2

Министерство образования Республики Беларусь

« LIV »

Белорусская республиканская математическая олимпиада школьников

Условия и решения задач

Брест 2004

УДК 372.851.046.14

Приведены условия и решения задач заключительного тура 54 Республиканской математической олимпиады школьников.

Авторы задач

1. **Акулич И. Ф.** (8.8, 9.2, 9.7, 11.8)
2. **Базылев Д. Ф.** (10.1, 11.4)
3. **Барабанов Е.А.** (7.4, 7.6, 7.7, 8.4, 11.3, 11.7)
4. **Воронович И.И.** (7.2, 7.5, 8.2, 8.5, 9.1, 9.3-9.5, 10.4, 10.5, 10.6, 10.8, 11.2, 11.6)
5. **Дудко Д.** (7.2, 8.2, 8.7, 9.1)
6. **Жихович М.** (7.1, 10.5, 8.6)
7. **Змейков Д.** (7.8, 10.3, 10.7)
8. **Каскевич В.И.** (7.6, 8.1, 8.3)
9. **Лебедь В.** (11.1)
10. **Мазаник С.А.** (7.1, 7.2, 7.5, 8.2, 9.1, 9.5, 10.2, 10.5, 11.6)
11. **Марковский С.** (7.3, 8.6)
12. **Миротин А.Р.** (9.6, 9.8, 11.5)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

Спонсор издания:
Управление образования Брестского облисполкома

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

1. Найдите наименьшее делящееся на 2004 число, в десятичной записи которого присутствует одно и то же количество нулей, двоек и четвёрок и нет никаких других цифр. Существует ли бесконечно много таких чисел? (Число не может начинаться с нуля.)

2. В каждой клетке квадратной таблицы $n \times n$ ($n \geqslant 3$) записано некоторое целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждом квадрате 3×3 кратна 3, а сумма всех чисел в таблице не кратна 3.

Найдите все n, при которых это возможно.

3. Дана доска 5×5. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить так, чтобы ни одна закрашенная клетка не граничила по стороне более, чем с одной закрашенной клеткой?

4. На классной доске отмечена точка A. Вася и Петя играют в следующую игру, делая ходы по очереди. На каждом ходу Вася проводит через точку A прямую, после чего Петя стирает одну из полупрямых (с началом в точке A) этой прямой. Вася выиграет, если после хода Пети угол между какими-то из оставшихся на доске полупрямых будет не менее $177°$.

а) Докажите, что Вася сможет выиграть (т. е. приведите правило, делая ходы согласно которому, Вася, независимо от игры Пети, добьётся победы).

б) Найдите наименьшее число ходов, которые понадобятся Васе, чтобы наверняка выиграть, как бы при этом ни играл Петя.

5. В Республиканской олимпиаде по математике участвовало 25 семиклассников. Им было предложено для решения 8 задач. Задание олимпиады оказалось довольно сложным, так что любая задача была решена менее, чем половиной участников. При этом каждую задачу каждый участник олимпиады либо решил полностью, либо не решил совсем. Назовём участника олимпиады *сильным*, если он решил больше половины задач.

Какое наибольшее число сильных участников могло оказаться по результатам олимпиады?

6. Незнайка придумал три натуральных числа и объявил, что если разделить любое из этих чисел на любое меньшее из них, то всякий раз остаток от деления будет совпадать с неполным частным.

Докажите, что Незнайка ошибается.

7. У Васи и Пети имелось по выпуклому четырёхугольнику, у Васи — красного цвета, а у Пети — синего. Четырёхугольники Васи и Пети одинаковые (т. е. совмещаются некоторым наложением). Каждый из мальчиков разрезал свой четырёхугольник по диагонали — получилось 2 красных и 2 синих треугольника. Оказалось, что один красный и один синий треугольники равны.

Докажите, что и два других треугольника также равны.

8. На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат $n \times n$ клеток, стороны которого совпадают со сторонами клеток.

При каких n можно нарисовать в этом квадрате некоторое число отрезков так, чтобы были выполнены следующие условия: 1) центр каждой клетки является концом ровно одного отрезка; 2) середина каждого отрезка совпадает с центром какой-нибудь клетки?

8 класс

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки N и K, так, что $AN = NB$ и $AK = 2 \cdot KC$. При этом оказалось, что $KN \perp AB$.

Найдите NC, если известно, что $CB = 8$.

2. В каждой клетке квадратной таблицы $n \times n$ ($n \geqslant 3$) записано некоторое целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждом квадрате 3×3 чётная.

При каких n из этого обязательно следует, что сумма всех чисел в таблице также является чётной?

3. Докажите, что если ненулевые числа a и b удовлетворяют условию $a^2b + b^2a = a^2 + b^2$, то справедливо неравенство

$$(a+2)^2 + (b+2)^2 \geqslant 16.$$

4. На классной доске отмечена точка A. Вася и Петя играют в следующую игру, делая ходы по очереди. На каждом ходу Вася проводит через точку A прямую, после чего Петя стирает одну из полупрямых (с началом в точке A) этой прямой. Вася выиграет, если после хода Пети угол между какими-то из оставшихся на доске полупрямых будет в точности равен $178°$.

а) Докажите, что Вася сможет выиграть (приведите правило, делая ходы согласно которому, Вася, независимо от игры Пети, добьётся победы).

б) Найдите наименьшее число ходов, которые понадобятся Васе, чтобы наверняка выиграть, независимо от игры Пети.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, причём $AC = KL = 2$, где K и L — середины сторон AB и CD соответственно.

Найдите длину диагонали BD и угол между прямыми BD и KL.

6. На доске записан квадратный трёхчлен x^2+ax+b с целыми коэффициентами a и b. Серёжа и Максим играют в такую игру. За один ход Серёжа прибавляет к одному из коэффициентов a или b либо 1, либо -1, а Максим за свой ход прибавляет к одному из этих коэффициентов либо 2, либо -2. Серёжа и Максим ходят по очереди. Максим выигрывает, если через некоторое время на доске окажется многочлен с целыми корнями.

Докажите, что Максим всегда сможет выиграть независимо от того, кто ходит первым.

7. В Республиканской олимпиаде по математике участвовало 28 восьмиклассников. Им было предложено 8 задач. Задание олимпиады оказалось довольно сложным, так что любая задача была решена не более, чем половиной участников. По результатам олимпиады были награждены все участники, полностью решившие более половины всех задач. Задачу назовем *доступной*, если её решило не менее одной трети не награждённых участников.

Какое максимальное число участников могло быть награждено, если ровно семь из предложенных задач оказались доступными?

8. а) В каждую клетку бесконечной в обе стороны клетчатой строки записано некоторое натуральное число, каждое — ровно один раз.

Может ли оказаться, что числа в любых двух соседних клетках отличаются не более, чем на 2?

б) На бесконечном во все стороны листе клетчатой бумаги в каждой клетке записано некоторое натуральное число, каждое — ровно один раз.

Докажите, что найдутся две клетки с общей стороной, числа в которых отличаются больше, чем на 2004.

9 класс

1. В каждой клетке квадратной таблицы $n \times n$ ($n \geqslant 3$) записано некоторое целое число. Оказалось, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 чётная и сумма чисел в любом квадрате 3×3 также чётная.

При каких n из этого обязательно следует, что сумма всех чисел в таблице является чётной?

2. Последовательность действительных чисел (a_n), $n \geqslant 1$, такова, что

$$a_{n+1} = a_n(a_n + 2),$$

для любого натурального n.

Найдите множество всех значений, которые может принимать число a_{2004}.

3. Найдите все пары целых чисел (x, y), которые удовлетворяют равенству

$$y^2(x^2 + y^2 - 2xy - x - y) = (x + y)^2(x - y).$$

4. Пусть K, L, M и N — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Отрезки NL и KM пересекаются в точке T. Пусть x — площадь четырёхугольника $DNTM$, а S — площадь четырёхугольника $ABCD$.

Докажите, что $\frac{8}{3}x < S < 8x$.

5. На Республиканской олимпиаде по математике девятиклассникам было предложено 8 задач. Участника назовём *сильным*, если он полностью решил более половины всех задач. Задачу назовём *трудной*, если её полностью решило меньше половины всех сильных участников.

а) Какое наибольшее количество трудных задач могло оказаться в олимпиадном задании?

б) При этом количестве трудных задач какое наименьшее чётное и какое наименьшее нечётное число сильных участников могло оказаться по результатам олимпиады?

6. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A параллельно их линии центров, пресекает S_1 второй раз в точке C, а S_2 — в точке D. Окружность S_3 с диаметром CD пересекает S_1 второй раз в точке P, а S_2 — в точке Q.

Докажите, что прямые CP, DQ и AB пересекаются в одной точке.

7. Даны два подобных треугольника, причём высоты одного из них равны сторонам другого.

Какое наибольшее значение может принимать коэффициент подобия (т.е. отношение сторон второго треугольника к сторонам первого)?

8. Упорядоченный набор a, состоящий из k цифр, назовём *устойчивым*, если произведение любых двух натуральных чисел, оканчивающихся на a, также оканчивается на a. (Например, наборы 0 или 25 — устойчивые.)

Докажите, что для любого натурального k существует ровно четыре устойчивых набора, состоящих из k цифр.

10 класс

1. Диагонали AD, BE и CF [redacted] шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O Внутри ABCDEF

Какую наименьшую площадь может иметь этот шестиугольник, если площади треугольников AOB, COD, EOF равны 1, 3, 9 соответственно?

2. В каждую клетку квадратной доски $n \times n$ ($n \geqslant 5$) вписано некоторое целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждом квадрате 3×3 и сумма чисел в каждом квадрате 5×5 чётна.

Найдите все натуральные n, при которых из этого условия обязательно следует, что сумма чисел во всей таблице также будет чётной.

3. Пусть a_0, a_1, …, a_n — целые числа, не меньшие -1, не все из которых равны нулю. Известно, что

$$a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^n a_n = 0.$$

Докажите неравенство $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$.

4. а) Докажите, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют уравнению

$$c\,(ac + 1)^2 = (5c + 2b)(2c + b)$$

и c нечётно, то c — квадрат натурального числа.

б) Существует ли чётное натуральное число c, удовлетворяющее для некоторых a и b данному уравнению?

в) * Докажите, что данное уравнение имеет бесконечно много решений в тройках натуральных чисел a, b и c.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Докажите, что для его диагоналей AC и BD выполнено неравенство $8BD^2 \leqslant 9AC^2$, если для его сторон имеет место равенство $AB \cdot BC = 2 \cdot AD \cdot DC$.

6. а) Известно, что в плоскости выпуклого четырёхугольника $ABCD$ имеется точка X, такая, что периметры треугольников ABX, BCX, CDX и DAX равны.

Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Верно ли, что если в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то на плоскости существует точка

X такая, что периметры треугольников ABX, BCX, CDX и DAX равны между собой?

7. Учитель выписал на доске $n > 2$ натуральных чисел, ни одно из которых не является делителем другого. Каждый ученик по очереди стёр с доски число, делящее сумму всех ещё не стёртых чисел. В итоге на доске остались только два числа.

Для любого ли $n > 2$ такое могло быть?

8. На олимпиаде, в которой участвовало 30 школьников, было предложено 8 задач. Чтобы учесть сложность задач, жюри после проверки работ назначило баллы по задачам по следующему правилу: число баллов за задачу равно количеству участников, не решивших её. (Если, например, задачу решили все, то за неё даётся 0 баллов.) Каждый участник за задачу получил либо полный балл, либо 0 баллов.

а) Мог ли участник, набравший больше всех баллов, решить меньше всех задач?

б)* Мог ли участник, набравший меньше всех баллов, решить больше всех задач?

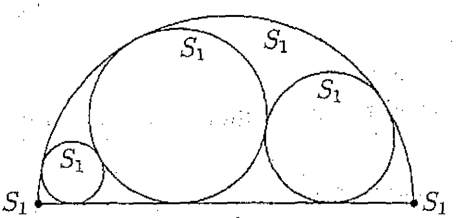
11 класс

1. В некотором классе у каждого ученика есть два сотовых телефона, один из которых подключён к сети МТС, а второй — к сети Velcom. Некоторые ученики этого класса дружат между собой и по сотовым телефонам звонят только друзьям. При этом новость, известная любому из учеников, может быть сообщена по сотовым телефонам любому другому ученику так, что её будут сообщать друг другу только друзья. Известно, что по крайней мере у одного из учеников класса в классе нечётное число друзей.

Прошёл слух, что одна из сетей (неизвестно, какая) увеличит свой тариф. Поэтому, чтобы уменьшить возможные издержки, ученики решили договориться между собой звонить по сотовым телефонам так, чтобы любые два друга разговаривали между собой только либо по телефонам МТС, либо по телефонам Velcom, и так, чтобы для каждого ученика количество друзей, с которыми он будет разговаривать по линии МТС, отличалось не более чем на 1 от количества друзей, с которыми он разговаривает по линии Velcom.

Докажите, что ученики так договориться могут.

2. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность C. Каждая из окружностей S, S_1 и S_2 касается полуокружности C и отрезка AB; кроме того, S касается S_1 и S_2 (см. рис.). Пусть r, r_1 и r_2 — радиусы окружностей S, S_1 и S_2 соответственно.



Докажите, что $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}$.

3. Клетки квадрата $n \times n$ ($n \geqslant 3$) покрашены в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. За один ход разрешается, выбрав любой квадратик 2×2 клетки, поменять цвета всех его клеток на противоположные.

Найдите все n, при которых за конечное число указанных ходов можно перекрасить все клетки квадрата в один цвет.

4. Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ — некоторое натуральное число, цифры $a_n, \ldots, a_0$ которого все ненулевые и не все равны между собой (n — натуральное число). Числа $A_1 = \overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_n}$, $A_2 = \overline{a_{n-2} \ldots a_1 a_0 a_n a_{n-1}}$, $\ldots$, $A_k = \overline{a_{n-k} a_{n-k-1} \ldots a_0 a_n \ldots a_{n-k+1}}$, $A_n = \overline{a_0 a_n \ldots a_1}$ получены из числа A циклической перестановкой его цифр.

Найдите все такие числа A, если известно, что все числа A_k, $k = = 1, ..., n$, делятся на число A.

5. Про множества A и B известно, что при каждом $\alpha > 0$ справедливы включения

$$A \subset B + \alpha\mathbb{Z} \text{ и } B \subset A + \alpha\mathbb{Z}$$

(выражение $X + \alpha\mathbb{Z}$ обозначает множество, состоящее из всех чисел вида $x + \alpha n$, где $x \in X$ и $n \in \mathbb{Z}$).

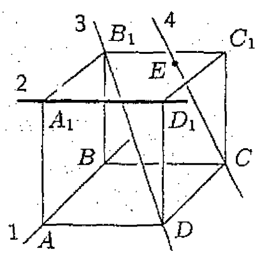
а) Следует ли отсюда, что $A = B$?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что множество B ограничено.

6. На олимпиаде, в которой участвовало 30 школьников, было предложено 8 задач. Чтобы учесть сложность задач, жюри после проверки работ назначило баллы по задачам по следующему правилу: число баллов за задачу равно количеству участников, не решивших её. (Если, например, задачу решили все, то за неё даётся 0 баллов.) Каждый участник за задачу получил либо полный балл, либо 0 баллов.

Какое наибольшее число баллов по результатам олимпиады мог набрать её участник Незнайка, если известно, что он набрал меньше всех баллов?

7. Через точки куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены четыре прямые 1, 2, 3 и 4, как показано на рисунке (прямые 1, 2 и 3 — это прямые AB, A_1D_1 и B_1D соответственно, а прямая 4 — прямая EC, где E — некоторая точка грани $A_1B_1C_1D_1$).



Найдите на грани $A_1B_1C_1D_1$ все точки E, такие, что существует прямая, пересекающая все четыре прямые 1, 2, 3 и 4?

8. Садовый участок окружён сплошным забором из N досок. Том Сойер красит забор по собственной системе, именно: продвигаясь всё время по ходу часовой стрелки, он сначала красит какую-то доску, затем пропускает одну доску и красит следующую, затем пропускает две доски и красит следующую, затем пропускает три доски и красит следующую, и так далее, каждый раз пропуская на одну доску больше (при этом некоторые доски могут быть покрашены несколько раз). Том считает, что рано или поздно все доски забора будут им покрашены, а тётя Полли уверена, что хотя бы одна доска останется не покрашенной, сколько бы Том ни работал.

Докажите, что если N — степень двойки, то прав Том, а если N не является степенью двойки, то права тётя Полли.

202404
202044
200244
200424
200442

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

1. Ответ: ~~220440~~. 202404

Так как цифры 4, 2, 0 встречаются в искомом числе равное количество раз, то такое число должно быть $3n$ —значным. При этом очевидно, что $n \geqslant 2$. Нетрудно проверить, что число 220440 делится на 2004. Остаётся заметить, что лишь число ~~220044~~, меньшее чем 220440, может удовлетворять условию, однако оно не кратно 2004. 202044, 200244, 200424, 200442

Теперь нетрудно построить целую последовательность чисел, удовлетворяющих условию 220440, 220440220440, $\ldots$, 220440220440...220440.

2. Ответ: все $n \geqslant 3$, не кратные 3.

Действительно, если n кратно 3, то $n = 3k$ для некоторого натурального k, и всю таблице можно разбить на k^2 квадратов 3×3. Так как в каждом квадрате 3×3 сумма чисел делится на 3, то сумма всех чисел в таблице, равная сумме k^2 слагаемых, каждое из которых делится на 3, также делится на 3.

1	−1	0	1	−1	0	1	⋯
−1	0	1	−1	0	1	−1	⋯
0	1	−1	0	1	−1	0	⋯
1	−1	0	1	−1	0	1	⋯
−1	0	1	−1	0	1	−1	⋯
0	1	−1	0	1	−1	0	⋯
1	−1	0	1	−1	0	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Рассмотрим следующую расстановку чисел в таблице. Видно, что сумма чисел в любом прямоугольнике 1×3 и 3×1 равна 0. В то же время сумма всех чисел в таблице равна 1 при $n = 3k + 1$ и равна -1 при $n = 3k + 2$. (Рассматриваются таблицы, в левом верхнем углу которых записано число 1.) Следовательно, при n, не кратном 3, сумма всех чисел в таблице не обязана быть кратна 3.

3. Ответ: 14.

На на рис. 1 приведён пример, удовлетворяющий условию задачи, с 14 закрашенными клетками.

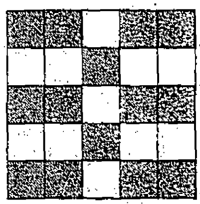


Рис. 1

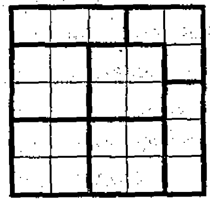


Рис. 2

Покажем, что более 14 клеток закрасить нельзя. Заметим, что в квадрате 2×2 может быть не более двух закрашенных клеток. Разобьем квадрат как показано на рис.2. Тогда в каждой из фигур разбиения содержится не более двух закрашенных клеток. Итого не более 14.

4. Ответ: б) 7 ходов.

а) Приведём одну из возможных стратегий Васи. На каждом своём ходу Вася должен проводить прямую так, чтобы она составляла угол в $3°$ с полупрямой, не стёртой Петей на предыдущем ходу, и была расположена так, что если повернуть эту не стёртую Петей полупрямую вокруг точки A на $3°$ по ходу часовой стрелки, она совпадёт с одной из полупрямых проведённой Васей прямой.

Докажем, что такая стратегия обеспечивает Васе выигрыш. В самом деле, обозначим через a_n полупрямую, не стёртую Петей на n-м ходу. Рассмотрим k-й ход Васи. Пусть b — прямая, проведённая им на этом ходу, а b' и b'' — её полупрямые (см. рис. 1). Так как $\angle(a_{k-1}, b'') = 177°$, то Петя должен стереть на своём k-м ходу полупрямую b''. Следовательно, после каждого хода Пети угол между полупрямой a_1 и не стёртой Петей полупрямой увеличивается на $3°$. Поэтому после 60-ого хода этот угол составит $3° \cdot 59 = 177°$.

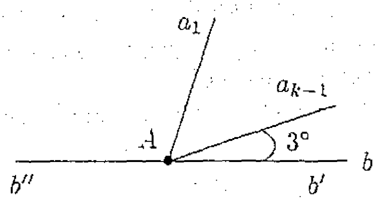


Рис. 1

б) Как видим при стратегии, описанной в п. а), Васе, чтобы выиграть, понадобится ровно 60 ходов (если Петя не будет делать очевидно неверных ходов). Может ли Вася обеспечить себе выигрыш за меньшее число ходов?

Покажем вначале, что за 6 ходов Вася, вообще говоря, не выиграет, т. е. покажем, что у Пети есть такая стратегия, которая позволит ему продержаться 6 ходов не побеждённым. Через φ_k обозначим наибольший из углов между оставшимися на доске полупрямыми после k-ого хода Пети. Докажем, что Петя может обеспечить, чтобы $\varphi_{k+1} \leqslant 90^\circ + \frac{\varphi_k}{2}$. В самом деле, пусть после k-ого хода Пети a' и a'' — те из оставшихся на доске полупрямых, для которых $\angle(a', a'') = \varphi_k$. Если на k-м ходу Вася провёл прямую b так, что одна из её полупрямых b' проходит между сторонами угла $\angle(a', a'')$, то Петя, стирая другую полупрямую b'' этой прямой, получит $\varphi_{k+1} = \varphi_k$ (см. рис. 2). Если же Вася проведёт прямую b так, что обе полупрямые a' и a'' лежат в одной из определяемых этой прямой полуплоскостей, то (см. рис. 3), поскольку $\angle(a', b') + \angle(a'', b'') = 180^\circ - \varphi_k$, один из углов $\angle(a', b')$ или $\angle(a'', b'')$ не больше $\frac{180^\circ - \varphi_k}{2} = 90^\circ - \frac{\varphi_k}{2}$ (пусть, для определённости, этим

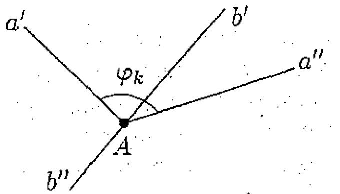


Рис. 2

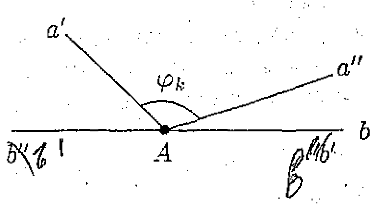


Рис. 3

углом является угол $\angle(a', b')$). Тогда Петя, стирая полупрямую b'', получит $\varphi_{k+1} = \angle(a'', b') \leqslant 90^\circ - \frac{\varphi_k}{2} + \varphi_k = 90^\circ + \frac{\varphi_k}{2}$. При этом Петя обеспечивает также то, что все оставшиеся полупрямые лежат внутри наибольшего угла (этот факт неявно использовался при получении оценки).

Проследим поэтому за наибольшим углом между оставшимися на доске полупрямыми после каждого хода Пети:

$$\varphi_2 \leqslant 90^\circ,\ \varphi_3 \leqslant 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ,\ \varphi_4 \leqslant 90^\circ + \frac{135^\circ}{2} = 157^\circ30',$$

$$\varphi_5 \leqslant 90^\circ + \frac{157^\circ30'}{2} = 168^\circ45',\ \varphi_6 \leqslant 90^\circ + \frac{168^\circ45'}{2} = 174^\circ22'30'' < 177^\circ.$$

Итак, действительно, Вася, как бы ни играл, за 6 ходов не выиграет, если Петя будет придерживаться указанной стратегии.

За 7 ходов Вася выиграет, если на втором ходу получит угол в 90° (проведя на втором ходу прямую, перпендикулярную не стёртой Петей прямой), а затем на каждом ходу будет проводить прямую так, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе наибольшего угла между оставшимися на доске полупрямыми (тогда все предыдущие оценки для φ_k, $k = 1, \ldots, 6$, будут точны и после седьмого хода $\varphi_7 = 90^\circ + \dfrac{174^\circ 22' 30''}{2} = 177^\circ 11' 15''$).

5. Ответ: 19.

Пусть по результатам олимпиады n участников оказались сильными. Так как каждый сильный участник решил больше половины, т. е. не менее 5 задач, то всего они решили не менее $5n$ задач. С другой стороны, каждая задача была решена не более, чем половиной, т. е. 12 участниками. Поэтому общее число задач, решенных всеми участниками олимпиады, не превышает $12 \cdot 8 =$ $= 96$. Получаем, что $5n \leqslant 96$, т. е. $n \leqslant 19{,}2$. Таким образом, число n сильных участников олимпиады не больше, чем 19.

В то же время, как видно из следующей таблицы, 19 сильных могло быть.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 — 19
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
4	+	+	+	+	+								+
5			+	+	+	+	+						+
6					+	+	+	+	+				+
7								+	+	+	+	+	+
8	+	+								+	+	+	+

В таблице приведены результаты девятнадцати сильных участников олимпиады. Символ $+$ в клетке таблицы означает, что задача, номер которой совпадает с номером соответствующей строчки, решена участником, номер которого совпадает с номером соответствующего столбца. Остальные 6 участников, не указанные в таблице, не решили ни одной задачи.

6. Пусть числа, придуманные Незнайкой — это a, b и c, $a < b < c$. Результаты деления с остатком в парах, составленных из этой тройки чисел, можно представить в виде

$$b = ax + x, \quad c = ay + y, \quad c = bz + z, \tag{1}$$

где неполные частные и, одновременно, остатки x, y, z удовлетворяют неравенствам $0 < x < a$, $0 < y < a$, $0 < z < b$. Поскольку $a < b$, то из (1) находим дополнительно, что $z < y$ и, значит, $z < a$. Однако, из (1) получим также

$$(a+1)y = (b+1)z = ((a+1)x+1)z,$$

откуда, в частности, следует, что $((a+1)x+1)z$ делится на $a+1$. Но числа $a+1$ и $(a+1)x+1$ взаимно просты (при делении $((a+1)x+1)$ на любой, отличный от единицы, делитель числа $a+1$ получим в остатке 1). Следовательно, z делится нацело на $a+1$ и, значит, $z > a$ — противоречие.

7. Совместим четырёхугольники Васи и Пети — получим четырёхугольник, который обозначим $ABCD$. В дальнейшем считаем, что у Васи — красный, а у Пети — синий четырёхугольники $ABCD$.

Допустим, что Вася и Петя разрезали свои четырёхугольники по одной и той же диагонали, например, по AC (см. рис. 1). Не нарушая общности рассуждений, считаем, что тот красный треугольник, который оказался равным синему, — это $\triangle ABC$. Тогда синий треугольник, который оказался равным $\triangle ABC$, — это либо сам $\triangle ABC$, либо $\triangle ACD$. В первом случае оставшиеся красный и синий треугольники — это треугольники ACD, а значит, они равны между собой. Во втором случае равенство треугольников ABC и ACD означает, что диагональ AC делит четырёхугольник $ABCD$ на два равных треугольника. Значит, в этом случае любой красный треугольник равен любому синему. Итак, если Вася и Петя разрезали свои четырёхугольники по одной и той же диагонали, утверждение задачи доказано.

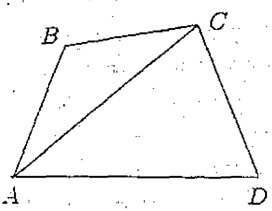


Рис. 1

Допустим теперь, что Вася и Петя разрезали свои четырёхугольники по разным диагоналям, например, Вася — по AC, а Петя — по BD. Не нарушая общности, как и выше, считаем, что тот красный треугольник, который оказался равным синему, — это $\triangle ABC$. Тогда синий треугольник, который окался равным $\triangle ABC$, — это либо 1) $\triangle ABD$, либо 2) $\triangle BCD$.

В случае 1) нужно доказать, что треугольники ACD и BCD равны. Так как треугольники ABC и ABD равны и сторона AB у них общая, а в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, то $\angle BAC = \angle BAD$. Поскольку $\angle BAC$ составляет только часть угла $\angle BAD$ (см. рис. 2), то $\angle BAC \neq \angle BAD$. Следовательно, равными углами в треугольниках ABC и ABD являются: $\angle BAC = \angle ABD$ и $\angle ABC = \angle BAD$. Из этих равенств, так как в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, получаем: $BC = AD$ и $AC = BD$. Поэтому $\triangle ACD = \triangle BDC$ по трём сторонам.

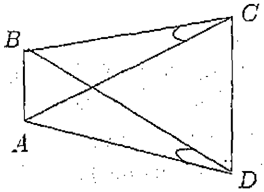


Рис. 2

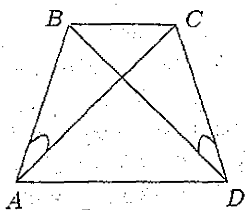
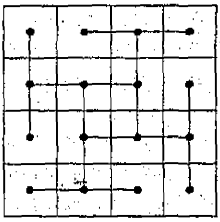


Рис. 3

В случае 2) нужно доказать, что треугольники ABD и ACD равны. Рассуждения ничем не отличаются от рассуждений в случае 1). Так как у равных треугольников ABC и BCD сторона BC общая, то $\angle BAC = \angle BDC$. Поскольку $\angle CBD$ составляет только часть угла $\angle CBA$ (см. рис. 3), то $\angle CBD \neq \angle CBA$, а значит, $\angle ACB = \angle CBD$ и $\angle ABC = \angle BCD$. Отсюда $CD = BA$ и $AC = BD$, и $\triangle ABD = \triangle CDA$ по трём сторонам.

8. Ответ: при любом n кратном четырём.

Заметим, что согласно первому условию задачи все множество клеток можно разбить на непересекающиеся пары. А так как клеток всего n^2, то очевидно, что число n должно быть четным, т.е. $n = 2k$.



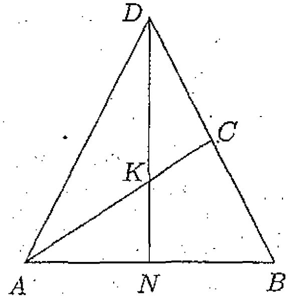
Покажем, что число k также должно быть четным. Поставим каждой клетке в соответствие пару чисел (p, q), где p — номер строки, а q — номер столбца, в которых находится данная клетка. Нетрудно заметить, что второе условие задачи будет выполнено только если концы отрезка находятся в клетках, которым соответствую такие пары (p_1, q_1), (p_2, q_2), что числа в парах (p_1, p_2) и (q_1, q_2) имеют одинаковую четность. Однако число клеток, у которых оба числа в соответствующей этой клетке паре (p, q) четны, равно k^2. А так как таких клеток должно быть четное число, то число k должно быть четным.

Осталось показать, что при $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, всегда можно расположить отрезки в квадрате так, чтобы были выполнены условия задачи. Действительно, в этом случае весь квадрат можно разбить на квадратики 4×4, каждый из которых можно заполнить отрезками так как это указано на рисунке.

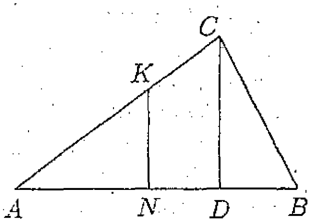
8 класс

8.1 Ответ: 8.

Первое решение. Продолжим отрезки NK и BC до их пресечния в точке D (см. рис.). В силу того, что точка D лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, треугольник ABD — равнобедренный ($AD = DB$). Так как DN — медиана треугольника ABD, и точка K на ней делит отрезок AC в отношении $2:1$ (свойство точки пересечения медиан треугольника), то AC также является медианой $\triangle ABD$. Тем самым, C — середина BD. В результате, $NC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BD = BC = 8$.



Второе решение. Проведем $CD \perp AB$ (см. рис.). Так как $CD \parallel KN$, то по теореме Фалеса $AN : ND = AK : KC = 2 : 1$. Поэтому $ND = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}NB = DB$, т. е. D является серединой стороны NB треугольника NBD. В результате, высота CD этого треугольника является одновременно и его медианой. Поэтому, треуголник NBC — равнобедренный и, значит, $NC = BC = 8$.



8.2. Ответ: при $n \geqslant 3$, кратных 3.

Действительно, если n кратно 3, то $n = 3k$ для некоторого натурального k, и всю таблицу можно разбить на k^2 квадратов 3×3. Так как в каждом квадрате 3×3 сумма чисел чётная, то и сумма всех чисел в таблице, равная сумме k^2 чётных слагаемых, также является чётной.

Покажем теперь, что если n не кратно 3, то при соблюдении условия задачи сумма всех чисел в таблице может не быть чётной.

Рассмотрим два возможных случая.

1) $n = 3k+1$. Впишем в клетки таблицы нули так, как показано на рис. 1; все остальные клетки будем считать заполненными единицами. Тогда в любом квадрате 3×3 содержится ровно один нуль, и, значит, сумма чисел в каждом таком квадрате равна 8 — чётная. В то же время, сумма чисел во всей таб-

лице равна количеству единиц в ней, т. е. равна $n^2 - k^2 = (3k+1)^2 - k^2 = (2k+1)(4k+1)$ — нечётная (как произведение двух нечётных чисел.

	0			0		
	0			0		

Рис. 1

0			0			0	
0			0			0	
0			0			0	

Рис. 2

2) $n = 3k+2$. В этом случае впишем в клетки таблицы нули так, как показано на рис. 2; все остальные клетки также будем считать заполненными единицами. Тогда снова в любом квадрате 3×3 содержится ровно один нуль и, значит, сумма чисел в каждом таком квадрате равна 8 — чётная. В то же время, сумма чисел во всей таблице равна $n^2-(k+1)^2 = (3k+2)^2-(k+1)^2 = (2k+1)(4k+3)$ — снова нечётная.

8.3. При $a = 1$ (и, следовательно, $b = 1$) неравенство, которое требуется доказать, очевидно, верно; то же самое — при $b = 1$. Пусть далее $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Перепишем равенство из условия задачи в виде $(b-1)a^2 + b^2a - b^2 = 0$. Тогда видно, что квадратное уравнение $(b-1)x^2 + b^2x - b^2 = 0$ имеет по крайней мере один корень ($x = a$) и, значит, его дискриминант $b^4 + 4(b-1)b^2 \geqslant 0$. После упрощения получим $b^2 + 4b \geqslant 4$, или $(b+2)^2 \geqslant 8$. Аналогично, $(a+2)^2 \geqslant 8$. Теперь остается лишь сложить последние два неравенства.

8.4. Ответ: б) 8 ходов.

а) Приведём одну из возможных стратегий Васи. На каждом своём ходу Вася должен проводить прямую так, чтобы она составляла угол в 2° с полупрямой, не стёртой Петей на предыдущем ходу, и была расположена так, что если повернуть эту не стёртую Петей полупрямую вокруг точки A на 2° по ходу часовой стрелки, то она совпадёт с одной из полупрямых проведённой Васей прямой.

Докажем, что такая стратегия обеспечивает Васе выигрыш. В самом деле, обозначим через a_n полупрямую, не стёртую Петей на n-м ходу. Рассмотрим k-й ход Васи. Пусть b — прямая, проведённая им на этом ходу, а b' и b'' — её полупрямые (см. рис. 1). Так как $\angle(a_{k-1}, b'') = 178°$, то Петя должен стереть на своём k-м ходу полупрямую b''. Следовательно, после каждого хода Пети угол между полупрямой a_1 и не стёртой Петей полупрямой увеличивается на $2°$. Поэтому после 90-ого хода он составит $2° \cdot 89 = 178°$.

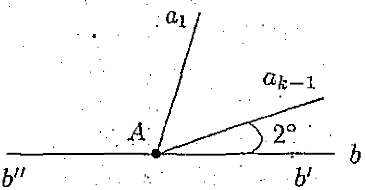


Рис. 1

б) Как видим при стратегии, описанной в п. а), Васе, чтобы выиграть, понадобится ровно 90 ходов (если Петя не будет делать очевидно неверных ходов). Может ли Вася обеспечить себе выигрыш за меньшее число ходов?

Покажем вначале, что за 7 ходов Вася, вообще говоря, не выиграет, т. е. покажем, что у Пети есть такая стратегия, которая позволит ему продержаться 7 ходов не побеждённым.

Через φ_k обозначим наибольший из углов между оставшимися на доске полупрямыми после k-ого хода Пети. Докажем, что Петя может обеспечить, чтобы $\varphi_{k+1} \leqslant 90° + \dfrac{\varphi_k}{2}$. В самом деле, пусть после k-ого хода Пети a' и a'' — те из оставшихся на доске полупрямых, для которых $\angle(a', a'') = \varphi_k$. Если на k-м ходу Вася провёл прямую b так, что одна из её полупрямых b' проходит между сторонами угла $\angle(a', a'')$, то Петя, стирая другую полупрямую b'' этой прямой, получит $\varphi_{k+1} = \varphi_k$ (см. рис. 2). Если же Вася проведёт прямую b так, что обе полупрямые a' и a'' лежат в одной из определяемых этой прямой полуплоскостей, то (см. рис. 3), поскольку $\angle(a', b') + \angle(a'', b'') = 180° - \varphi_k$, один из углов $\angle(a', b')$ или $\angle(a'', b'')$ не больше $\dfrac{180° - \varphi_k}{2} = 90° - \dfrac{\varphi_k}{2}$ (пусть, для определённости, этим

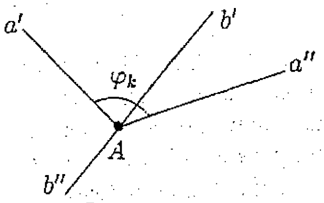


Рис. 2

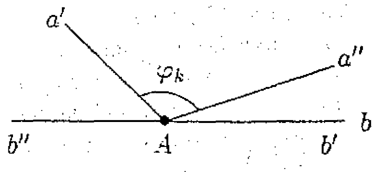


Рис. 3

углом является угол $\angle(a', b')$). Тогда Петя, стирая полупрямую b'', получит $\varphi_{k+1} = \angle(a'', b') \leqslant 90° - \dfrac{\varphi_k}{2} + \varphi_k = 90° + \dfrac{\varphi_k}{2}$. При этом Петя обеспечивает также то, что все оставшиеся полупрямые лежат внутри наибольшего угла (этот факт неявно использовался при получении оценки).

Проследим поэтому за наибольшим углом между оставшимися на доске полупрямыми после каждого хода Пети:

$$\varphi_2 \leqslant 90^\circ,\ \varphi_3 \leqslant 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ,\ \varphi_4 \leqslant 90^\circ + \frac{135^\circ}{2} = 157^\circ 30',$$

$$\varphi_5 \leqslant 90^\circ + \frac{157^\circ 30'}{2} = 168^\circ 45',\ \varphi_6 \leqslant 90^\circ + \frac{168^\circ 45'}{2} = 174^\circ 22' 30'',$$

$$\varphi_7 \leqslant 90^\circ + \frac{174^\circ 22' 30''}{2} = 177^\circ 11' 15'' < 178^\circ.$$

Итак, действительно, Вася, как бы ни играл, за 7 ходов не выиграет, если Петя будет придерживаться указанной стратегии.

За 8 ходов Вася выиграет. Укажем такую его выигрышную стратегию.

Заметим вначале, что если α — некоторый угол между полупрямыми, оставшимися на доске после хода Пети, то на следующем ходу Вася может добиться того, чтобы после хода Пети на доске остались полупрямые с углом $\beta = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Действительно, для этого Васе достаточно провести прямую так, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе угла α; тогда, какую бы из полупрямых этой прямой Петя ни стёр, угол между не стёртой полупрямой и одной из сторон угла α будет равен β. Назовём такой ход Васи расширением угла α.

Опишем теперь стратегию Васи. Вторым ходом Вася должен провести прямую так, чтобы она с не стёртой полупрямой образовывала углы в 128° и 52°. Если Петя на втором ходу оставит на доске угол в 52°, то Вася за 6 ходов, последовательно расширяя углы, получит угол в 178° :

$$52^\circ \xrightarrow[3]{} 116^\circ \xrightarrow[4]{} 148^\circ \xrightarrow[5]{} 164^\circ \xrightarrow[6]{} 172^\circ \xrightarrow[7]{} 176^\circ \xrightarrow[8]{} 178^\circ \qquad (*)$$

(здесь стрелка указывает угол, оставшийся на доске после очередного хода, а число под стрелкой — номер этого хода). Видим, что в этом случае Вася получит угол в 178° за 8 ходов.

Допустим, что Петя на втором ходу оставил на доске угол в

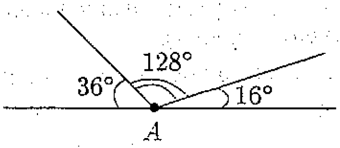


Рис. 4

128°. Тогда Вася на 3-м ходу должен провести прямую так, чтобы наименьшие углы, образовываемые ею со сторонами этого угла, составляли 16° и 36° (см. рис. 4). Дальше возможны только два случая: Петя после 3-его хода оставит на доске либо 1) угол в $128° + 36° = 164°$, либо 2) угол в $128° + 16° = 144°$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

В случае 1) Вася за 3 хода, последовательно расширяя углы, получит угол в 178° (см. ходы 6 — 8 в последовательности (*)); значит, всего в этом случае ему для получения угла в 178° понадобится $3 + 3 = 6$ ходов.

В случае 2) Вася на 3-м ходу должен расширить угол в 144°

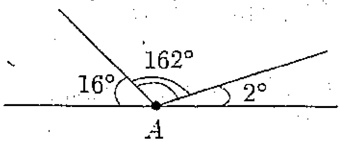
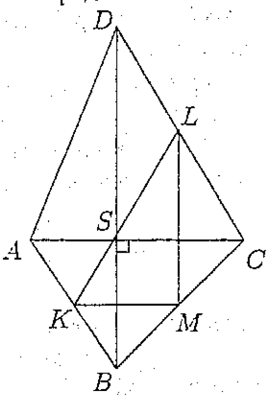


Рис. 5

до угла в 162°, а затем на 4-м ходу провести прямую так, чтобы наименьшие углы, которые она образует со сторонами угла в 162°, были 2° и 16° (см. рис. 5). Поскольку $162° + 16° = 178°$, то после своего 5-ого хода Петя должен оставить на доске угол в $162° + 2° = 164°$. Тогда Вася за 3 хода, так же, как и выше, получит угол в 178°; значит, всего в этом случае ему для получения угла в 178° понадобится $5 + 3 = 8$ ходов.

8.5. Ответ: $2\sqrt{3}$ и $30°$.



Рассмотрим треугольник KML, где M — середина BC. Его стороны KL и ML параллельны диагоналям данного четырехугольника $ABCD$ (как средние линии $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ соответственно) и, следовательно, перпендикулярны друг другу. Таким образом, $\triangle KML$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой $KL = 2$ (по условию задачи) и катетом $KM = \frac{1}{2}AC = 1$. Поскольку катет KM оказался в два раза меньше гипотенузы KL, то $\angle KLM = 30°$. Тогда и искомый угол DSL (S — точка пересечения KL и BD), равный, ввиду параллельности BD и ML, углу KLM, также равен $30°$. Далее из прямоугольного треугольника KML по теореме Пифагора находи $ML = \sqrt{3}$ и значит, $BD = 2 \cdot ML = 2\sqrt{3}$.

8.6. Пусть S — сумма коэффициентов данного трёхчлена. В начале $S = 1 + a + b$. Покажем, что Максим может сделать сумму S равной нулю. Тогда он выигрывает (если $S = 0$, то у квадратного трёхчлена корнями будут 1 и свободный член). Действительно, добавляя на каждом ходу двойку к одному из коэффициентов, Максим может добиться того, что S станет больше 2, причём следующий ход делает он. После этого, если он начнет каждым своим ходом вычитать двойку из произвольного коэффициента, то за ход Максим и за ход Серёжи сумма S будет уменьшаться либо на 1, либо на 3. Значит, через некоторое число пар таких ходов сумма станет равна 0, 1 или 2. Если $S = 2$, то вычитая следующим ходом двойку, Максим выигрывает. Если $S = 0$, то Максим выиграл. Если $S = 1$, то Максим вычитает 2: $S = -1$. Следующим ходом Серёжа делает S равным либо 0 (и тогда он проигрывает), либо -2. Во втором случае Максим добавляет двойку и выигрывает. Таким образом, Максим всегда может выиграть.

8.7. Ответ: 16.

Пусть n — число награжденных участников, m — количество задач, решенных награжденными участниками, k — количество задач, решенных остальными участниками. Тогда

$$m + k \leqslant \left(\frac{1}{2} \cdot 28\right) \cdot 8 = 4 \cdot 28, \quad m \geqslant 5n, \quad k \geqslant \left(\frac{1}{3}(28 - n)\right) \cdot 7. \quad (*)$$

Поэтому $5n + \frac{7}{3}(28 - n)) \leqslant 4 \cdot 28$, откуда $n \leqslant 17$.

Пусть $n = 17$, тогда $28 - n = 11$ и из третьего неравенства в $(*)$ следует, что $k \geqslant 28$. Но тогда из первого неравенства в $(*)$ получаем $5n + 28 \leqslant 4 \cdot 28$, т.е. $5n \leqslant 84$, откуда $n < 17$, противоречие. Следовательно, $n \leqslant 16$. Следующий пример показывает, что 16 участников действительно могло быть награждено. В приведенной таблице в i-й строке указаны номера участников, решивших i-ю задачу.

1	1	2	4	.	.	15	17	18	19	20
2	1	2	4	.	.	15	21	22	23	24
3	1	3	4	.	.	15	25	26	27	28
4	1	3	4	.	.	16	17	18	19	20
5	1	3	.	.	.	16	21	22	23	24
6	2	3	.	.	.	16	25	26	27	28
7	2	3	.	.	15	16	17	18	19	20
8	2	4	.	.	15	16	.			

8.8 Ответ: а) может.

а) Пример такого расположения натуральных чисел в бесконечной строке приведён ниже.

...	9	7	5	3	1	2	4	6	8	...

б) Предположим противное, что любые два соседних числа (так будем называть числа в клетках, имеющих общую сторону) отличаются не более, чем на 2004. Рассмотрим квадрат со стороной 2005, состоящий из клеток, в центре которого записано число 1. Будем называть "ходом" переход от какого-либо числа к соседнему числу (т. е. от одной клетки к другой клетке через их общую сторону). Заметим тогда, что от центрального числа можно дойти до любого другого числа в рассматриваемом квадрате не более, чем за 2004 хода (не более 1002 ходов по вертикали и не более 1002 по горизонтали). Так как при последовательном прохождении соседние числа отличаются не более, чем на 2004, то, значит, каждое число в квадрате отличается от 1 не более, чем на $2004 \cdot 2004$, т. е. каждое число в квадрате не больше, чем $2004^2 + 1$. С другой стороны, в квадрате со стороной 2005 насчитывается 2005^2 чисел, и так как, согласно условию задачи, все они различны, то в квадрате имеется число не меньшее, чем 2005^2. А это — значительно больше, чем $2004^2 + 1$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение не верно и что, действительно, найдутся два соседних числа, которые отличаются не менее, чем на 2004.

9 класс

1. Ответ: при $n = 2k$ и $n = 3k$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, при $n = 2k$ ($n = 3k$) всю таблицу $n \times n$ можно разбить на k^2 квадратов 2×2 (3×3). Так как в каждом таком квадрате сумма чисел чётная, то и сумма всех чисел в таблице, равная сумме k^2 чётных слагаемых, также является чётной.

Покажем теперь, что если n не кратно ни 2, ни 3, то при соблюдении условия задачи сумма чисел во всей таблице может не быть чётной. Заметим, что всякое число, не кратное ни 2, ни 3, имеет один из двух видов: 1) $n = 6k - 1$ или 2) $n = 6k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) $n = 6k - 1$. Впишем во все клетки второй, пятой, восьмой и т. д. строчки таблицы нули (см. рис. 1.) — всего получиться $2k$ строк из нулей; остальные клетки таблицы будем считать заполненными единицами. Тогда в каждом

квадрате 2×2 и 3×3 чётное число единиц, и, значит, сумма чисел в каждом таком квадрате, как и требуется в условии, — четная. В то же время сумма чисел во всей таблице равна $n^2-2kn=n(n-2k)=(6k-1)(4k-1)$ — нечётная.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2

2) $n=6k+1$. Впишем во все клетки третьей, шестой, девятой и т. д. строчки таблицы нули (см. на рис. 2. фрагмент таблицы) — всего получается $2k$ строк из нулей; остальные клетки будем считать заполненными единицами. Тогда снова сумма чисел в каждом квадрате 2×2 и 3×3 — четная. В то же время сумма чисел во всей таблице равна $n^2-2kn=(6k+1)(4k+1)$ — нечётная.

2. Ответ: $a_{2004}\geqslant -1$.

Преобразуем исходное рекуррентное соотношение

$$a_{n+1}=a_n(a_n+2)\ \Leftrightarrow\ a_{n+1}+1=a_n^2+2a_n+1\ \Leftrightarrow\ a_{n+1}+1=(a_n+1)^2.$$

Полагая $b_n=a_n+1$, получим $b_{n+1}=b_n^2$, откуда $b_n=b_1^{2^{n-1}}$. Последнее равенство легко доказать, например, индукцией по n. Поэтому $b_{2004}=b_1^{2^{2003}}$, откуда $a_{2004}=(a_1+1)^{2^{2003}}-1$. Так как очевидно, что $(a_1+1)^{2^{2003}}\geqslant 0$, то $a_{2004}\geqslant -1$. С другой стороны для любого $\alpha\geqslant -1$ число a_{2004} может принимать значение α, для этого достаточно положить $a_1=\sqrt[2^{2003}]{\alpha+1}-1$ (так как $\alpha+1\geqslant 0$, то корень четной степени будет существовать).

3. Ответ: $(0,0)$, $(24,12)$, $(27,9)$.

Легко видеть, что если $y=0$, то и $x=0$. Далее считаем, что $y\neq 0$. Преобразуем исходное уравнение:

$$y^2(x^2+y^2-2xy-x-y)=(x+y)^2(x-y)\quad\Leftrightarrow$$

$$y^2((x-y)^2-(x+y))=(x+y)^2(x-y)\quad\Leftrightarrow$$

$$y^2(x-y)^2 - y^2(x+y) = (x+y)^2(x-y) \quad \Leftrightarrow$$
$$y^2(x-y)^2 = (x+y)((x+y)(x-y)+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad y^2(x-y)^2 = (x+y)x^2.$$

Обозначим $d = \text{НОД}(x,y) > 0$. Тогда $x = ad$, $y = bd$, и из последнего уравнения получаем

$$db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2, \quad \text{НОД}(a,b) = 1. \tag{1}$$

Легко видеть, что $\text{НОД}(a^2, b^2) = 1$ и $\text{НОД}(a+b, b^2) = 1$, но $(a+b)a^2 \vdots b^2$. Поэтому $b^2 = 1$, откуда либо $b = 1$, либо $b = -1$.

Если $b = 1$, то из (1) следует, что

$$d(a-1)^2 = (a+1)a^2. \tag{2}$$

Очевидно, что $a - 1 \neq 0$. Тогда $(a+1)a^2 \vdots (a-1)^2$ и поскольку $\text{НОД}(a, a-1) = 1$, то $(a+1) \vdots (a-1)^2$. Следовательно, $(a+1) \vdots (a-1)$ и поэтому $(a+1)-(a-1) = 2 \vdots (a-1)$, откуда получаем четыре возможности:

$$a-1 = 1 \Rightarrow a = 2; \quad a-1 = -1 \Rightarrow a = 0;$$
$$a-1 = 2 \Rightarrow a = 3; \quad a-1 = -2 \Rightarrow a = -1.$$

Подставляя найденные значения в (2), находим, что только два из них удовлетворяют условию: $a = 2$, и тогда $d = 12$, откуда $(x,y) = (24,12)$; $a = 3$, и тогда $d = 9$, откуда $(x,y) = (27,9)$.

Если же $b = -1$, то из (1) следует, что

$$d(a+1)^2 = (a-1)a^2. \tag{3}$$

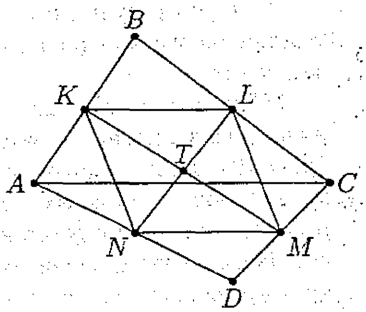
Тогда $(a-1)a^2 \vdots (a+1)^2$. Но $\text{НОД}(a, a+1) = 1$, $\text{НОД}(a^2, (a+1)^2) = 1$, следовательно, $(a-1) \vdots (a+1)^2$. Поэтому $(a-1) \vdots (a+1)$ и, значит, $(a-1)-(a+1) = -2 \vdots (a+1)$, откуда снова четыре возможности:

$$a+1 = 1 \Rightarrow a = 0; \quad a+1 = -1 \Rightarrow a = -2;$$
$$a+1 = 2 \Rightarrow a = 1; \quad a+1 = -2 \Rightarrow a = -3.$$

Подставляя найденные значения в (3), находим, что ни одно из них (в силу условия $d > 0$) не удовлетворяет условию.

Таким образом, искомые решения — это пары $(0,0)$, $(24,12)$, $(27,9)$.

4. Поскольку KL — средняя линия в треугольнике ABC, то



$KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично, $NM \parallel AC$ и $NM = \frac{1}{2}AC$. Поэтому $KL \parallel NM$ и $KL = NM$, так что $KLMN$ — параллелограмм.

Далее, $S(KBL) = \frac{1}{4}S(ABC)$ и $S(NDM) = \frac{1}{4}S(ADC)$, откуда $S(KBL) + S(NDM) = \frac{1}{4}(S(ABC) + S(ADC)) = \frac{1}{4}S$. Аналогично получаем, что $S(NAK) + S(LCM) = \frac{1}{4}S$. Таким образом,

$$S(KLMN) = S - (S(KBL) + S(NDM) + S(NAK) + S(LCM)) =$$
$$= S - (\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S) = \frac{1}{2}S.$$

Тогда $S(NTM) = \frac{1}{4}S(KLMN) = \frac{1}{8}S$.

Поскольку $S(NTM) < S(DNTM) = x$, то $\frac{1}{8}S < x$, или $S < 8x$ — правая часть требуемого двойного неравенства доказана. Докажем левую часть.

Заметим, что

$$S(DNTM) + S(KBLT) = S(NDM) + S(KBL) + S(NTM) + S(KTL) =$$
$$= \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S(KLMN) + \frac{1}{4}S(KLMN) = \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S + \frac{1}{8}S = \frac{1}{2}S,$$

т.е. $x + S(KBLT) = \frac{S}{2}$, откуда $y = S(KBLT) = \frac{S}{2} - x$. Но для y совершенно аналогичными соображениями мы получаем неравенство $S < 8y$. Поэтому

$$S < 8(\frac{S}{2} - x) = 4S - 8x \quad \Leftrightarrow \quad 8x < 3S \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{3}x < S,$$

что и требовалось доказать.

5. Ответ: а) 5; б) 10; 5.

Пусть по результатам олимпиады n задач оказались трудными и m участников оказались сильными. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного m.

1) Пусть $m = 2k$. Так как любой сильный участник решил более половины всех задач, т.е. не менее пяти, то всего сильные участники решили не менее $5m = 10k$ задач. С другой стороны, так как любую из трудных задач решило менее половины сильных участников, т.е. не более $k-1$ участников, то число решенных сильными участниками трудных задач не более $n(k-1)$. Число же остальных (легких) задач, решенных сильными участниками, не превосходит произведения их количества $(8-n)$ на число сильных участников $m = 2k$. Таким образом, получаем

$$10k \leqslant n(k-1) + (8-n)\cdot 2k, \quad \text{откуда} \quad n \leqslant 6 - \frac{6}{k+1}. \qquad (1)$$

2) При нечетном $m = 2k+1$ аналогичными рассуждениями получаем оценку

$$5(2k+1) \leqslant nk + (8-n)\cdot(2k+1), \quad \text{откуда} \quad n \leqslant 6 - \frac{3}{k+1}. \qquad (2)$$

В каждом из случаев из соответствующего неравенства следует, что $n \leqslant 5$. Кроме того, при $n = 5$ из (1) вытекает, что $k \geqslant 5$, т.е. наименьшее четное число сильных участников не менее 10, а из (2) вытекает, что $k \geqslant 2$, т.е. наименьшее нечетное число сильных участников не менее 5.

Осталось привести примеры, показывающие что значения $n = 5, m = 10$ и $n = 5, m = 5$ достигаются.

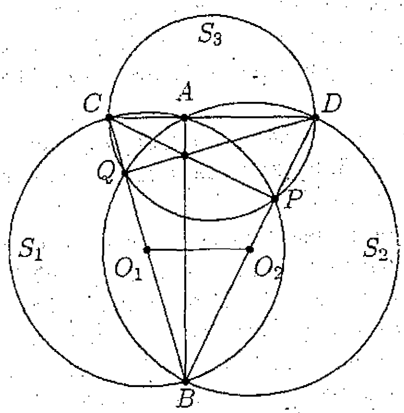
Сильные участники

	1	2	3	4	5
1	+				+
2	+	+			
3		+	+		
4			+	+	
5				+	+
6	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+

Сильные участники

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+				+	+				+
2	+	+				+	+			
3		+	+				+	+		
4			+	+				+	+	
5				+	+				+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

6. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно. Тогда $AB \perp O_1O_2$ (действительно, $\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$; значит, точки A и B симметричны относительно прямой O_1O_2). Поэтому, так как по условию CD параллельна O_1O_2 и проходит через точку A, то $AB \perp AC$.



Покажем теперь, что точки P, B и D лежат на одной прямой (не обязательно в указанном порядке). В самом деле, $CP \perp PB$, поскольку CB — диаметр окружности S_1, и $CP \perp PD$, поскольку CD — диаметр окружности S_3.

Аналогично доказывается, что точки C, B и Q лежат на одной прямой, причем $DQ \perp CB$.

Следовательно, CP, DQ и AB — высоты ΔBCD, т.е. пересекаются в одной точке. (Хотя ситуация может внешне сильно зависеть от взаимного расположения S_1 и S_2 — треугольник BD может оказаться и тупоугольным, — но решение одинаково во всех случаях.)

7. Ответ: $\sqrt{3}/2$.

Пусть a, b, c — стороны первого треугольника, а h_a, h_b, h_c2 — высоты, проведенные к этим сторонам соответственно. Имеем $h_aa = h_bb = h_cc$. Пусть для определенности $a \geqslant b \geqslant c$, тогда $h_c \geqslant h_b \geqslant h_a$. По условию h_a, h_b, h_c — стороны второго треугольника, подобного первому с некоторым коэффициентом k. Тогда $h_c = ka$, $h_b = kb$, $h_a = kc$. Отсюда $a \cdot kc = b \cdot kb = c \cdot ka$ или $b^2 = ac$. Пусть β — угол между сторонами сторонами a и c, тогда $c \sin\beta = h_a = kc$, т.е. $k = \sin\beta$. С другой стороны, по теореме косинусов

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \implies ac = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \implies$$

$$ac(1 + 2\cos\beta) = a^2 + c^2 \geqslant 2ac \implies \cos\beta \geqslant \frac{1}{2} \implies \beta \leqslant 60^0,$$

тогда $k = \sin\beta \leqslant \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Осталось заметить, что коэффициент подобия может принимать значение $\sqrt{3}/2$, например, если оба треугольника будут равносторонние. В этом случае высота первого треугольника равны произведению длины его стороны на $\sqrt{3}/2$.

8. *Первое решение.* Легко убедиться, что при $k = 1$, действительно, существует ровно 4 устойчивых набора (цифры) — это: 0, 1, 5 и 6. Далее, любой устойчивый набор, согласно его определению, должен оканчиваться на одну из этих цифр.

Индукцией по числу k цифр набора докажем следующее утверждение: для каждого $k \in \mathbb{N}$ и любого $i \in \{0, 1, 5, 6\}$ имеется только один устойчивый набор из k цифр, оканчивающийся на i.

Для $k = 1$ сформулированное утверждение, как отмечено выше, верно. Пусть оно доказано для $k = n$. Докажем его для $k = n + 1$. Зафиксируем какое-либо $i \in \{0, 1, 5, 6\}$. У каждого устойчивого набора из $(n+1)$-й цифры, в силу его определения, последние n цифр также образуют устойчивый набор. Значит, если b_{n+1} — устойчивый набор из $(n+1)$-й цифры, оканчивающийся на i, а b_n — тот единственный (по предположению индукции) набор из n цифр, оканчивающийся на i, то $b_{n+1} = \overline{cb_n}$, где c — некоторая цифра. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что цифра c определяется однозначно. Через c_{n+1} обозначим $(n+1)$-ю (с конца) цифру числа b_n^2 (цифра $c_{n+1} = 0$, если набор b_n^2 менее, чем $(n+1)$-значный).

Набор b_{n+1} устойчив, если и только если b_{n+1}^2 оканчивается на b_{n+1}. Набор последних n цифр у b_{n+1}^2 совпадает с b_n (поскольку набор b_n устойчив и совпадает с набором последних n цифр набора b_{n+1}), т. е. у наборов b_{n+1}^2 и b_{n+1} последние n цифр совпадают. Остаётся выяснить, когда у этих наборов (т. е. при каких c) совпадает их $(n+1)$-я цифра. Имеем: $b_{n+1}^2 = (c \cdot 10^n + b_n)^2 = c^2 \cdot 10^{2n} + 2cb_n \cdot 10^n + b_n^2$. Из этого представления, так как у слагаемого $c^2 \cdot 10^{2n}$ последние $n+1$ цифр нули, а у слагаемого $2cb_n \cdot 10^n$ последние n цифр нули, вытекает, что $(n+1)$-я с конца цифра набора b_{n+1}^2 совпадает с последней цифрой суммы $2cb_n + c_{n+1}$, т. е. (так как последняя цифра b_n равна i) с последней цифрой суммы $2ci + c_{n+1}$. Остаётся убедиться, что при $i = 0, 1, 5, 6$ существует единственная цифра c, такая, что число $2ci + c_{n+1}$ оканчивается на c.

Если $i = 0$, то $2ci + c_{n+1} = c_{n+1}$ и, значит, $c = c_{n+1}$.

Если $i = 1$, то на c должно оканчиваться число $2c + c_{n+1}$. Так как $c \leqslant 2c + c_{n+1} < 30$, то, значит, либо $2c + c_{n+1} = c$, либо $2c + c_{n+1} = 10 + c$, либо $2c + c_{n+1} = 20 + c$, или, равносильно, либо $c + c_{n+1} = 0$, либо $c = 10 - c_{n+1}$, либо $c = 20 - c_{n+1}$. Первое равенство возможно только в случае $c_{n+1} = 0$, и тогда $c = 0$. Второе равенство — только если цифра $c_{n+1} \neq 0$, а третье (поскольку c — цифра) невозможно. Видим, что при $i = 1$ цифра c определяется однозначно.

Если $i = 5$, то на c должно оканчиваться число $10c + c_{n+1}$, которое оканчивается на c_{n+1}. Поэтому в этом случае $c = c_{n+1}$.

Если $i = 6$, то на c должно оканчиваться число $12c + c_{n+1}$, или, что то же самое, число $2c + c_{n+1}$. Поэтому этот случай совпадает с уже рассмотренным случаем $i = 1$.

Сформулированное утверждение, а с ним и утверждение задачи, доказано.

Второе решение. Представляя числа, оканчивающиеся на a, в виде $10^k b + a$, видим, что набор a устойчив тогда и только тогда, когда число a^2 оканчивается на a, т. е. когда $a^2 - a = a(a-1) \vdots 10^k = 2^k 5^k$ (если набор a начинается нулями, мы отождествляем его с соответствующим натуральным числом и с 0, если все его цифры нули). Поскольку числа a и $a-1$ взаимно просты, то последнее возможно только в следующих четырёх случаях:

$$1)\ a \vdots 10^k,\ 2)\ a-1 \vdots 10^k,\ 3)\ a \vdots 2^k \text{ и } a-1 \vdots 5^k,\ 4)\ a \vdots 5^k \text{ и } a-1 \vdots 2^k.$$

Разберём каждый из них.

1) Так как $0 \leqslant a < 10^k$, то это возможно только в одном случае, а именно, $a = 0\ldots0$.

2) Так как $-1 \leqslant a - 1 < 10^k$, то это возможно только в одном случае: $a - 1 = 0\ldots0$, т. е. $a = 0\ldots01$.

3) В этом случае $a = 2^k x$, где $x \in \{1, \ldots, 5^k - 1\}$, и $a - 1 = 5^k y$, где $y \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$2^k x - 5^k y = 1. \qquad (*)$$

Как известно, все целочисленные решения $(x; y)$ уравнения $(*)$ даются формулами

$$x = x_0 + 5^k t, \quad y = y_0 + 2^k t, \qquad (**)$$

где $(x_0; y_0)$ — какое-либо целочисленное решение этого уравнения, а $t \in \mathbb{Z}$ (для доказательства достаточно положить в $(*)$ $x = x_0$, $y = y_0$, вычесть полученное равенство из $(*)$ и, приведя подобные, воспользоваться в получившемся равенстве взаимной простотой 2 и 5). Так как $x_0 \neq 0$, то на полуинтервале $[0, 5^k)$ имеется ровно один член арифметической прогрессии, задаваемой первым из равенств $(**)$. Поэтому уравнение $(*)$ имеет ровно одно целочисленное решение $(x_1; y_1)$, у которого $x_1 \in \{1, \ldots, 5^k - 1\}$. Тогда число $a = 2^k x_1 \in \{1, \ldots, 10^k - 1\}$ — искомое (если оно менее, чем k-значное, то для получения искомого набора к нему нужно приписать слева соответствующее число нулей).

Случай 4) разбирается аналогично случаю 3).

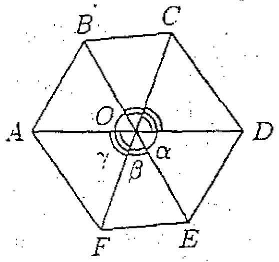
1. Ответ: 22.

Заметим, что

$$S(BOC)\cdot S(DOE)\cdot S(FOA)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}BO\cdot CO\sin\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{2}DO\cdot EO\sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{2}FO\cdot AO\sin\gamma\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{2}CO\cdot DO\sin\gamma\right)\cdot\left(\frac{1}{2}EO\cdot FO\sin\beta\right)=$$
$$=S(AOB)\cdot S(COD)\cdot S(EOF)=1\cdot 3\cdot 9=27.$$

Далее, воспользовавшись неравенством для среднего арифметического и среднего геометрического трех чисел, получим

$$S(ABCDEF)=S(AOB)+S(COD)+S(EOF)+$$
$$+S(BOC)+S(DOE)+S(FOA)=$$
$$=1+3+9+S(BOC)+S(DOE)+S(FOA)\geqslant$$
$$\geqslant 13+3\sqrt[3]{S(BOC)\cdot S(DOE)\cdot S(FOA)}=$$
$$=13+3\sqrt[3]{27}=22.$$



Осталось привести пример шестиугольника у которого площадь в точности равна 22:

$$AO=\frac{4}{3},\ BO=DO=\sqrt{3},\ CO=EO=4,\ FO=3\sqrt{3},\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ.$$

2. Ответ: $n=3p$, или $n=5q$, где $p,q\in\mathbb{N}$.

Нетрудно заметить, что если $n=3p$, или $n=5q$, где $p,q\in\mathbb{N}$, то сумма чисел во всей таблице также окажется четной, поскольку в этих случаях всю таблицу можно разбить на p^2 или q^2 квадратов 3×3 или 5×5 соответственно.

Покажем, что для других n можно так заполнить таблицу числами, что сумма этих чисел окажется нечетной. Рассмотрим две последовательности

$$1011011011\ldots\quad(1)\qquad 10001100011000110001100001\ldots.\quad(2)$$

Первая из этих последовательностей периодически повторяется через три числа, а вторая — через пять. Обозначим сумму первых k последовательных чисел в первой последовательности через A_k, а во второй — через B_k. Заметим, что сумма любых пятнадцати последовательных чисел в каждой из последовательностей четна, поэтому имеем $A_{k+15m} \equiv A_k \pmod 2$, $B_{k+15m} \equiv B_k \pmod 2$ для всех натуральных k и m. Таблицу $n \times n$ заполним следующим образом: если в первой последовательности на k-м месте стоит 1, то в k-й столбец таблицы запишем первых n членов второй последовательности; если же в первой последовательности на k-м месте стоит 0, то k-й столбец таблицы заполним сплошь нулями. Легко видеть, что при таком способе заполнения таблицы сумма всех чисел в ней будет равна $A_n \cdot B_n$. Заметим теперь, что

$$A_1 = 1,\ A_2 = 1,\ A_4 = 3,\ A_7 = 5,\ A_8 = 5,\ A_{11} = 7,\ A_{13} = 9,\ A_{14} = 9$$

$$B_1 = 1,\ B_2 = 1,\ B_4 = 1,\ B_7 = 3,\ B_8 = 3,\ B_{11} = 5,\ B_{13} = 5,\ B_{14} = 5.$$

Учитывая периодичность каждой из последовательностей, получаем, что A_n и B_n нечетны при $n \neq 3p$, $n \neq 5q$. Следовательно, суммы чисел в таблице размера $n \times n$, для которых $n \neq 3p$ и $n \neq 5q$, при указанном способе заполнения будет нечетным числом. Осталось заметить, что при этом в любом квадрате 3×3 и 5×5 сумма чисел будет четной. Действительно, в силу свойств последовательности (1) в любом квадрате 3×3 будет два одинаковых столбца, а третий столбец нулевой и, значит, сумма чисел в таком квадрате будет четной. В силу же свойств последовательности (2) в любом квадрате 5×5 каждый столбец будет содержать четное число единиц (в частности, быть может, ни одной), и, значит, сумма чисел в таком квадрате будет также четной. На рисунке приведен пример заполнения таблицы 7×7.

1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

3. Покажем, что для любого $k = 0, 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$2^k a_k + 2^{k+1} a_{k-1} + \ldots + 2^n a_n \leqslant 0.$$

Действительно, предположим, что это не так, т. е. что сумма, стоящая в левой части неравенства, больше нуля. Но она является целым числом, делящимся на 2^k и, значит, эта сумма не меньше 2^k. Тогда

$$0 = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^{k-1}a_{k-1} + (2^k a_k + \ldots + 2^n a_n) \geqslant$$

$$\geqslant -1 - 2 - \ldots - 2^{k-1} + 2^k = -(2^k - 1) + 2^k = 1.$$

Противоречие. Таким образом, получаем n неравенств и одно равенство:

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant 0, \\ a_{n-1} + 2a_n &\leqslant 0, \\ &\vdots \\ a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{n-2}a_{n-1} + 2^{n-1}a_n &\leqslant 0, \\ -(a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^{n-1}\, a_{n-1} + 2^n\, a_n) &= 0, \end{aligned}$$

сложив которые, учитывая, что хотя бы одно из неравенств строгое, так как не все a_i равны нулю, приходим к неравенству

$$-(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < 0,$$

которое равносильно требуемому.

4. б) Допустим, что c чётно, $c = 2c_1$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$c_1(2ac_1 + 1)^2 = (5c_1 + b)(4c_1 + b).$$

Пусть d — наибольший общий делитель c_1 и b. Тогда $c_1 = dc_0, b = db_0$, где НОД $(c_0, b_0) = 1$. Уравнение перепишется в виде

$$c_0(2adc_0 + 1)^2 = d(5c_0 + b_0)(4c_0 + b_0)$$

Очевидно, что c_0 взаимно просто с каждым из чисел $5c_0 + b_0, 4c_0 + b_0$, а d взаимно просто с $(2adc_0+1)^2$. Поэтому из последнего уравнения следует, что $c_0 = d$, тогда уравнение перепишется в виде $(2ad^2+1)^2 = (5d+b_0)(4d+b_0)$.

Далее заметим, что числа $5c_0 + b_0$ и $4c_0 + b_0$ взаимно просты. Действительно,

$$\text{НОД}(5c_0 + b_0, 4c_0 + b_0) = \text{НОД}(5c_0 + b_0 - 4c_0 - b_0, 4c_0 + b_0) =$$

$$= \text{НОД}(c_0, 4c_0 + b_0) = \text{НОД}(c_0, 4c_0 + b_0 - 4c_0) = \text{НОД}(c_0, b_0) = 1.$$

Отсюда вытекает, что $5d+b_0=m^2, 4d+b_0=n^2, 2ad^2+1=mn$, где m,n — некоторые натуральные числа.

Из последних равенств находим $d=m^2-n^2$ (в частности, $m>n$). Тогда

$$mn=1+2ad^2=1+2a(m-n)^2(m+n)^2\geqslant 1+2a(m+n)^2\geqslant$$

$$\geqslant 1+8amn\geqslant 1+8mn,$$

т.е. $0\geqslant 1+7mn$, противоречие. Следовательно, c не может быть чётным.

а) По аналогии с пунктом б), пусть $c=dc_0, b=db_0$, где d — наибольший общий делитель c и d; НОД $(c_0,b_0)=1$. Уравнение перепишется в виде

$$c_0(adc_0+1)^2=d(5c_0+2b_0)(2c_0+b_0).$$

Заметим теперь, что число c_0 взаимно просто с числом $2c_0+b_0$, а так как c_0 нечетно, то и с числом $5c_0+2b_0$, а число d взаимно просто с $(adc_0+1)^2$. Следовательно, $c_0=d$ и, таким образом, $c=dc_0=d^2$, что и требовалось доказать.

в) Положим, например, $c=1$ и покажем, что полученное уравнение

$$(a+1)^2=(5+2b)(2+b)$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах a,b.

Действительно, пусть $5+2b=m^2, 2+b=n^2$. Следовательно, $a=mn-1$. Осталось убедиться, что существует бесконечно много $m,n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих равенствам $5+2b=m^2, 2+b=n^2$ т.е. равенству

$$m^2-2n^2=1. \qquad (*)$$

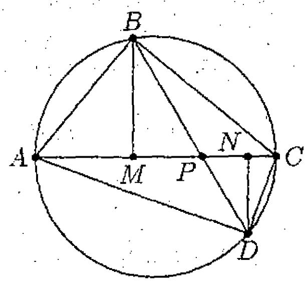
Заметим, что $(3,2)$ — решение $(*)$. Далее, прямая проверка показывает, что если (m,n) — решение $(*)$, то $(3m+4n, 3n+2m)$ — тоже решение.

5. Заметим, что

$$BM\cdot AC=2S(ABC)=AB\cdot BC\sin\angle ABC=2AD\cdot DC\sin(180^\circ-\angle ABC)=$$

$$=2AD\cdot DC\sin\angle ADC=4S(ADC)=2DN\cdot AC,$$

где BM и DN — высоты треугольников ABC и ADC соответственно. Тогда $BM = 2DN$. Пусть P — точка пересечения диагоналей AC и BD. Легко видеть, что треугольники BMP и DNP подобны, поэтому $BP : DP = BM : DN = 2 : 1$. Поэтому $BP = 2DP$ и $BD = 3DP$. Из теоремы о пересекающихся хордах следует, что



$$\frac{2}{9}BD^2 = \frac{2}{3}BD\cdot\frac{1}{3}BD = BP\cdot DP = AP\cdot PC =$$

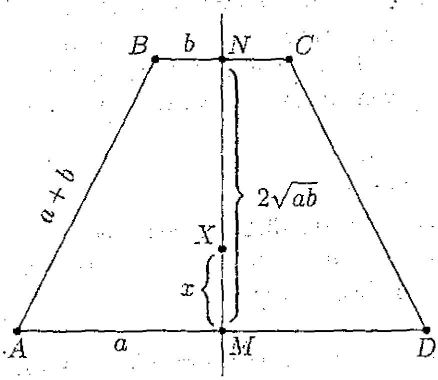
$$= \frac{1}{4}\cdot 4AP\cdot CP \leqslant \frac{1}{4}(AP+PC)^2 = \frac{1}{4}AC^2,$$

откуда и следует требуемое неравенство. Заметим, что равенство достигается, когда P — середина отрезка AC.

6. Ответ: б) не верно.

а) Запишем равенство периметров треугольников ABX и BCX: $AB + AX + BX = BC + BX + CX$, откуда $AB + AX = BC + CX$. Аналогично доказывается равенство $CD + CX = DA + AX$. Складывая два последних равенства и приводя подобные слагаемые, получаем $AB + CD = BC + AD$. Это и означает, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 2a$, $BC = 2b$ и боковыми сторонами $a + b$. Пусть M и N — середины оснований AD и BC соответственно. Легко вычисляем, что $MN = 2\sqrt{ab}$. Заметим, что в $ABCD$ можно вписать окружность, т. к. $AD + BC = AB + CD = 2a + 2b$. Покажем, однако, что при надлежащем выборе a и b не найдётся точки X такой, что периметры соответствующих четырёх треугольников равны. Предположим, что такая точка X существует. Тогда X обязана принадлежать прямой MN. Если бы $X \notin MN$, например, если бы X лежала в одной полуплоскости с точками A и B относительно прямой MN, то было бы $XA < XD$ и $XB < XC$, так что



периметр $AX + BX + AB$ треугольника ABX был бы меньше периметра $DX + CX + CD$ треугольника CDX. Противоречие.

Итак, $X \in MN$. Обозначим $x = MX$ — расстояние от точки X до M, которое мы будем считать положительным, если X лежит в той же полуплоскости относительно прямой AD, что и точка N, и отрицательным в противном случае. Тогда периметры треугольников ADX и BCX равны $2a+2\sqrt{a^2+x^2}$ и $2b+2\sqrt{b^2+(2\sqrt{ab}-x)^2}$ соответственно. По нашему предположению эти периметры равны, т.е. x удовлетворяет уравнению

$$a + \sqrt{a^2+x^2} = b + \sqrt{b^2+(2\sqrt{ab}-x)^2}.$$

Покажем, однако, что это уравнение, вообще говоря, может не иметь действительных решений x. Возьмём, например, $a = 9, b = 1$, получим уравнение

$$8 + \sqrt{81+x^2} = \sqrt{1+(6-x)^2}, \qquad (*)$$

откуда $64+81+x^2+16\sqrt{81+x^2} = 37+x^2-12x$, или $4\sqrt{81+x^2} = -3(x+9)$.

Из последнего, в частности, следует, что $x < -9$. Тогда

$$16(81+x^2) = 9(x^2+18x+81),$$

или $7x^2 - 2\cdot 81x + 7\cdot 81 = 0$.

Решая последнее уравнение, получаем $x_{1,2} = \dfrac{81 \pm 36\sqrt{2}}{7}$

Видим, что оба корня последнего уравнения положительны, поэтому не удовлетворяют условию $x < -9$. Следовательно уравнение $(*)$ решений не имеет. Стало быть, точки X, удовлетворяющей нужному условию, не существует.

7. Ответ: да.

Покажем, что для любого $n > 2$ существуют натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n такие, что

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \,\vdots\, a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \,\vdots\, a_4 \\ \dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \,\vdots\, a_n \end{cases} \qquad (1)$$

и $a_i \not\vdots\, a_j$ при $i \neq j$.

Для этого определим числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ как первые n членов последовательности

$$pq-2, pq+2, 2pq, 4p, 4(q+1), 4(p+1), \cdots, 4(q+k), 4(p+k), \cdots$$

которую оборвем ровно на n-м месте. Здесь p и q — нечётные целые числа, такие, что $p > 4n)$, $q=(p+n)!+1$. Легко видеть, что система условий делимости (1) выполняется. Кроме того, условия на p и q гарантируют, что ни одно из чисел последовательности не делится на другое. Значит, числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ — искомые, то есть ответ положителен.

8. Ответ: а) мог; б) не мог. Пусть каждый из первых по списку двадцати девяти участников решил первые семь задач и не решил восьмую, а тридцатый решил только восьмую. Тогда он решил меньше всех задач, а набрал 29 баллов, в то время как остальные — лишь по 7 баллов.

б) Допустим, что некоторый участник A набрал меньше всех баллов и решил больше всех задач. Пусть A решил, для определенности, первые l из восьми задач. Пусть также $k_1, ..., k_8$ — количества участников, решивших соответственно первую, ..., восьмую задачи. Тогда A набрал в сумме

$$(30-k_1)+...+(30-k_l)=30l-(k_1+...+k_l)$$

баллов. В решении задачи 6 из 11 класса показано, что число баллов, набранных A не превосходит 58. Таким образом $30l-(k_1+...+k_l) \leqslant 58$, откуда

$$k_1+...+k_l \geqslant 30l-58. \qquad (*)$$

Далее, из первых l задач все 29 участников, за исключением A, в сумме решили $(k_1-1)+...+(k_l-1)$ задач. Если бы было $(k_1-1)+...+(k_l-1) \geqslant$ $\geqslant (l-2)\cdot 29+1$, то нашелся бы хотя бы один из 29, который решил не менее $(l-2)+\frac{1}{29}$, т.е. не менее $l-1$ задачи. По условию, он решил меньше, чем A, а, значит, он решил в точности эти $l-1$ задачи. Но A решил все эти же задачи и еще одну — противоречие с тем, что A набрал меньше всех баллов. Таким образом, $(k_1-1)+...+(k_l-1) \leqslant (l-2)\cdot 29$, откуда

$$(k_1+...+k_l) \leqslant (l-2)\cdot 29+l=30l-58. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) получаем, что $k_1+...+k_l=30l-58$. Тогда A набрал $30l-(k_1+...+k_l)=58$ баллов в точности. Поэтому общее число S баллов, набранных всеми, удовлетворяет условию $S \geqslant 58+29\cdot 59=30\cdot 59-1$.

С другой стороны, это общее число баллов

$$S = k_1(30-k_1)+\ldots+k_l(30-k_l)+k_{l+1}(30-k_{l+1})+\ldots+k_8(30-k_8) \leqslant$$

$$\leqslant l(30-\frac{k_1+\ldots+k_l}{l})\frac{k_1+\ldots+k_l}{l}+(8-l)\cdot 15^2 =$$

$$= l(30-\frac{30l-58}{l})\frac{30l-58}{l}+(8-l)\cdot 225 = \frac{58}{l}(30l-58)+225(8-l) =$$

$$= 58\cdot 30+8\cdot 225-(\frac{58^2}{l}+15^2 l).$$

(Использовано неравенство Йенсена для вогнутой функции $y = x(30-x)$, а так же то, что максимум этой функции достигается при $x = 15$.) Отсюда $30\cdot 59-1 \leqslant 58\cdot 30+8\cdot 225-(\frac{58^2}{l}+15^2 l)$. Тогда

$$\frac{58^2}{l}+15^2 l \leqslant 30(58-59)+1+8\cdot 225 = 1771.$$

Заметим, что минимум выражения $\frac{58^2}{l}+15^2 l$ достигается при $\frac{58^2}{l} = 15^2 l$, т.е. при $l_0 = \frac{58}{15} = 4-\frac{2}{15}$. При $l \geqslant l_0$ функция $\frac{58^2}{l}+15^2 l$ возрастает, следовательно при $l \geqslant 5$ получаем $\frac{58^2}{l}+15^2 l \geqslant \frac{58^2}{5}+15^2\cdot 5$.

Тогда $1771 \geqslant \frac{58^2}{5}+15^2\cdot 5$, что неверно.

Пусть теперь $l \leqslant 4$. Тогда, в частности,

$$\frac{30l-29}{8} \leqslant \frac{30\cdot 4-29}{8} = \frac{91}{8} < 12.$$

Далее, так как A решил больше всех задач, то общее число задач, решенных всеми

$$k_1+\ldots+k_8 \leqslant l+29(l-1) = 30l-29,$$

т.е. $\frac{k_1+\ldots+k_8}{8} \leqslant \frac{30l-29}{8} < 12$. Тогда общее число набранных всеми баллов

$$S = k_1(30-k_1)+\ldots+k_8(30-k_8) \leqslant 8\cdot(30-\frac{k_1+\ldots+k_8}{8})\frac{k_1+\ldots+k_8}{8} <$$

$$< 8 \cdot (30 - 12) \cdot 12 = 8 \cdot 18 \cdot 12.$$

Получаем, что $8 \cdot 18 \cdot 12 > 30 \cdot 59 - 1$, что неверно.

11 класс

1. Изложим решение на языке теории графов.

Пусть в графе вершины соответствуют ученикам, а рёбра соединяют вершины, соответствующие друзьям. По условию граф связный, и по крайней мере одна из его вершин имеет нечётную степень. Поскольку вершин нечётной степени — чётное количество, то разобьём такие вершины на непересекающиеся пары произвольным образом и вершины в этих парах соединим (если даже они были соединены ранее) „дополнительным" ребром. В полученном связном графе (точнее, мультиграфе) все вершины будут иметь чётную степень и, следовательно, его можно обойти, побывав в каждой вершине и вернувшись в исходную, причём каждое ребро будет проходиться ровно один раз (Эйлеров путь). При таком обходе будем попеременно помечать каждое проходимое ребро либо буквой M, либо буквой V. Тогда из каждой вершины, за исключением, быть может, начальной, будет выходить одинаковое число рёбер, помеченных буквами M и V. У начальной же вершины будет или одинаковое число рёбер, помеченных буквами M и V, или ровно на два ребра больше, помеченных буквой M. Удалим теперь все дополнительные построенные нами рёбра. При этом число рёбер у каждой вершины уменьшится не более чем 1, а у начальной вершины исчезнет именно ребро, отмеченное буквой M. Если теперь разговоры между друзьями, соединёнными ребром с буквой M, будет обслуживать МТС, а разговоры между друзьями, соединенными ребром с буквой V, будет обслуживать Velcom, то требуемое в задаче условие будет выполнено.

2. При решении нами будет использована следующая стандартная

Лемма. *Отрезок общей касательной двух касающихся внешним образом окружностей равен удвоенному корню квадратному из произведения их радиусов.* (см. рис. 1.)

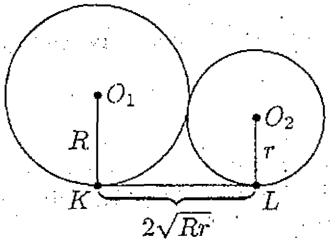


Рис. 1

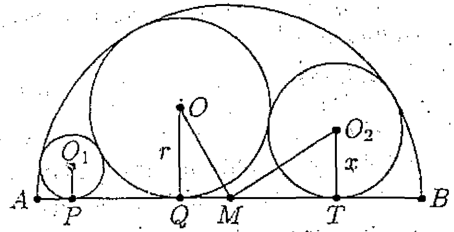


Рис. 2

Пусть M — середина AB, P, Q, T — точки касания S_1, S, S_2 с AB соответственно, O_1, O, O_2 — центры этих окружностей. Обозначим $AB = 2R$, $O_2 = r_2 = x$. Тогда $MO = R - r$, и из прямоугольного $\triangle OQM$ находим $QM = \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Аналогично $MT = \sqrt{R^2 - 2Rx}$. Заметим, что $QM = |QT - MT|$. Согласно лемме $QT = 2\sqrt{rx}$. Тогда $QM^2 = = (QT - MT)^2$, или

$$R^2 - 2Rr = 4rx + R^2 - 2Rx - 4\sqrt{rx}\sqrt{R^2 - 2Rx},$$

$$2\sqrt{rx}\sqrt{R^2 - 2Rx} = Rr - (R - 2r)x,$$

$$4rx(R^2 - 2Rx) = (R - 2r)^2x^2 - 2Rr(R - 2r)x + R^2r^2,$$

$$(R + 2r)^2x^2 - 2Rr(3R - 2r)x + R^2r^2 = 0. \qquad (*)$$

Заметим, что последнему уравнению удовлетворяет не только $x = = r_2$, но и $x = r_1$, так как для r_1 уравнение получается из аналогичного равенства $QM = |QP - MP|$. Иными словами, r_1 и r_2 — корни уравнения $(*)$. Записываем формулы Виета для этого уравнения:

$$r_1 + r_2 = \frac{2Rr(3R - 2r)}{(R + 2r)^2}, \quad r_1 r_2 = \frac{R^2r^2}{(R + 2r)^2}.$$

В частности, $\sqrt{r_1 r_2} = \dfrac{Rr}{R + 2r}$. Тогда

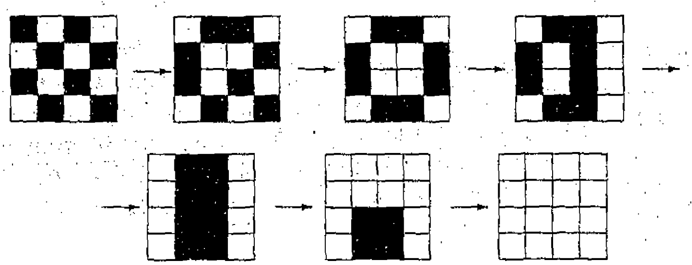
$$r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2} = \frac{2Rr(3R - 2r)}{(R + 2r)^2} + \frac{2Rr(R + 2r)}{(R + 2r)^2} = \frac{8R^2r(3R - 2r)}{(R + 2r)^2} = \frac{8r_1 r_2}{r},$$

$$(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 = \frac{8r_1 r_2}{r}, \quad \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r}}.$$

Разделив обе части последнего равенства на $\sqrt{r_1 r_2}$, получим требуемое соотношение.

3. Ответ: только при n, кратных 4.

Покажем, что если $n \vdots 4$, то клетки квадрата $n \times n$ можно, пользуясь указанной операцией, перекрасить в один цвет. Как перекрасить их в квадрате 4×4, показано на следующих рисунках.



Если же $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$), то достаточно разбить квадрат $n \times n$ на k^2 квадратов 4×4 и перекрасить, как показано выше, клетки в каждом из них.

Докажем, что если $n \not\vdots 4$, то перекрасить клетки квадрата $n \times n$ в один цвет не удастся. Условимся в дальнейшем про каждую клетку того квадрата 2×2, который перекрашивается на данном ходу, говорить, что она участвует в этом ходе.

Допустим, что за некоторое число N ходов удалось при помощи операции из условия задачи перекрасить клетки квадрата $n \times n$ в один цвет.

Пусть n — чётное число ($n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$). Рассмотрим на рис. 1 клетки, отмеченные значком „ • “, и клетки, отмеченные значком „ ○ “ (они расположены в столбцах с нечётными номерами, если считать слева направо, и одни — в строках с нечётными, а другие — в строках с чётными номерами). Число и тех и других равно нечётному числу $(2k + 1)^2$. Поскольку любой квадрат 2×2 содержит только одну клетку со значком „ • “, то в каждом ходе участвует ровно одна из них. Следовательно, совокупность всех сделанных ходов разбивается на подсовокупности, каждая из которых содержит все те ходы (и только их), в которых участвует одна и та же клетка со значком „ • “. Так как все клетки со значком „ • “ имеют

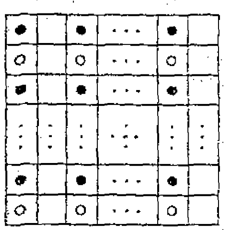


Рис. 1

один и тот же цвет и так как, не нарушая общности, можно считать, что получившийся одноцветный квадрат имеет этот же цвет, то каждая из клеток со значком „ • “ участвует в чётном числе ходов (поскольку её цвет не меняется). Значит, число N сделанных ходов чётно. Но то же верно и в отношении клеток со значком „ ∘ “ с той лишь разницей, что каждая из них должна участвовать в нечётном числе ходов (поскольку должна изменить цвет), а так как клеток со значком „ ∘ “ нечётное число, то, следовательно, число N сделанных ходов нечётно. Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение для чётного n.

Пусть теперь n нечётно ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$). Докажем вначале, что получившийся одноцветный квадрат должен иметь тот же цвет, что и угловая клетка исходного квадрата. Для этого выберем какой-либо цвет и через S обозначим число клеток этого цвета в квадрате. После каждого выполнения указанной операции величина S изменяется на чётное число. Действительно, если в перекрашиваемом квадрате 2×2 до перекраски было k клеток рассматриваемого цвета ($0 \leqslant k \leqslant 4$), то после перекраски их станет $4 - k$, и, стало быть, S изменится на $4 - 2k$. Так как в исходном квадрате $(2k + 1) \times (2k + 1)$ число клеток, имеющих цвет, отличный от цвета угловой клетки, чётно, то после любого числа ходов оно останется чётным, а значит, все клетки квадрата не могут приобрести этот цвет, поскольку их число нечётно. Поэтому, рассмотрев клетки, отмеченные на рис. 2 значком „ • “, видим, что каждая из них должна участвовать в чётном числе ходов, а так как в каждом ходе участвует ровно одна из них, то число N сделанных ходов должно быть чётным.

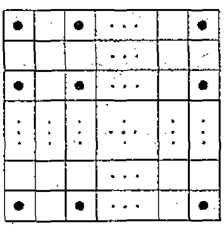


Рис. 2

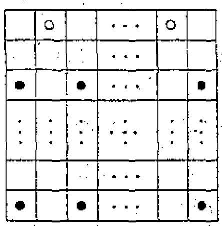


Рис. 3

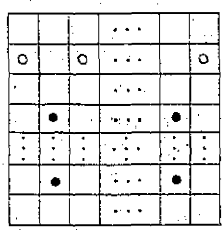


Рис. 4

Докажем теперь, что число N должно быть нечётным. Рассмотрим все клетки, отмеченные на рис. 3 (если $n = m - 1$, $m \in \mathbb{N}$) и на рис. 4 (если $n = 4m + 1$, $m \in \mathbb{N}$). На каждом из рисунков 3 и 4 клеток, отмеченных значком „ ∘ “, нечётное число (соответственно $2m - 1$ и $2m + 1$ клеток). В исходном квадрате клетки, отмеченные значком „ ∘ “, имеют цвет, отличный от цвета угловой клетки, а остальные отмеченные клетки — цвет, совпадающий с цветом угловой клетки. Поскольку любой квадрат 2×2 содержит только одну отмеченную клетку, то в каждом ходе участвует ровно одна из них. При этом клетки со значком „ ∘ “ участвуют в нечётном числе ходов (поскольку, как доказано, должны поменять цвет), а клетки со значком „ • “ — в чётном числе ходов. Следовательно, число N сделанных ходов должно быть нечётным, что противоречит доказанной ранее чётности числа N.

4. Ответ: $A = \underbrace{\underbrace{142857}\underbrace{142857}\ldots\underbrace{142857}}_{k\ \text{раз}}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Обозначим $B = \overline{a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, тогда $A = a_n 10^n + B$, $A_1 = 10B + a_n$, и $B < 10^n$. Пусть $A_1 = mA$, где m — некоторое натуральное число. Так как $10^n m \leqslant Am = A_1 < 10^{n+1}$, то $m < 10$. Тогда

$$A_1 = mA \iff 10B + a_n = m(a_n 10^n + B) \iff B = a_n \frac{10^n m - 1}{10 - m}. \quad (1)$$

Так как не все цифры числа A равны между собой, то $A \neq A_1$, т. е. $m \neq 1$.

Предположим, что $m \geqslant 5$. Тогда

$$B = a_n \frac{10^n m - 1}{10 - m} \geqslant 1 \cdot \frac{5 \cdot 10^n - 1}{10 - 5} = 10^n - \frac{1}{5} > 10^n - 1 \implies B \geqslant 10^n.$$

Противоречие. Следовательно, $1 < m < 5$. Если бы $m = 2$, то $B = a_n \dfrac{2 \cdot 10^n - 1}{8}$, а поскольку число $2 \cdot 10^n - 1$ нечётное, то $a_n \,\vdots\, 8$, т. е. $a_n = 8$. Но тогда $B \geqslant 2 \cdot 10^n - 1 > 10^n$. Противоречие. Аналогично, если $m = 4$, то $B = a_n \dfrac{4 \cdot 10^n - 1}{6}$ и $a_n \,\vdots\, 2$. Следовательно, $B \geqslant \dfrac{4 \cdot 10^n - 1}{3} > 10^n$. Противоречие.

Итак, для значения m осталась последняя возможность: $m = 3$. Тогда $B = a_n \dfrac{3 \cdot 10^n - 1}{7} < 10^n$, откуда $a_n \leqslant 2$.

Если $a_n = 1$, то $B = \dfrac{3 \cdot 10^n - 1}{7}$, и, значит, $A = \dfrac{1}{7}(10^{n+1} - 1)$.

Если $a_n = 2$, то $B = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 10^n - 1}{7}$, и, значит, $A = \dfrac{2}{7}(\cdot 10^{n+1} - 1)$.

Так как число A натуральное, то $(10^{n+1} - 1)$ должно делится на 7, а поскольку число 7 простое, то это возможно лишь при $n + 1 = 6k$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом,

$$A = \underbrace{\underbrace{142857}\underbrace{142857}\ldots\underbrace{142857}}_{k \text{ раз}} \quad \text{или} \quad A = \underbrace{\underbrace{285714}\underbrace{285714}\ldots\underbrace{285714}}_{k \text{ раз}}.$$

Однако, второй случай невозможен, поскольку в этом случае $A_4 = \overline{1\ldots} < \overline{2\ldots} = A$, т. е. A_4 не делится на A.

Первое же из приведённых чисел удовлетворяет условию, так как нетрудно проверить, что число 142857 удовлетворяет условию задачи:

$$428571 = 3 \cdot 142857,\ 285714 = 3 \cdot 142857,$$

$$857142 = 6 \cdot 142857,\ 571428 = 4 \cdot 142857,\ 714285 = 5 \cdot 142857.$$

Поэтому и в общем случае будут выполнены равенства $A_1 = 3A$, $A_2 = 2A$, $A_3 = 6A$, $A_4 = 4A$, $A_5 = 5A$.

5. Ответ: а) нет, не следует; б) да, следует.

а) Рассмотрим множества $A = \mathbb{R}$ и $B = \mathbb{R}_+$.

Включение $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+ + \alpha\mathbb{Z}$ равносильно тому, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдутся такие $y \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{Z}$ (зависящие от x), для которых $x = y + \alpha n$. Чтобы это равенство выполнялось достаточно взять $n \in \mathbb{Z}$ столь большим по абсолютной величине, чтобы разность $x - \alpha n$ была положительна; тогда $y = x - \alpha n \in \mathbb{R}_+$. Справедливость включения $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+ + \alpha\mathbb{Z}$ доказана. Включение же $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} + \alpha\mathbb{Z}$ очевидно, поскольку для любого $x \in \mathbb{R}_+$ имеет место равенство $x = x + \alpha \cdot 0$.

Следовательно, включения из условия не влекут, вообще говоря, совпадения множеств A и B.

б) Ограниченность множества B означает существование такого положительного числа M, что $|y| < M$ для любого $y \in B$.

Допустим, что существует элемент $x \in A$, такой, что $x \notin B$. Докажем, что равенство $x = y + \alpha n$ невозможно ни при каких $n \in \mathbb{Z}$ и $y \in B$, если $\alpha > |x| + M$ (т. е. включение $A \subset B + \alpha\mathbb{Z}$ выполнено не при всех $\alpha > 0$). В самом деле, если это равенство выполнено, то $n \neq 0$. Так как $x - y = \alpha n$, то $|x-y| = \alpha \cdot |n|$; отсюда и условия $n \neq 0$ получаем: $|x-y| \geqslant \alpha$. Но тогда $|x| + M < \alpha \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y| < |x| + M$. Противоречие. Следовательно, всякий элемент x, принадлежащий множеству A, принадлежит и множеству B, т. е. $A \subset B$. В частности, множество A ограничено.

Так как A ограничено, то такие же рассуждения показывают, что $B \subset A$. Значит, $A = B$.

6. Ответ: 58 баллов.

Пусть Незнайка набрал n баллов. Тогда по условию любой из остальных 29 участников набрал не меньше $n+1$ балла. Таким образом, общее количество баллов, набранных участниками олимпиады, не меньше, чем $n + 29(n+1) = 30n + 29$. С другой стороны, по любой из восьми задач количество баллов, полученных всеми участниками, равно $k(30-k)$, где k — число участников, решивших эту задачу ($0 \leqslant k \leqslant 30$). Заметим, что $k(30-k) \leqslant 15(30-15) = 15^2$. Таким образом, общее количество баллов, набранных всеми участниками по всем восьми задачам, не превосходит $8\cdot 15^2$. Имеем неравенство $30n + 29 \leqslant 8\cdot 15^2 - 30^2\cdot 2$, или $n + \dfrac{29}{30} \leqslant 60$, откуда $n \leqslant 59$.

Покажем, однако, что значение $n = 59$ не достигается. Предположив противное, мы бы получили, что по каждой из каких-либо семи задач все участники набрали бы максимально возможное число баллов $15^2 = 225$ (это значит, что любую из них решило ровно 15 участников, и, любой, решивший её, получил 15 баллов по этой задаче), а по оставшейся восьмой задаче все вместе не добрали бы 1 балл до максимально возможного, т. е. набрали бы 224 балла. Это означало бы, что эту восьмую задачу решило бы либо 14, либо 16 человек (тогда сумма набранных баллов равнялась бы $14\cdot 16 = 224$). Итак, получаем, что по любой из семи вышеназванных задач любой участник набрал либо 0, либо 15 баллов, т. е. сумма, набранная каждым участников по первым семи задачам, была бы кратна 15. Тогда любой, из решивших восьмую задачу, набрал бы количество баллов вида $15k + 14$ или $15k + 16$, в то время как при сделанном предположении ровно один участник должен набрать 59 баллов, а все остальные — по 60. Противоречие.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
15		+	+	+				+	$60-1$
		+	+	+				+	$60-1$
		+	+	+				+	$60-1$
		+	+				+	+	$60-1-1$
15	+				+	+	+		$60-1$
	+				+	+	+		$60-1$
	+				+	+	+		$60-1$
	+			+	+	+	*	*	$60+14+14$

Таким образом, $n \leqslant 58$. Покажем теперь, что участник, набравший меньше всех баллов, действительно мог набрать ровно 58 баллов. Составим таблицу 30×8 и в клетку на пересечении i-й строки и j-го столбца поставим $+$, если i-й участник решил j-ю задачу (см. рис.). Первоначально любой из участников набрал по 60 баллов. Пусть теперь после апелляции выяснилось, что 30-й участник все-таки решил задачи № 7 и № 8, что отмечено в таблице знаками „ * “. Тогда общие баллы, набранные участниками, показаны справа от таблицы. Таким образом, 15-й участник набрал ровно 58 баллов, тогда как все остальные — больше.

7. Ответ: все точки ребра A_1B_1 вез вершины B_1 и все точки ребра A_1D_1. Введём для удобства прямоугольную систему координат, взяв в качестве её начала точку A и направив оси вдоль рёбер куба, как показано на рис. 1.

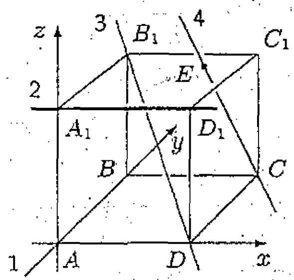


Рис. 1

Рассмотрим ортогональные проекции прямых 1, 2, 3 и 4 на фасадную и боковую грани куба (см. соответственно рис. 2 и рис. 3, на которых проекции соответствующих прямых отмечаются штрихами: фронтальная — одним штрихом, а профильная —двумя). Заметим, что любая точка и оба её изображения при этих проекциях имеют одну и ту же координату по оси z.

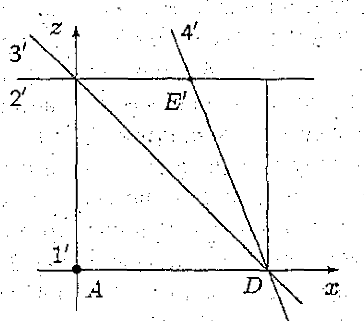


Рис. 2. Фронтальная проекция

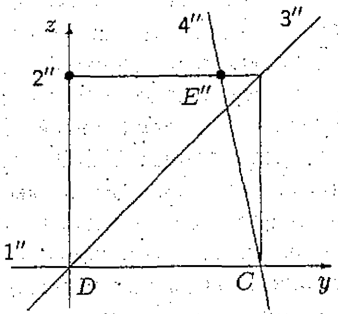


Рис. 3. Профильная проекция

Допустим, что существует некоторая прямая ℓ, пересекающая все четыре прямые 1, 2, 3 и 4. Пусть ℓ пересекает прямые 3 и 4 в точках, соответственно, X и Y, аппликаты которых H и h соответственно. Через X' и X'' (Y' и Y'') обозначим соответственно фронтальную и профильную проекции точки X (точки Y). Согласно предыдущему координаты по оси z точек X' и X'' равны H, а точек Y' и Y'' — h. Рассмотрим два случая: *1)* $H \geqslant 0$ и *2)* $H < 0$.

Поскольку прямая ℓ пересекает, в частности, прямые 1 и 3, то её фронтальная проекция — прямая ℓ' — должна проходить через точку A (фронтальную проекцию прямой 1) и точку X' и, значит, точка Y' пересечения прямых ℓ' и 4' имеет координату по оси z, не меньшую, чем H, т. е. $h \geqslant H$ (см. рис. 4).

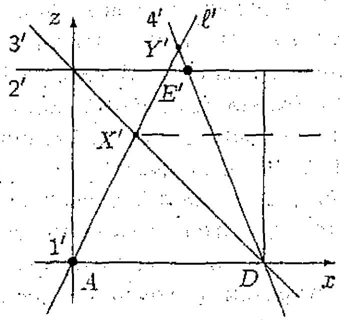


Рис. 4. Фронтальная проекция

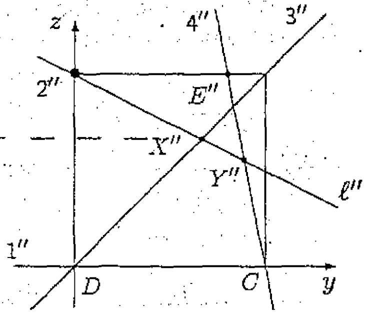


Рис. 5. Профильная проекция

Но аналогичные рассуждения для профильной проекции показывают, что точка Y'' пересечения прямых профильной проекции прямой ℓ —прямой ℓ'' — с профильной проекцией прямой 4 — прямой 4'' — имеет координату по оси z, меньшую H, т. е. $h < H$ (см. рис. 5). Точно так же получается противоречие и в предположении $H < 0$. Следовательно, прямой, пересекающей все четыре прямые 1, 2, 3 и 4, не существует, если фронтальная и горизонтальная проекции этих прямых такие, как на рис. 2 и рис. 3 (т. е. такие, что на фронтальной проекции не существует прямой, проходящей через точку A, а на на профильной проекции — прямой, проходящей через точку 2'', таких, что они пересекают соответственно прямые 3', 4' и прямые 3'' и 4'' в точках, имеющих соответственно одинаковые координаты по оси z — назовём такие проекции хорошими).

Для любой точки E грани $A_1B_1C_1D_1$, кроме точек рёбер A_1D_1 и A_1B_1, проекции будут хорошими. Значит, для них не существует прямых, пересекающих все четыре прямые. Если же точка E принадлежит ребру A_1D_1, то прмяые 2 и 4 лежат в плоскости A_1BCD_1, пересекающей прямые 1 и 3 соответственно в точке B и середине M диагонали B_1D. Прямая BM, поскольку не параллельна ни прямой 1, ни прямой 3, пересекает их.

Если точка E принадлежит ребру A_1B_1, то прямые 3 и 4 лежат в плоскости A_1B_1CD и, значит, пересекаются в некоторой точке N. Если $E \neq B$, лированное утверждение доказано. Остаётся убедиться, что можно получить остаток 0. Действительно, число $A(2^{n+1}) = 2^n(2^{n+1}+1)$ делится на 2^n. Итак, при $N = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) прав Том.

Пусть теперь число N не является степенью двойки, т. е. $N = 2^n q$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, а q — натуральное нечётное число $\geqslant 3$. Будем рассматривать остатки от деления чисел $A(i)$ на q. Числа $A(i)$ и $A(i+q)$ дают при делении на q одинаковые остатки, поскольку их разность $A(i+q) - A(i) = \dfrac{q(q+2k+1)}{2}$ делится на q в силу нечётности q. Докажем теперь, что существует такое m ($1 \leqslant m \leqslant q-1$), которое не является остатком от деления ни одного из чисел $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, на q. Для этого рассмотрим q чисел $A(1)$, $A(2)$, $\ldots$, $A(q)$. Остатки при делении на q чисел $A(q-1)$ и $A(q)$ равны, как легко видеть, нулю. Оставшиеся $q-2$ чисел $A(1)$, $A(2)$, $\ldots$, $A(q-2)$ могут дать не более $q-2$ различных остатков при делении на q. Поэтому существует такое m ($1 \leqslant m \leqslant q-1$), которое не является остатком при делении на q ни одного из чисел $A(1)$, $\ldots$, $A(q)$, а значит, ни одного из чисел $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, так как остатки при делении на q чисел $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, как доказано, периодически повторяются с периодом q.

Остаётся заметить, что число m не может быть остатком от деления чисел $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, на N. В самом деле, если бы для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имело место равенство $A(k) = l \cdot N + m$ ($l \in \mathbb{N}$), то поскольку $N \vdots q$, это означало бы, что остаток от деления $A(k)$ на q равен m, что, как доказано, невозможно.

Отметим, что в случае, когда N — не степень двойки, рассуждения бы не изменились, если бы в качестве q мы взяли любой другой нечётный отличный от 1 делитель числа N.

то точка N не лежит ни в плоскости верхней, ни в плоскости нижней граней куба (т. е. плоскостям, проходящим через одну из прямых 1 и 2 параллельно другой из них), а значит, через неё проходит прямая ℓ, пересекающая прямые 1 и 2. Если же $E = B_1$, то поскольку прямая 1 параллельна плоскости A_1B_1CD, прямая ℓ должна проходить через точку B_1 и некоторую точку прямой 1, т. е. не может пересекать прямую 2.

Эти же выводы, если точка E принадлежит рёбрам A_1D_1 или A_1B_1, столь же легко получить, рассмотрев фронтальную и профильную проекции.

8. Занумеруем доски забора: на доске, предыдущей первой из покрашенных Томом досок, запишем число 0, на первой покрашенной Томом доске запишем число 1 и на следующих за ней по часовой стрелке досках — последовательно числа 2, 3, ..., и т. д. — до числа $N-1$ включительно (эти числа назовём номерами досок). Если продолжить пересчёт досок дальше, продвигаясь по ходу часовой стрелки, то на доске с номером i будут записаны числа $i+N$, $i+2N$, ... (т. е. все натуральные числа, дающие при делении на N остаток i).

Согласно условию задачи на k-й покрашенной Томом доске должно быть записано число $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ (для удобства число $\dfrac{k(k+1)}{2}$ обозначим через $A(k)$). Значит, k-я покрашенная Томом доска — это доска, номер которой совпадает с остатком от деления числа $A(k)$ на N. Стало быть, если среди остатков от деления чисел $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, на N встречаются все числа от 0 до $N-1$, то прав Том, а если нет — права тётя Полли.

Пусть N является степенью двойки, т. е. $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Докажем следующее утверждение: среди остатков от деления на 2^n чисел $A(1)$, $A(2)$, ..., $A(2^n-1)$ встречаются все положительные остатки (т. е. остатки от 1 до 2^n-1). Действительно, среди остатков не может быть нуля, поскольку в числе $A(i) = \dfrac{i(i+1)}{2}$ ($1 \leqslant i \leqslant 2^n-1$) один из сомножителей i или $i+1$ нечётный, а другой — не больше 2^n; значит, $A(i)$ не делится на 2^n. Далее, любые два числа $A(i)$ и $A(j)$ ($1 \leqslant i, j \leqslant 2^n-1$ и $i > j$) дают разные остатки при делении на 2^n. В самом деле, рассмотрим разность $A(i)-A(j) = \dfrac{(i-j)(i+j+1)}{2}$. Один из её сомножителей $i-j$ или $i+j+1$ нечётный, а другой — не больше $2^{n+1}-4$. Поэтому эта разность не делится на 2^n, а значит, числа $A(i)$ и $A(j)$ дают при делении на 2^n разные (положительные, как доказано выше) остатки. Так как чисел $A(1)$, ..., $A(2^n-1)$, как и положительных остатков при делении на 2^n, ровно 2^n-1, то сформу-