей. Так как четырехугольник $BKNM$ вписанный, то

$$180° = \angle BKN + \angle BMN = (180° - \angle AKC) + (180° - \angle AMC),$$

откуда $\angle AKC + \angle AMC = 180°$.

С другой стороны, так как четырехугольник $AKMC$ вписанный, то $\angle AKC = \angle AMC$, и, следовательно, оба эти угла прямые. Поэтому $\angle KCM = 90° - \angle ABC$. Теперь, применяя теорему синусов к треугольнику KBM, находим $KM = 2R\sin\angle ABC$, и применяя теорему синусов к треугольнику KMC, находим



$$KM = 2R\sin\angle KCM =$$

$$= 2R\sin(90° - \angle ABC) = 2R\cos\angle ABC.$$

Таким образом, $\sin\angle ABC = \cos\angle ABC$, откуда $\angle ABC = 45°$.

9.3. Ответ: 6.

Обозначим данное число через a. Сложив первые пять слагаемых, видим, что

$$a > \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} = 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = 6\frac{4}{15} > 6.$$

Покажем, что $a < 7$. Для этого рассмотрим сумму остальных слагаемых. Имеем

$$\frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \ldots + \frac{2^{99}}{99!} + \frac{2^{100}}{100!} =$$

$$= \frac{4}{45} + \frac{4\cdot 2}{45\cdot 7} + \frac{4\cdot 2\cdot 2}{45\cdot 7\cdot 8} + \ldots + \frac{4\cdot 2^{93}}{45\cdot 7\cdot 8\ldots\cdot 98\cdot 99} +$$

$$+ \frac{4\cdot 2^{94}}{45\cdot 7\cdot 8\ldots\cdot 99\cdot 100} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^{94}} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{93}} + \frac{1}{2^{94}}\right) < \frac{1}{8}\cdot 2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом $a < 6 + \frac{4}{15} + \frac{1}{4} < 7$. Поэтому целая часть числа a равна 6.

9.4. Ответ: 4.

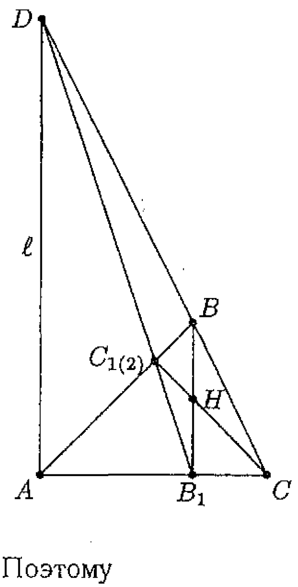
Пример для $n = 4$ указан на рисунке.

1	1	2	2
2	2	1	1
1	2	1	2
2	1	2	1

Допустим, что таблицу 5×5 можно покрасить нужным образом. Тогда в первой строке существуют три клетки одного цвета. Не ограничивая общности, пусть первая, вторая и третья клетки покрашены в первый цвет. Отсюда следует, что во второй, третьей, четвертой и пятой строке среди первых трех клеток две покрашены во второй цвет. Но существует только три различных способа выбрать две клетки второго цвета из трех. Противоречие.

10 класс

10.1. Так как $\angle C \neq 90^\circ$, то прямые BC и ℓ пересекаются. Точку их пересечения обозначим через D, а точку пересечения прямых DB_1 и AB — через C_2. Условие, что прямые BC, ℓ и B_1C_1 пересекаются в одной точке равносильно совпадению точек C_1 и C_2, или, что то же, равенству $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{BC_2}{C_2A}$.



Таким образом, нужно доказать, что равенство $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{BC_2}{C_2A}$ равносильно тому, что точка H — середина отрезка BB_1.

Обозначим $a = B_1H$ и $b = HB$. Так как $\angle A = 45^\circ$, то прямоугольные треугольники $\triangle AB_1B$, $\triangle BC_1H$ и $\triangle B_1HC$ являются равнобедренными. Поэтому

$$AB_1 = BB_1 = a + b,\ AB = \sqrt{2}\,(a+b), \quad BC_1 = \frac{b}{\sqrt{2}},\ B_1C = a.$$

II способ. Применить св-во, что прямая, проход. через точку

Значит, левая часть рассматриваемой пропорции

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_1}{AB - BC_1} = \frac{b/\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,(a+b) - b/\sqrt{2}} = \frac{b}{2a+b}.$$

Выразим теперь через a и b правую часть $\dfrac{BC_2}{C_2A}$ рассматриваемой пропорции. Так как $DA \parallel BB_1$ (поскольку обе эти прямые перпендикулярны AC), то $\triangle BB_1C_2 \sim \triangle ADC_2$. Из подобия получаем: $\dfrac{BC_2}{C_2A} = \dfrac{BB_1}{DA}$. Но, по той же причине, $\triangle BB_1C \sim \triangle DAC$, поэтому, продолжив предыдущее равенство, получим:

$$\frac{BC_2}{C_2A} = \frac{BB_1}{DA} = \frac{B_1C}{AB_1 + B_1C} = \frac{a}{2a+b}.$$

Стало быть, $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{BC_2}{C_2A} \iff \dfrac{b}{2a+b} = \dfrac{a}{2a+b} \iff a = b$, что и требовалось доказать.

10.2. Пусть интервал $(a;\,b) \subset \mathcal{M}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in (a;b)$ верно, что $nx \in \mathcal{M}$. В самом деле, так как $x + x = 2x \in \mathcal{M}$ и $x \in \mathcal{M}$, то и $2x + x = 3x \in \mathcal{M}$, поэтому $3x + x = 4x \in \mathcal{M}$, и т. д., прибавляя x, получим, что $nx \in \mathcal{M}$. Значит, если интервал $(a;\,b) \subset \mathcal{M}$, то и интервал $(na;\,nb) \subset \mathcal{M}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заметим теперь, что $(n+1)a < nb$ при всех $n > \dfrac{a}{b-a}$. Значит, при этих n в последовательности интервалов $(na; nb)$ любые два соседних интервала пересекаются. Поэтому, обозначив через n_0 наименьшее натуральное число, не меньшее $\dfrac{a}{b-a}$, получим, что $\mathcal{M} \supset \bigcup\limits_{n \geqslant n_0} (na; nb) = (n_0a; +\infty)$.

10.3. Ответ: 1 и 3.

Из равенства $p + 2 = q$ вытекает, что числа p и q при делении на 3 дают разные остатки. Следовательно, если ни одно из них не равно

3, то их остатки — это 1 и 2, и поэтому какое-то из чисел $2^n + p$ или $2^n + q$ делится на 3 и, значит, не является простым. Стало быть, $p = 3$ и $q = 5$.

Покажем, что $n \leqslant 3$, т. е. что числа $2^n + 3$ и $2^n + 5$ не могут быть одновременно простыми, если $n \geqslant 4$. Предположим противное. Тогда n нечётно, иначе $2^n + 5$ делится на 3. Могут представиться только две возможности: $n = 4k + 1$ или $n = 4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$.

Пусть $n = 4k + 1$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда

$$2^n + 3 = 2 \cdot (2^4)^k + 3 \equiv 2 \cdot 1 + 3 \equiv 0 \pmod 5$$

и, значит, число $2^n + 3$ (при $n \geqslant 4$) не является простым.

Пусть $n = 4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$. Покажем, что в этом случае n должно быть кратно 3. Действительно, если это не так: $n = 3l + 1$ или $n = 3l + 2$, $l \in \mathbf{N}$, — то соответственно имеем:

$$2^n + 5 = 2 \cdot (2^3)^l + 5 \equiv 2 \cdot 1 + 5 \equiv 0 \pmod 7$$

или

$$2^n + 3 = 2^2 \cdot (2^3)^l + 3 \equiv 4 \cdot 1 + 3 \equiv 0 \pmod 7,$$

т. е. числа числа $2^n + 3$ и $2^n + 5$ не являются одновременно простыми.

Поэтому $n = 12m + 3$, $m \in \mathbf{N}$. Так как по малой теореме Ферма ~~$2^6 \equiv 1 \pmod 7$, то и~~ $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Значит,

$$2^n + 5 = 2^3 \cdot (2^{12})^m + 5 \equiv 8 \cdot 1 + 5 \equiv 0 \pmod{13},$$

т. е. число $2^n + 5$ не является простым.

Итак, при $n \geqslant 4$ числа 2^n+3 и 2^n+5 не могут быть одновременно простыми. Если же $n \leqslant 3$, то легко проверить, что $2^n + 3$ и $2^n + 5$ простые только при $n = 1$ и $n = 3$.

10.4. Ответ: 10.

Докажем, что клетки таблицы 10×12 нельзя покрасить требуемым образом. Допустим противное, т. е. клетки этой таблицы покрашены в 3 цвета так, что, какие бы две различные строки и два различных столбца её ни выбрать, четыре клетки, стоящие на их пересечении, не одноцветны. Поставим в соответствие этой таблице мультиграф (т. е. граф, любые две вершины которого могут соединяться более чем одним ребром) по следующему правилу: столбцы таблицы — его вершины (точки, их 10 штук); любые две вершины соединяем стольким числом рёбер, сколько существует строк, пересекающих соответствующие этим двум вершинам столбцы по двум клеткам, покрашенным в один цвет. Оценим сверху и снизу количество рёбер R в так построенном мультиграфе.

С одной стороны, никакие две вершины этого мультиграфа не могут соединяться более чем тремя рёбрами. В самом деле, если бы нашлись двевершины, соединённые не менее чем четырьмя рёбрами, то это означало бы, что соответствующие этим вершинам столбцы пересекаются какими-то четырьмя строками по одноцветным клеткам. Но различных цветов только три. Поэтому среди этих четырёх строк найдутся две, пересекающие рассматриваемые столбцы по клеткам одного и того же цвета, чего быть не может. Следовательно, $R \leqslant 3 \cdot C_{10}^2 = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 135$.

1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	2	2	3	3	3	1	1	1
3	3	3	1	1	1	2	2	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	2	3	1	3	1	2
2	3	1	3	1	2	1	2	3
3	1	2	1	2	3	2	3	1
1	2	3	3	1	2	2	3	1
3	1	2	2	3	1	1	2	3

С другой стороны, если в строке k клеток одного, l клеток другого и m клеток третьего цветов ($k + l + m = 10$), то она „порождает" ровно $C_k^2 + C_l^2 + C_m^2$ рёбер в мультиграфе (любые две вершины, соответствующие столбцам, пересекающим эту строку по одноцветным клеткам, должны быть соединены ребром). Ясно, что $C_k^2 + C_l^2 + C_m^2 \geqslant \frac{4 \cdot 3}{2} + \ + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 12$. Поэтому количество R рёбер в мультиграфе не меньше, чем $12 \cdot 12 = 144$. Итак, $144 \leqslant R \leqslant 135$ —

противоречие.

Пример требуемой раскраски таблицы 11×9 приведён на рисунке.

11 класс

11.1. Воспользуемся неравенством для среднего арифметического и среднего геометрического

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)=\left(a^2+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{2}\right)\left(b^2+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left[\text{так как}\quad a^2+\frac{1}{4}\geqslant a,\ b^2+\frac{1}{4}\geqslant b\right]\geqslant\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$=a^2+b^2+2ab+a+b+\frac{1}{4}\geqslant 4ab+a+b+\frac{1}{4}=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

11.2. Ответ: 90°.

Проведём через точку O прямую OP, $OP \parallel AC$. Тогда

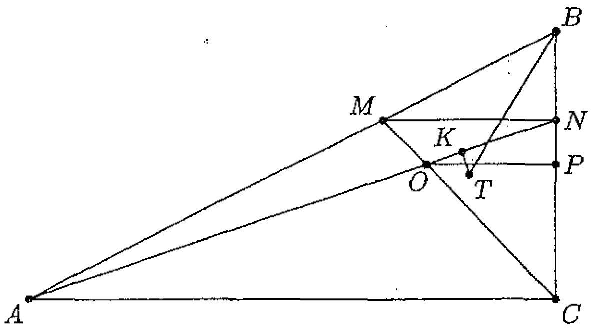


Рис. 1

$\dfrac{NP}{PC}=\dfrac{MO}{OC}=\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{BN}{BN+NC}=\dfrac{BN}{BN+2BN}=\dfrac{1}{3}$. Поэтому $\dfrac{2}{3}BC=CP+PN=\dfrac{4}{3}CP$, откуда $CP=\dfrac{1}{2}BC$, т.е.

$CP = PB$. Далее: $\dfrac{CN}{MN} = \dfrac{\frac{2}{3}BC}{MN} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC}{MN} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{BC}{BN} = 1$. Тогда, т.к. $\angle MN = 90^\circ$ ($MN \parallel AB$), то $\triangle MNC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник, т.е. $\angle OMN = \angle OCB = 45^\circ$.

С другой стороны, ранее получено, что $CP = PB$, т.е., так как

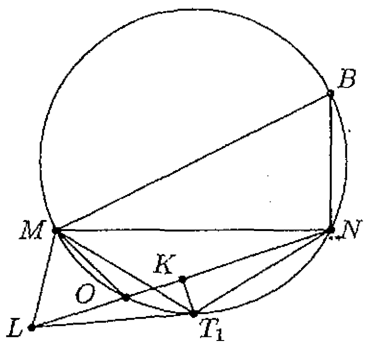


Рис. 2

$OP \perp BC$, то $\triangle OBC$ — равнобедренный и $\angle OBN = 45^\circ = \angle OMN$. Значит, четырехугольник $BMON$ — вписанный. Пусть KT пересекает окружность, описанную около четырехугольника $BMON$, в точке T_1. Отложим от точки O на прямой ON отрезок $OL = OM$. Тогда по условию $LK = KN$, и треугольник LT_1N — равнобедренный, $\angle KLT_1 = \angle ONT_1 = \angle OMT_1$, как вписанные. Значит, так как $\angle OML = \angle MLO$ (треугольник MOL — равнобедренный по построению), то и $\angle T_1ML = \angle MLT_1$, т.е. треугольник LT_1M — равнобедренный, $MT_1 = LT_1 = T_1N$, т.е. T_1 — середина дуги MN, т.е. BT_1 — биссектриса угла B. Значит, T_1 совпадает с T.

Таким образом, $\angle MTB = \angle MT_1B = \angle MNB = 90^\circ$.

11.3. Ответ: $(4; 2)$.

Пусть $a = dp$, $b = dq$, где $d = (a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p > q$. Тогда имеем

$$(d(p-q))^{d^2pq} = (dp)^{dq}(dq)^{dp} \iff (d(p-q))^{dpq} = (dp)^q(dq)^p \iff$$

$$\iff\quad d^{dpq}(p-q)^{dpq} = d^{p+q}p^q q^p\,.$$

Если $p+q \geqslant dpq$, то из равенства $(p-q)^{dpq} = d^{p+q-dpq}p^q q^p$ видно, что $(p-q)^{dpq} \vdots p$ и $(p-q)^{dpq} \vdots q$. Но $(p-q,\, p) = (p-q,\, q) = (p,\, q) = 1$ и тогда $p = 1$, $q = 1$, что не дает решений.

Следовательно, $p + q < dpq$. Тогда из равенства $d^{dpq-p-q}(p-q)^{dpq} = p^q q^p$ видим, что $p^q q^p \vdots (p-q)$. А так как $(p-q,\, p) = (p-q,\, q) = (p,\, q) = 1$, то $p - q = 1$, т. е. $p = q + 1$. В результате,

$$d^{dpq-p-q} = (q+1)^q q^{q+1}\,. \qquad (1)$$

Пусть $(d, q) = s$, $(d,\, q+1) = t$, тогда $(s,\, t) = 1$. Так как согласно (1) имеем $(q+1)^q q^{q+1} \vdots d$, то нетрудно получить, что $st = d$. Тогда $s^{dpq-p-q} \cdot t^{dpq-p-q} = (q+1)^q q^{q+1}$, откуда ввиду того, что $(s,\, q+1) = 1$ и $(t,\, q) = 1$,

$$t^{dpq-p-q} = (q+1)^q\,. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что t является q-й степенью натурального числа. Действительно, если x — простой делитель числа t, $t = x^\alpha r$, $(x,\, r) = 1$, то, согласно (2)

$$x^{\frac{\alpha(dpq-p-q)}{q}} r^{\frac{dpq-p-q}{q}} = q+1,$$

откуда вследствие того, что $(dpq - p - q,\, q) = 1$, видно, что $\alpha \vdots q$.

Итак, $t = t_1^q$. В результате,

$$t_1^{dpq-p-q} = q+1 \quad\iff\quad t_1^{dq(q+1)-(2q+1)} = q+1.$$

Так как $q+1 > 1$, то и $t_1 > 1$. Если $q \geqslant 3$, то $dq(q+1) - (2q+1) \geqslant 3(q+1) - (2q+1) = q+2$ и тогда $t_1^{dpq-p-q} \geqslant 2^{q+2} > q+1$ — противоречие. Если $q = 2$, то получим $t_1^{6d-5} = 3$, откуда $t_1 = 3$, $d = 1$, и тогда $a = d(q+1) = 3$, $b = dq = 2$. Но пара $(3,\, 2)$ решением не является. Остается $q = 1$. Тогда из равенства $t_1^{2d-3} = 2$ находим $t_1 = 2$, $d = 2$, откуда $a = 4$, $b = 2$.

11.4. а) Пример таблицы для $n = 9$ приведен на рисунке (три цвета обозначены цифрами 1,2,3).

1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	2	2	3	3	3	1	1	1
3	3	3	1	1	1	2	2	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	2	3	1	3	1	2
2	3	1	3	1	2	1	2	3
3	1	2	1	2	3	2	3	1

б) Допустим, что таблицу 11×11 можно покрасить нужным образом. Рассмотрим следующий мультиграф: столбцы таблицы - это вершины, две вершины (столбцы) соединены ребром (покрашенным в i-ый цвет), если существует строка, пересекающая эти столбцы по двум клеткам, покрашенным в i-й цвет. Тогда из условия следует, что никакие две вершины не могут быть соединены двумя ребрами одного цвета. Отсюда следует, что количество ребер каждого цвета не более $11 \times 10/2 = 55$, а всех ребер не более 165. Но, с другой стороны, каждая строка "порождает"не менее 15 ребер ($4 \cdot 3/2 + 4 \cdot 3/2 + 3 \cdot 2/2$ - в лучшем случае, когда в строке 4 клетки одного цвета, 4 - другого, 3 - третьего, иначе ребер будет больше). Отсюда следует, что количество ребер не меньше $11 \cdot 15 = 165$. Отсюда видно, что в каждой строке 4 клетки одного цвета, 4 - другого, 3 - третьего. Это значит, что любая строка порождает в нашем графе 6 ребер одного цвета, 6 — другого и 3 — третьего. Стало быть, количество ребер каждого цвета кратно 3, а значит, не может быть равно 55. Противоречие.