Министерство образования Республики Беларусь

« LI »

Белорусская республиканская математическая олимпиада школьников

Барановичи 2001

УДК 373.167.1:51

Приведены условия и решения задач заключительного тура 51 Белорусской республиканской олимпиады школьников.

Список авторов задач

1. Базылев Д. (10.1)
2. Барабанов Е.А. (7.1; 7.2; 8.4; 11.5)
3. Берник В.И. (8.7; 8.8; 9.6)
4. Бодягин Д. (10.6)
5. Воронович И.И. (7.1; 7.2; 7.5; 8.6; 9.3; 11.1; 11.5)
6. Жук И.К. (9.1; 10.3; 11.7)
7. Змейков Д. (7.3; 10.2; 10.7; 11.2)
8. Каскевич В.И. (7.1; 7.8; 8.2; 8.5; 9.1; 10.4; 11.4)
9. Кохан А. (9.8; 11.6; 11.8)
10. Лосев И. (10.8)
11. Мазаник С.А. (7.4; 7.6; 7.7; 8.1; 9.4)
12. Менскийй У. (7.4; 8.3; 9.4)
13. Миротин А.Р. (10.5)
14. Соболевский С. (9.2)
15. Уснич А. (9.7)
16. Ших С. (11.3)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили:
Е.А. Барабанов, И.И. Воронович,
В.И. Каскевич, С.А. Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.1. На некотором острове у каждого аборигена есть хотя бы один знакомый. Каждый из аборигенов либо лжец, то есть всегда лжёт, либо правдивый, то есть всегда говорит правду. Вновь назначенный губернатор острова решил выяснить, сколько на острове правдивых, и с этой целью провёл опрос. Каждый абориген сказал: „Среди моих знакомых лжецов больше." Заподозрив одного из аборигенов во лжи, губернатор приказал его казнить, после чего снова провёл такой же опрос. На этот раз каждый абориген сказал: „Среди моих знакомых лжецов меньше."

Помогите губернатору определить, сколько правдивых аборигенов было на острове до казни.

7.2. Для некоторых семи различных натуральных чисел оказалось, что если выписать различные модули их всевозможных попарных разностей, то получится ряд из десяти последовательных натуральных чисел.

а) Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из этих семи чисел равна 10.

б) Приведите пример семи чисел, удовлетворяющих условию задачи.

7.3. На клетчатой доске 100×100 клеточек выложено 99 квадратных плиток со сторонами $1, 2, 3, \ldots, 98, 99$. (Края плиток идут по сторонам клеток доски.)

Докажите, что хотя бы одну клетку доски накрывают не менее 50 плиток.

7.4. На математической олимпиаде школьникам были предложены 3 задачи, каждая из которых оценивалась целым числом баллов от 0 до 3. После проверки работ выяснилось, что никакие два школьника не набрали одинакового числа баллов более чем по одной задаче.

Какое наибольшее число школьников могло участвовать в этой олимпиаде?

7.5. 28 февраля 2001 года Вася вспомнил, что 26 марта этого года начнётся Республиканская олимпиада школьников по математике. Поэтому, чтобы хорошо выступить на олимпиаде, он с 1-го по 25-е марта включительно начал активно решать задачи. Каждый день Вася решал не более 10 задач, но если в какой-то день он решал больше 7 задач, то следующие 2 дня он решал не более 5 задач в день.

Какое наибольшее число задач мог решить Вася за это время?

7.6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол при вершине A равен $30°$. На стороне AB отмечена точка Q, отличная от B, а на медиане AD отмечена точка P, так, что $PC = PQ$.

Найдите величину угла PQC.

7.7. Докажите, что при всех допустимых значениях чисел x, y и z справедливо равенство

$$\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} = -1.$$

7.8. Десять пиратов захватили сундук золотых монет и стали делить добычу. Сначала они наудачу разложили все монеты на 10 кучек и распределили кучки между собой. После того как каждый пересчитал свою долю, оказалось, что всем достались разные количества монет. В частности, главарю досталась 2001 монета, а боцману — всего 1000. Тогда решено было перераспределять монеты по следующему правилу. Сначала тот, у кого меньше всего монет, перекладывает в свою кучку по одной монете из всех остальных кучек. После этого тот, у кого меньше всего монет (или один из тех, если наименьшее число монет оказалось сразу у нескольких пиратов), проделывает такую же процедуру, и т. д.

Может ли случиться, что в результате такого передела число монет во всех кучках когда-нибудь станет равным? (Ответ обоснуйте.)

8 класс

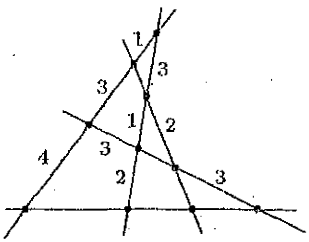
8.1. Найдите длину медианы равнобедренного треугольника, если длины двух других его медиан равны a и a^2+1, где a — некоторое положительное число.

8.2. На некотором острове живут аборигены. Каждый из аборигенов либо лжец, то есть всегда лжёт, либо правдивый, то есть всегда говорит правду. Все правдивые знакомы между собой, и все лжецы также знакомы между собой. Существуют правдивые, знакомые со лжецами. Каждый из аборигенов на своём сайте в интернете указал, что среди его знакомых лжецов больше, чем правдивых.

Докажите, что на острове все знакомы друг с другом.

8.3. Какое наибольшее количество четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 так, чтобы никакие два числа не совпадали в двух или более разрядах?

8.4. Пять прямых пересекаются так, как показано на рисунке.



Могут ли отрезки, получившиеся при пересечении, иметь указанные на рисунке длины?

8.5. В шайке пиратов не более 50 человек. Однажды пираты захватили сундук золотых монет и стали делить добычу. Сначала они наудачу разложили произвольно все монеты на 10 кучек и распределили кучки между собой. После того как каждый пересчитал свою долю, оказалось, что всем достались разные количества монет. В частности, главарь получил 2001 монету, а боцман — всего 1000. Тогда решено было производить передел по следующему правилу. Сначала тот, у кого меньше всего монет (или один из тех, у кого меньше всего монет, если наименьшее число монет оказалось сразу у нескольких пиратов), перекладывает в свою кучку по одной монете из всех остальных кучек. После этого снова тот, у кого меньше всего монет, проделывает такую же процедуру, и т.д. Ко всеобщему удовольствию, после какого-то числа таких операций все кучки стали содержать одинаковое количество монет.

Сколько пиратов было в шайке?

8.6. В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен 60^0. На сторонах AD, DC и диагонали AC отмечены точки F, H и G соответственно так, что четырёхугольник $DFGH$ является параллелограммом. Докажите, что треугольник FBH равносторонний.

8.7. Докажите, что существуют такие натуральные числа m и n, для которых

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2001}\right| < 10^{-8}.$$

8.8. Для натуральных чисел $a_1, \ldots, a_{100}$ вычисляются всевозможные попарные произведения, суммы и модули разностей.

Какое максимальное число различных нечётных чисел может быть получено?

9 класс

9.1. Докажите, что для любых действительных положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

9.2. Решите в натуральных числах уравнение

$$a! + 2001 \cdot b! = c!$$

9.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На лучах BA и DC отмечены соответственно точки C_1 и A_1 так, что $DA = DA_1$ и $BC = BC_1$.

Докажите, что диагональ BD делит отрезок A_1C_1 пополам.

9.4. На математической олимпиаде школьникам были предложены 4 задачи, каждая из которых оценивалась целым числом баллов от 0 до 4. После проверки работ выяснилось, что никакие два школьника не набрали одинакового числа баллов более чем по одной задаче.

Какое наибольшее количество школьников могло участвовать в олимпиаде?

9.5. 10 пиратов захватили 10 000 золотых монет и стали делить добычу. Сначала они наудачу разложили все монеты на 10 кучек и распределили кучки между собой. Но после того как каждый пересчитал свою долю, оказалось, что всем достались разные количества монет. Тогда решено было производить передел по следующему правилу. Сначала тот, у кого меньше всего монет, перекладывает в свою кучку по одной монете из всех остальных кучек. После этого снова тот, у кого меньше всего монет, проделывает такую же процедуру, и т.д.

Докажите, что рано или поздно количества монет в каких-то кучках станут равными.

9.6. Докажите, что существуют такие натуральные числа m и n, для которых

$$\left|\sqrt{2001} + \sqrt{n} - \sqrt{m}\right| < 10^{-9}.$$

9.7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через точку P окружности S_2, лежащую внутри S_1, проведена хорда AD окружности S_1. Хорда BC окружности S_1 проходит через точку P. Прямая, проходящая через точки D и B, пересекает окружность S_2 в точке Q, отличной от точки B. Пусть P_1 — точка, симметричная точке P относительно точки B.

Докажите, что CD является диаметром окружности S_1 тогда и только тогда, когда точки D, C, Q и P_1 лежат на одной окружности.

9.8. На клетчатой доске отмечен квадрат 3×3 клетки. В каждой клетке квадрата поставлена стрелка, указывающая на одну из соседних с ней по стороне клеток доски. В одной из клеток квадрата находится муха. Каждый год муха переползает в соседнюю клетку, на которую указывает стрелка, причём сразу после того, как муха покидает клетку, эта стрелка поворачивается на 90^0 против хода часовой стрелки. Какое наибольшее число лет муха может ползать внутри данного квадрата, прежде чем покинет его пределы? (От начального момента до первого хода мухи проходит год.)

10 класс

10.1. Найдите остаток от деления числа

$$1! \cdot 5 + 2! \cdot 11 + \ldots + k! \cdot (k^2 + 3k + 1) + \ldots + 100! \cdot 10301$$

на 2004.

10.2. Можно ли расставить по окружности 100 натуральных чисел, не все из которых равны 1, так, чтобы в любой тройке подряд стоящих чисел одно равнялось произведению двух других чисел этой тройки?

10.3. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C отмечена точка X, такая, что $\angle XAB = \angle XBC$. Докажите, что $AC \cdot BC^2 \leq AC \cdot CX^2 + CX \cdot AB^2$.

10.4. Для проведения олимпиады жюри составляет комплекты задач — по 4 задачи в каждом. Разные комплекты могут иметь одинаковые задачи, но не более одной.

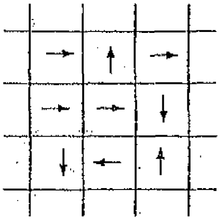
Какое наибольшее число таких комплектов можно составить из 13 задач?

10.5. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{1-x_1}{1-x_2y_3} \cdot \frac{1-x_2}{1-x_3y_1} \cdot \frac{1-x_3}{1-x_1y_2},$$

если переменные x_1, x_2, x_3 принадлежат промежутку $[-1;1]$, а переменные y_1, y_2, y_3 — промежутку $[0;1)$.

10.6. Имеется бесконечное клетчатое поле, в центре каждой клетки которого стоит стрелка, перпендикулярная одной из её сторон (см. рис.). На одну из клеток ставят робота. Робот начинает двигаться из клетки в клетку по следующему правилу. На каждом ходу он переходит в соседнюю клетку, на которую указывает стрелка, причём сразу после того, как робот покидает клетку, эта стрелка поворачивается на 90^0 против хода часовой стрелки.



Можно ли расставить стрелки так, чтобы робот не смог никогда выйти за пределы какого-либо квадрата?

10.7. Натуральное число k назовём *хорошим*, если существует такое k-значное натуральное число N, что последние k цифр числа $2N$ и первые k цифр числа $3N$ совпадают (т. е. i-ая с начала цифра у числа $3N$ и $k-i+1$-ая с конца цифра у числа $2N$ одинаковые, $1 \le i \le k$).

Найдите сумму всех хороших чисел между от 1 до 100 включительно.

10.8. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Продолжения стороны AB за точку B и стороны DC за точку C пересекаются в точке E, а продолжения стороны DA за точку A и стороны CB за точку B — в точке F. Через I_1, I_2 и I_3 обозначим центры окружностей, вписанных в треугольники AFB, BEC и ABC соответственно. Пусть прямая I_1I_3 пересекает прямые EA и ED в точках K и L соответственно, а прямая I_2I_3 — прямые FC и FD в точках M и N соответственно.

Докажите, что $EK = EL$ тогда и только тогда, когда $FM = FN$.

11 класс

11.1. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$, а на ней отмечены различные точки A, B и C, причём точка B расположена левее, а точка C — правее остальных. Точка N на отрезке BC такова, что прямая AN параллельна оси ординат. Пусть S_1 и S_2

— площади треугольников ABN и ACN соответственно. Найдите длину отрезка AN.

11.2. Докажите, что для любого натурального n и любого действительного положительного a выполняется неравенство

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right).$$

11.3. На прямой l расположены точки A, B и N в указанном порядке. Для произвольного угла $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ проводятся следующие построения. В одной полуплоскости относительно l выбираются точки C и D такие, что N, C и D лежат на одной прямой, $\angle NAD = \angle NBC = \alpha$ и точки A, B, C и D принадлежат одной окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей получающихся четырёхугольников $ABCD$, когда α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

11.4. Для проведения олимпиады жюри составляет комплекты задач — по 4 задачи в каждом. Разные комплекты могут иметь одинаковые задачи, но не более одной.

Какое наименьшее число задач необходимо, чтобы составить 10 таких комплектов?

11.5. а) Дана возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n), $n \in \mathbb{N}$. Число a_k из этой последовательности назовём *забавным*, если его можно представить в виде суммы каких-либо других (не обязательно различных) членов последовательности.

Докажите, что начиная с некоторого номера все члены последовательности забавные.

б) Верно ли утверждение п. а), если возрастающая последовательность (a_n) — это последовательность рациональных чисел?

11.6. На клетчатой доске отмечен квадрат $(2n-1) \times (2n-1)$ клеток. В каждой клетке квадрата поставлена стрелка, указывающая на одну из соседних с ней по стороне клеток доски. В одной из клеток квадрата находится муха. Каждый год муха переползает в соседнюю клетку, на которую указывает стрелка, причём сразу после того, как муха покидает клетку, эта стрелка поворачивается на 90^0 против хода часовой стрелки. Докажите, что не более чем через $2^{3n-1}(n-1)!-3$ лет муха выползет за пределы квадрата. (По определению $0!=1$.)

11.7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S_1; окружность S_2 проходит через вершину D, точку O пересечения диагоналей четырёхугольника и пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N. Прямые OM и AB пересекаются в точке R, а прямые ON и BC— в точке T; при этом R и T лежат в одной полуплоскости с точкой A относительно прямой BD. Докажите, что точки O, R, T и B лежат на одной окружности.

11.8. В некотором племени n туземцев, каждые двое из них либо дружат, либо враждуют. Однажды вождь решил, чтобы каждый туземец (включая и самого вождя) носил ожерелье из камней, причём чтобы у любых двух дружащих туземцев нашлось хотя бы по одному камню одинакового вида, а у любых двух враждующих не было камней одинакового вида. (Не исключено, что у кого-то в ожерелье может не оказаться ни одного камня.)

а) Докажите, что это можно сделать.

б) Какое наименьшее число видов камней заведомо достаточно, чтобы сделать это?

РЕШЕНИЯ

7 класс

7.1. Ответ: 1.

На острове до казни был хотя бы один правдивый абориген. Действительно, если бы все аборигены были лжецами, то тогда их ответы при первом опросе были бы правдивыми, что невозможно.

Рассмотрим правдивого аборигена. До казни у него, действительно, знакомых лжецов было больше (поскольку сказанное им является правдой). Если он не был казнён, то число его знакомых лжецов либо не изменилось (в случае, если был казнён его знакомый правдивый абориген или абориген, с которым он не знаком), либо уменьшилось на 1 (в случае, если был казнён его знакомый лжец). Видим, что, при любом исходе, после казни число его знакомых лжецов будет не меньше числа его знакомых правдивых аборигенов. Но это невозможно, поскольку он при втором опросе должен был ответить, что у него знакомых лжецов меньше. Следовательно, правдивый абориген был казён и, следовательно, он был до казни одним-единственным правдивым аборигеном на острове.

7.2. Ответ: б) например, 1, 3, 4, 8, 9, 10, 11.

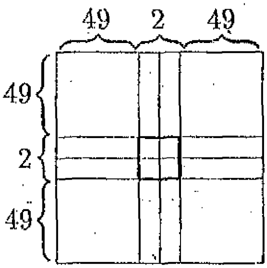
а) Пусть $a_1, \ldots, a_7$ — заданные семь различных натуральных чисел. Без нарушения общности рассуждений считаем, что $a_1 < \ldots$ $\ldots < a_7$. Тогда число $b = a_7 - a_1$ — наибольшее среди модулей их попарных разностей, и, значит, остальные из этих модулей (поскольку согласно условию они образуют десять последовательных натуральных чисел) равны $b-1$, $b-2$, $\ldots$, $b-9$. Значит, разность между соседними из чисел $a_1 < \ldots < a_7$ не менее $b-9$. Поэтому

$$b = a_7 - a_1 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + \ldots + (a_2 - a_1) \geq 6 \cdot (b-9),$$

т. е. $b \geq 6 \cdot (b-9)$, откуда $5b \leq 54$, а поскольку b натуральное, то $b \leq 10$. С другой стороны, ясно, что b не может быть строго меньше 10, так как тогда различных модулей попарных разностей было бы также меньше 10, что неверно. Поэтому $b = 10$.

б) Рассмотрим шесть чисел: 1, 4, 8, 9, 10, 11. Легко непосредственно проверить, что модули попарных разностей уже́ этих шести чисел составляют десять последовательных чисел от 1 до 10. Теперь в качестве седьмого числа можно взять любую цифру, отличную от записанных; например, 3.

7.3. Рассмотрим квадратик из четырёх клеток, расположенный в самом центре данной доски (см. рис.). Понятно, что плитка со стороной 50 накрывает по крайней мере одну из клеток этого квадрата. Кроме того, эту же клетку накрывают ещё 49 плиток со сторонами 51, 52, ..., 99. Поэтому эта клетка накрыта не менее чем 50 плитками.



7.4. Ответ: 16.

Легко видеть, что не более четырёх участников могли набрать одинаковое число баллов за первую задачу. Действительно, если бы таких участников было более четырёх, то не менее двух из них набрало бы за вторую задачу одинаковое число баллов (так как существует всего лишь четыре разные оценки за каждую задачу: 0, 1, 2 и 3 балла) и, следовательно, эти два участника набрали бы одинаковое число баллов как по первой, так и по второй задаче, что противоречит условию. Таким образом, за первую задачу не более 4-х участников набрали 0 баллов, не более 4-х участников — 1 балл, не более 4-х участников — 2 балла и, наконец, не более 4-х участников — 3 балла (других баллов согласно условию за задачу участники набрать не могли). Значит, общее число участников олимпиады не более $4 \cdot 4 = 16$. Следующий пример показывает, что в олимпиаде, действительно, могли принять участие 16 школьников.

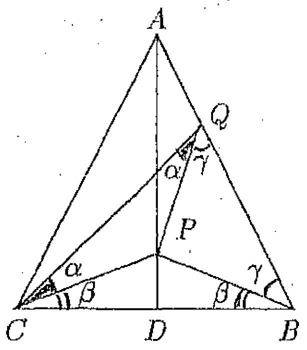
№ участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Задача 1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
Задача 2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Задача 3	0	1	2	3	1	2	3	0	2	3	0	1	3	0	1	2

7.5. Ответ : 178 задач.

Заметим, что если в один из каких-либо трёх последовательных дней Вася решил больше семи задач, то в остальные два дня он решал не более чем по пять задач, то есть в сумме за все три дня он решил не более $10 + 2 \cdot 5 = 20$ задач. Если же он ни в один из любых трёх последовательных дней не решал более семи задач, то в сумме за эти три дня он решил не более 21 задачи. В любом случае, за всякие три последовательных дня Вася решил не более 21 задачи. Период с 1 по 24 марта разобьём на 8 троек последовательных дней. Тогда за этот период Вася решил не более $8 \cdot 21 = 168$ задач. В оставшийся день 25 марта он решил не более 10 задач, так что общее число решённых задач не превосходит 178. С другой стороны, Вася действительно мог за указанный период решить 178 задач — для этого он мог решать по 7 задач в каждый из дней с 1 по 24 марта и 10 задач 25 марта.

7.6. Ответ :15^0.

Так как по условию $PC = PQ$, то $\triangle PCQ$ является равнобедренным с основанием CQ; поэтому обозначим $\alpha = \angle CQP = \angle PCQ$ (искомый угол). Соединим точки P и B. Поскольку $AD \perp CB$ (как медиана, проведённая к основанию, в равнобедренном треугольнике), то треугольники PDB и PDC являются прямоугольными. Треугольники PDB и PDC равны (по двум катетам). Поэтому обозначим $\beta = \angle PBC = \angle PCB$ и поэтому $PB = PC$, а значит, $\triangle PQB$ равнобедренный ($PQ = PB$). Обозначим поэтому $\gamma = \angle PQB = \angle PBQ$. Видим (см. рис.), что сумма углов $\triangle BCQ$ равна $2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$, т. е. $\alpha = 90° - (\beta + \gamma)$, а поскольку угол при основании $\triangle ABC$ равен $\beta + \gamma = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$, то, следовательно, $\alpha = 90° - 75° = 15°$.



7.7. Приведём выражение к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{x(y+z)(z-y)+y(z+x)(x-z)+z(x+y)(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{x(z^2-y^2)+y(x^2-z^2)+z(y^2-x^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{x(z^2-y^2)+yx^2-yz^2+zy^2-zx^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{x(z^2-y^2)+(yx^2-zx^2)-(yz^2-zy^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{x(z-y)(z+y)+(y-z)x^2-yz(z-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{(y-z)(x^2-x(z+y)+yz)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(y-z)(x-y)(x-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = -1.$$

7.8. Ответ: нет, не может.

После одной операции перекладывания монет из всех кучек в меньшую число монет в этой кучке увеличивается на 9, а в каждой из остальных кучек — уменьшается на 1. Поэтому если взять произвольные две кучки, то разность между количествами монет в них либо не меняется, либо меняется ровно на 10. Следовательно, если первоначально эта разность в каких-то кучках не являлась кратной 10, то она в результате передела никогда не уменьшится до нуля и, тем самым, эти кучки не могут уравняться. Согласно условию задачи, главарь пиратов первоначально получил на 1001 монету больше, чем боцман. Эта разность не делится на 10 и, значит, доли главаря и боцмана в процессе передела никогда не смогут стать равными.

8 класс

8.1. Ответ: a^2+1.

Нетрудно показать, что для медиан треугольника выполняется неравенство, аналогичное неравенству треугольника, т. е., если m_1, m_2 и m_3 — длины медиан, то $m_1+m_2 > m_3$, $m_1+m_3 > m_2$, $m_2+m_3 >$

m_1. Поскольку в равнобедренном треугольнике две его медианы равны, то либо $m_1 = m_2 = a, m_3 = a^2+1$, либо $m_1 = m_2 = a^2+1, m_3 = a$. Но так как для любого положительного a выполнено неравенство $a^2 + 1 \geq 2a$, то первый из приведённых случаев невозможен. Следовательно, длина третьей медианы равна $a^2 + 1$. Нетрудно заметить, что равнобедренный треугольник единственным образом восстанавливается по своим медианам.

8.2. Предположим, что среди аборигенов n правдивых и m лжецов. Каждый правдивый имеет $n - 1$ знакомого среди правдивых, а поскольку знакомых лжецов у него действительно больше (ведь, будучи правдивым, он всегда говорит правду), то и число всех лжецов $m > n - 1$. У каждого лжеца $m - 1$ знакомый среди лжецов. А поскольку лжец всегда лжет, то из его заявления в интернете следует, что у него не менее, чем $m - 1$ знакомых и среди правдивых. Поэтому число всех правдивых $n \geq m - 1$.

Из полученных соотношений следует, что $n \leq m \leq n + 1$, т.е. либо лжецов на острове ровно столько же, сколько правдивых, либо их на 1 больше, чем правдивых. В первом случае $(m = n)$ каждый правдивый знаком с каждым лгуном, иначе число знакомых лгунов у него не более $n - 1$, т.е. не более числа знакомых правдивых, что противоречит его высказыванию. Во втором случае $(m = n + 1)$ каждый лжец имеет n знакомых лжецов и, значит, обязан иметь не менее n знакомых правдивых, тем самым знаком с ними. В обоих случаях каждый правдивый знаком с каждым лжецом и наоборот. Значит, каждый знаком с каждым, что и требовалось доказать.

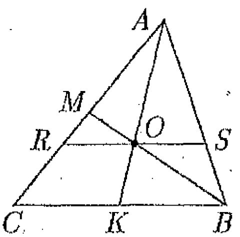
8.3. Ответ: 9.

Предположим, что таких чисел 10 или более. Так как каждая цифра числа (в том числе, первая) может принимать только одно из трёх различных значений, то найдутся по крайней мере 4 числа у которых совпадают первые цифры. Рассмотрим вторые цифры этих чисел. Поскольку чисел не менее четырёх, то среди них найдутся по крайней мере два с одинаковыми вторыми цифрами. Тем самым, у этих двух чисел будут совпадать первые две цифры, что противоречит условию задачи. Таким образом, набор чисел с требуемыми условиями состоит не более, чем из 9 чисел.

Покажем, что 9 чисел составить можно. Например, это могут быть числа: 1111, 1223, 1332, 2122, 2231, 2313, 3133, 3212.

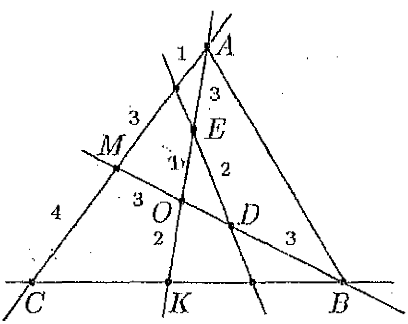
8.4. Ответ: нет, не могут.

Докажем вначале следующее простое утверждение: *если BM — медиана $\triangle ABC$, K — точка на стороне BC, и O — точка пересечения AK с медианой BM, такая, что $AO : OK = 2:1$, то O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.*



Действительно, проведём через точку O прямую, параллельную BC. Пусть она пересекает стороны AC и AB в точках R и S соответственно. Так как M — середина стороны AC, то обозначим $x = AM = MC$. Так как по теореме Фалеса $\frac{AR}{RC} = \frac{AO}{OK} = 2$, то обозначим $RC = y$, а $AR = 2y$. Тогда имеем: $x = MC = MR + RC = MR + y$ и $2y = AR = AM + MR = x + MR$. Из этих равенств находим, что $3y = 2x$, т. е. $MR = x - y = \frac{3}{2}y - y = \frac{y}{2}$. Значит, $\frac{MR}{RC} = \frac{1}{2}$. Поэтому по теореме Фалеса $\frac{BO}{OM} = \frac{RC}{MR} = 2$, т. е., поскольку BM — медиана, точка O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

Перейдём непосредственно к решению задачи. Обозначим некоторые точки пересечения заданных прямых так, как показано на рисунке.

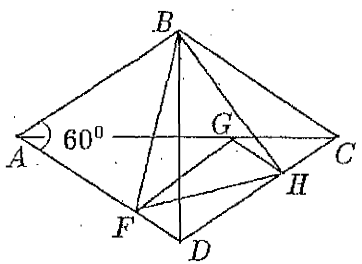


Так как согласно рисунку $AM = MC$, то BM — медиана $\triangle ABC$. Далее, согласно рисунку $AO = 4$, а $OK = 2$, т. е. $AO : OK = 2:1$. Следовательно, в силу доказанного в начале задачи утверждения, O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Значит, $BO = 2 \cdot MO = 6$, поэтому $OD = BO - BD = 6 - 3 = 3$. Тогда в $\triangle OED$ сторона $OD = 3$ равна сумме двух остальных его сторон $EO = 1$ и $ED = 2$, чего быть не может. Стало быть, отрезки, получившиеся в результате пересечения прямых из рисунка, не могут иметь указанные в нём длины.

8.5. Ответ : 11.

Пусть в шайке было n пиратов. После одной операции перекладывания монет из всех кучек в меньшую число монет в этой кучке увеличивается на $n-1$, а в каждой из остальных кучек — уменьшается на 1. Поэтому если взять произвольные две кучки, то разность между количествами монет в них либо не меняется, либо меняется ровно на n. Следовательно, если первоначально эта разность в каких-то кучках не делится на n, то она в результате передела никогда не уменьшится до нуля и, тем самым, эти кучки не смогут уравняться. По условию главарь первоначально получил на 1001 монету больше, чем боцман, и в результате передела все кучки (в частности, главаря и боцмана) уравнялись. Значит, 1001 делится на n. Поскольку $1001 = 11 \cdot 91$, причем 11 и 91 – простые числа, то ввиду дополнительных данных из условия задачи $n = 11$.

8.6. Так как $GH \parallel AD$, то $\angle HGC = \angle DAC = \angle ACD = 30^0$. Поэтому треугольник GHC равнобедренный и, следовательно, $GH = HC$. Стало быть, $FD = HC$. Далее, диагональ BD разбивает данный ромб на два равносторонних треугольника; в частности, $BD = DC$ и $\angle BDF = \angle BCD (= 60^0)$. Таким образом, треугольники BDF и BCH равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $BF = BH$, то есть треугольник FBH равнобедренный. Заметим также, что $\angle FBD = \angle HBC$, поэтому угол при вершине у $\triangle FBH$ равен $\angle FBD + \angle DBH = \angle HBC = \angle DBH = 60^0$. Следовательно, треугольник FBH равносторонний.



8.7. Положим $m_0 = 1$ и $n_0 = 1000$. Тогда очевидно, что $\delta = \dfrac{m_0^2}{n_0^3} <$ 10^{-8}. Поскольку $\delta > 0$, то существует такое натуральное число k, что $k\delta \le \sqrt{2001} < (k+1)\delta$. Тогда $0 \le \sqrt{2001} - k\delta < \delta$, откуда $\left|\sqrt{2001} - k\delta\right| < \delta < 10^{-8}$. Положим $m = k^2 m_0$ и $n = kn_0$. Тогда

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2001}\right| = \left|\sqrt{2001} - \frac{(k^2m_0)^2}{(kn_0)^3}\right| =$$

$$= \left|\sqrt{2001} - k\frac{m_0^2}{n_0^3}\right| = \left|\sqrt{2001} - k\delta\right| < 10^{-8},$$

что и требовалось доказать.

8.8. Ответ : 6633.

Пусть среди данных ста чисел m чисел являются нечётными, а остальные $(100-m)$ чисел — чётные. Тогда различных нечётных попарных произведений будет не более $\dfrac{m(m-1)}{2}$, различных нечётных попарных сумм будет не более $m(100-m)$, и различных нечётных попарных модулей разностей будет не более $m(100-m)$. Таким образом, всего может быть получено не более

$$f(m) = \frac{m(m-1)}{2} + 2m(m-1) = \frac{-3m^2 + 399m}{2}$$

различных нечётных чисел. Нетрудно убедиться, что максимальное значение $f(m)$ на промежутке $[0, 100]$ для натуральных значений m достигается при $m = 66$ или $m = 67$, при этом

$$f(66) = f(67) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 66 \cdot 67 = 6633.$$

Покажем, что действительно можно выбрать 100 натуральных чисел так, чтобы получить указанное число различных нечётных чисел. Заметим, что для произвольных 34 нечётных и 66 чётных чисел количество нечётных чисел среди их всевозможных попарных произведений, сумм и модулей разностей как раз $\dfrac{66(66-1)}{2} +$ $+2\cdot 66(100-66) = 6633$. Поэтому остаётся лишь подобрать 34 чётных и 66 нечётных чисел так, чтобы эти попарные произведения, суммы и модули разностей все были различными. Обозначим через b_i,

$i = 1, \dots, 66$, нечётные, а через c_j, $j = 1, \dots, 34$, чётные числа из необходимых нам ста натуральных чисел. Выберем произвольным образом 34 различных чётных числа: $c_1 < \dots < c_{34}$. Положим $b_1 > c_{34}$ и $b_2 > b_1 + 2c_{34}$. Тогда

$$0 < b_1 - c_{34} < \dots < b_1 - c_1 < b_1 + c_1 < \dots < b_1 + c_{34} < b_2 - c_{34} < \dots <$$

$$< b_2 - c_1 < b_2 + c_1 < \dots < b_2 + c_{34} < b_1 b_2.$$

Таким образом, все выписанные нечётные числа являются различными.

Предположим, что нами уже построены числа $b_1 < b_2 < \dots < b_m$. Выберем следующее число b_{m+1} так, чтобы выполнялось неравенство $b_m b_{m-1} < b_{m+1} - c_{34}$. Тогда легко проверить, что будут выполнены и неравенства

$$b_m b_{m-1} < b_{m+1} - c_{34} < \dots < b_{m+1} - c_1 < b_{m+1} + c_1 < \dots < b_{m+1} + c_{34} <$$

$$< b_{m+1} b_1 < \dots < b_{m+1} b_m,$$

которые и гарантируют, что все нечётные попарные произведения, суммы и модули разностей будут различными. Заметим, что неравенство $b_{m+1} + c_{34} < b_{m+1} b_1$ следует из неравенств $b_1 \ge 3$ и $b_{m+1} > c_{34}$, поскольку $b_{m+1} b_1 > 2b_{m+1} > b_{m+1} + c_{34}$. Таким образом нами будут построены все требуемые 66 нечётных чисел.

9 класс

9.1. *Первый способ.* Обозначим $x = b/a$, $y = c/a$. Разделив обе части исходного неравенства на положительное число a^2, получим равносильное неравенство

$$(1 + x)(1 + y) \ge 2\sqrt{xy(1 + x + y)} \iff$$

$$(1 + 2x + x^2)(1 + 2y + y^2) \ge 4xy(1 + x + y) \iff$$

$$1+2x+2y+x^2+y^2+4xy+2x^2y+2xy^2+x^2y^2 \ge 4xy+4x^2y+4xy^2 \iff$$

$$1 + 2x + 2y + x^2 + y^2 + x^2y^2 \geq 2x^2y + 2xy^2.$$

Добавляя к обеим частям полученного неравенства число $2xy$, получим равносильное неравенство

$$(1 + x + y)^2 + x^2y^2 \geq 2xy(1 + x + y) \iff$$

$$(1 + x + y)^2 - 2xy(1 + x + y) + x^2y^2 \geq 0 \iff (1 + x + y - xy)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется при всех действительных x и y. Заметим, что равенство возможно лишь при $xy = 1 + x + y$, т.е. при $a(a + b + c) = bc$, или, что тоже самое, при $(a + b)^2 + (a + c)^2 = (b + c)^2$.

Второй способ. Рассмотрим треугольник MNK со сторонами $MN = a + b$, $NK = a + c$ и $MK = b + c$ (очевидно, что такой треугольник всегда существует, поскольку для его сторон выполняются неравенства треугольника). С одной стороны, площадь треугольника MNK равна $\frac{1}{2}MN \cdot NK \sin\angle N = \frac{1}{2}(a+b)(a+c)\sin\angle N$, а с другой стороны, по формуле Герона, она равна

$$\sqrt{p(p - (a + b))(p - (a + c))(p - (b + c))} = \sqrt{abc(a + b + c)},$$

так как полупериметр треугольника MNK равен $p = a + b + c$. Поэтому $\frac{1}{2}(a + b)(a + c)\sin\angle N = \sqrt{abc(a + b + c)}$, откуда и следует требуемое неравенство. Заметим, что равенство возможно лишь в случае, когда $\sin\angle N = 1$, т.е. при $\angle N = 90^0$, что равносильно равенству $(a + b)^2 + (a + c)^2 = (b + c)^2$.

9.2. Ответ: $a = b = 2001$, $c = 2002$.

Очевидно, что $c > a$ и $c > b$. Кроме того, $a \geq b$, поскольку в противном случае, из исходного уравнения, разделив его на $a!$, получим $1 = \frac{c!}{a!} - 2001\frac{b!}{a!}$, причем правая часть этого равенства, очевидно, делится на b. Но тогда $1 = b > a$ — противоречие. Рассмотрим два случая.

1) $a = b$. Имеем $c! = a! + 2001a! = 2002a!$, откуда $2002 = c(c - 1) \cdot \ldots \cdot (a + 1)$. Однако число $2002 = 2 \cdot 11 \cdot 91$ не представимо в виде произведения нескольких (более одного) последовательных

натуральных чисел. Следовательно, $c = a + 1 = 2002$. Поэтому решением исходного уравнения являются числа $a = b = 2001$, $c = 2002$.

2) $a > b$. Имеем $1 + 2001\dfrac{b\,!}{a\,!} = \dfrac{c\,!}{a\,!} \in \mathbb{N}$. Поэтому $\dfrac{2001b\,!}{a\,!} \in \mathbb{N}$, откуда следует, что число 2001 делится на $a(a-1)\cdot\ldots\cdot(b+1)$, которое, в свою очередь, делится на $(a-b)\,!$. Однако 2001 не делится на $2\,!$, поэтому $a - b = 1$. Но тогда 2001 должно делиться на a, и поэтому a может принимать одно из следующих значений ($2001 = 3\cdot 23\cdot 29$):

$$a = 3, 23, 29, 3\cdot 23, 3\cdot 29, 23\cdot 29, 2001.$$

Непосредственная проверка показывает, что ни одно из этих значений не является решением исходного уравнения. Действительно, поскольку $b = a - 1$, то

$$3\,! + 2001\cdot 2\,! = 4008 \neq c\,!, \quad 23\,! + 2001\cdot 22\,! = 88\cdot 23\,! \neq c\,!,$$

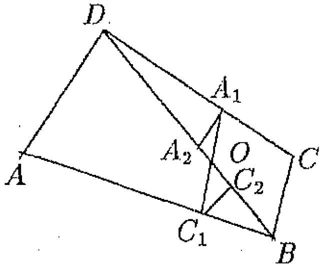
$$29\,! + 2001\cdot 28\,! = 70\cdot 29\,! \neq c\,!, \quad 69\,! + 2001\cdot 68\,! = 30\cdot 69\,! \neq c\,!,$$

$$87\,! + 2001\cdot 86\,! = 24\cdot 87\,! \neq c\,!, \quad 667\,! + 2001\cdot 666\,! = 4\cdot 667\,! \neq c\,!,$$

$$2001\,! + 2001\cdot 2000\,! = 2\cdot 2001\,! \neq c\,!.$$

Следовательно, при $a > b$ исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

9.3. Пусть O точка пересечения отрезка A_1C_1 и диагонали BD.



Опустим из точек A_1 и C_1 перпендикуляры A_1A_2 и C_1C_2 на диагональ BD. Пусть $\angle A_1DA_2 = \alpha$, $\angle C_1BC_2 = \beta$. Тогда

$$A_1A_2 = DA_1 \sin\alpha, \; C_1C_2 = BC_1 \sin\beta. \quad (1)$$

По условию четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть R — радиус окружности, описанной около $ABCD$. Тогда из теоремы синусов следует, что $AD = 2R\sin\beta$ и $BC = 2R\sin\alpha$. Так как $BC_1 = BC$ и $DA_1 = AD$, то из (1) получаем

$$C_1C_2 = BC\sin\beta = BC\frac{AD}{2R} = AD\frac{BC}{2R} = AD\sin\alpha = A_1A_2.$$

Если $A_1C_1 \perp BD$, то точки A_2 и C_2 совпадают и являются серединой отрезка A_1C_1, что и требовалось доказать. Пусть отрезки A_1C_1 и BD не перпендикулярны. Тогда прямоугольные треугольники A_1OA_2 и C_1OC_2 равны по катету ($A_1A_2 = C_1C_2$) и острому углу ($\angle A_1OA_2 = \angle C_1OC_2$ как вертикальные). Следовательно, равны и их гипотенузы, т.е. $A_1O = C_1O$, что и требовалось доказать.

9.4. Ответ: 25.

Заметим, что существует всего лишь пять различных оценок за каждую задачу: 0, 1, 2, 3 и 4 балла. Если бы общее число участников было не менее 26, то нашлось бы не менее 6 участников, получивших по первой задаче одинаковое число баллов. Из этих участников наверняка нашлось бы два, получивших одинаковое число баллов и по второй задаче, что противоречит условию. Таким образом, общее число участников олимпиады не более 25 человек. Следующий пример показывает, что в олимпиаде действительно могли принимать участие 25 школьников.

№ участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Задача 1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
Задача 2	0	1	2	3	4	1	2	3	4	0	2	3	4	0	1
Задача 3	0	1	2	3	4	2	3	4	0	1	4	0	1	2	3
Задача 4	0	1	2	3	4	3	4	0	1	2	1	2	3	4	0

№ участника	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Задача 1	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
Задача 2	3	4	0	1	2	4	0	1	2	3
Задача 3	1	2	3	4	0	3	4	0	1	2
Задача 4	4	0	1	2	3	2	3	4	0	1

9.5. После одной операции перекладывания монет из всех кучек в меньшую число монет в этой кучке увеличивается на 9, а в каждой из остальных кучек — уменьшается на 1. Поэтому если взять произвольные две кучки, то разность между количествами монет в них либо не меняется, либо меняется ровно на 10. В частности, разность между наибольшей и наименьшей кучками уменьшается на 10 до тех пор, пока она не станет меньше 10. Поэтому если эта разность в каких-то кучках была кратной 10, то в результате передела она когда нибудь станет равной 0, т. е. эти кучки уравняются. Следовательно, чтобы этого никогда не произошло (т. е. никакие две кучки не уравнялись) необходимо, чтобы все числа, выражающие первоначальные количества монет в кучках, имели разные остатки при делении на 10 (или, что то же самое, заканчивались разными цифрами). Тем самым, должно быть ровно одно число, заканчивающееся цифрой 0, ровно одно число, заканчивающееся цифрой 1, ..., ровно одно число, заканчивающееся цифрой 9. И поскольку $0+1+2+\ldots+9=45$, то сумма таких чисел заканчивается цифрой 5. Но согласно условию задачи эта сумма равна 10 000 и заканчивается цифрой 0. Полученное противоречие означает, что по условию задачи имеются кучки, разность количества монет в которых кратна 10, и значит, эти кучки (или другие с таким же условием) рано или поздно уравняются.

9.6. Выберем натуральное число p настолько большим, чтобы

$$\delta=\sqrt{p+1}-\sqrt{p}=\frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}<\frac{1}{2\sqrt{p}}<10^{-9},$$

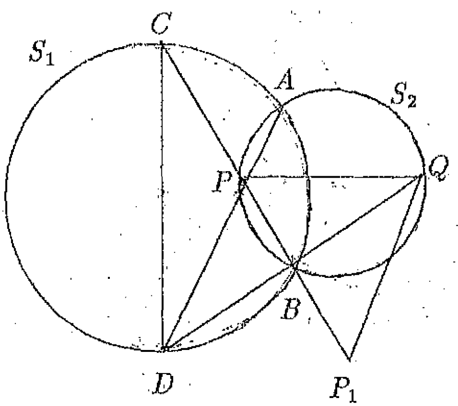
(для этого достаточно взять $p>10^{18}$). Поскольку, очевидно, $\delta>0$, то существует такое натуральное число k, что $k\delta\le\sqrt{2001}<(k+1)\delta$. Тогда $0\le\sqrt{2001}-k\delta<\delta$, откуда $\left|\sqrt{2001}-k\delta\right|<\delta<10^{-9}$. Положим $n=k^2p$ и $m=k^2(p+1)$. Тогда

$$\left|\sqrt{2001}-(\sqrt{m}-\sqrt{n})\right|=\left|\sqrt{2001}-(\sqrt{k^2(p+1)}-\sqrt{k^2p})\right|=$$

$$=\left|\sqrt{2001}-k(\sqrt{p+1}-\sqrt{p})\right|=\left|\sqrt{2001}-k\delta\right|<10^{-9},$$

что и требовалось доказать.

9.7. *Необходимость.* Пусть CD — диаметр окружности S_1. Тогда $\angle CBD = 90^0$, т. е. $QB \perp PP_1$. Но так как по условию $BP = BP_1$,

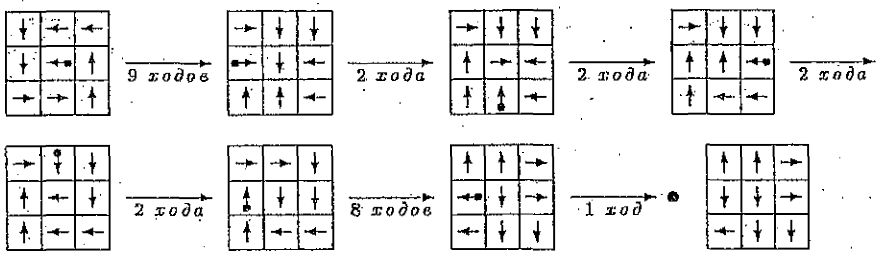


то QB является и медианой ΔPQP_1, а следовательно, и биссектрисой этого треугольника, т. е. $\angle PQB = \angle P_1QB = \angle P_1QD$. Поскольку углы PAB и PQB вписаны в окружность S_2 и опираются на общую дугу PB, то $\angle PAB = \angle PQB$. Аналогично, углы DAB и DCB вписаны в окружность S_1 и опираются на общую дугу DB, поэтому $\angle DCP_1 = \angle DCB = \angle DAB = \angle PAB = \angle PQB = \angle P_1QD$. Таким образом, углы DCP_1 и P_1QD равны, а так как они опираются на общий отрезок DP_1 и лежат по отношению к нему в одной полуплоскости, то четыре точки D, C, Q и P_1 лежат на одной окружности.

Достаточность. Если точки D, C, Q и P_1 лежат на одной окружности, то $\angle DCB = \angle DCP_1 = \angle DQP_1 = \angle BQP_1$. Кроме того, $\angle DCB = \angle DAB$, как вписанные в окружности S_1 и $\angle DAB = \angle PAB = \angle PQB$, как вписанные в окружности S_2. Таким образом, $\angle PQB = \angle P_1QB$ и , следовательно QB — биссектриса в треугольнике PQP_1, но так как по условию $PB = P_1B$, то QB является и медианой, а, следовательно, и высотой в ΔPQP_1. Поэтому $QB \perp PP_1$, т.е. $\angle CBD = 90^0$, откуда и следует, что CD – диаметр окружности S_1.

9.8. Ответ : 26 лет.

Рассмотрим цетральную клетку квадрата. Понятно, что в ней муха могла побывать самое большее 5 раз (при условии, что она была там изначально и что она возвращалась туда по разу из каждой из четырёх соседних с ней по стороне клеток. Поэтому из центральной клетки муха могла совершить не более пяти ходов. Далее, оставаясь в пределах квадрата, муха могла совершить не более чем по три хода из каждой из четырёх клеток, примыкающих по стороне к центральной клетке, и не более чем по два хода из каждой из четырёх угловых клеток. Наконец, учтём ещё один ход, при котором муха выползает за пределы доски. Всего получается не более $5 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 = 26$ ходов. С другой стороны, пример на рисунке показывает, что муха могла не покинуть квадрат ранее 26 ходов.



10 класс

10.1. Ответ: 2001.

Преобразуем заданную сумму:

$$\sum_{k=1}^{100} k! \cdot \left(k^2 + 3k + 1\right) = \sum_{k=1}^{100} k! \cdot \left((k+1)(k+2) - 1\right) = \sum_{k=1}^{100}\left((k+2)! - k!\right) =$$

$$= (3! - 1!) + (4! - 2!) + (5! - 3!) + \ldots + (101! - 99!) + (102! - 100!) =$$

$$= (3! - 1! + 5! - 3! + \ldots + 101! - 99!) + (4! - 2! + 6! - 4! + \ldots + 102! - 100!) =$$

$$= (-1! + 101!) + (-2! + 102!) = 101! \cdot 103 - 3.$$

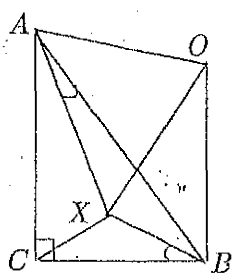
Так как число $2004 = 3 \cdot 4 \cdot 67$, то число $101!$, а значит, и число $101! \cdot 103$, делится нацело на 2004. Поэтому остаток от деления числа $101! \cdot 103 - 3$ на 2004 равен 2001.

10.2. Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что можно расставить по окружности каких-то N натуральных чисел: $a_1, \ldots, a_N$ (в порядке следования по кругу), не все из которых равны 1, так, что в любой тройке подряд стоящих чисел есть число, равное произведению двух остальных чисел этой тройки. Пусть p — какое-нибудь простое число, делящее нацело хотя бы одно из расставленных чисел (поскольку не все они равны 1, то такое p найдётся).

Обозначим через p^{m_i} наибольшую степень p, делящую нацело a_i ($m_i \geq 0$), а через 2^n — наибольшую степень двойки, делящую нацело все m_i ($1 \leq i \leq N$). Запишем тогда на окружности вместо каждого числа a_i число r_i, равное остатку от деления на 2 числа $2^{-n} \cdot m_i$. Так как при умножении степеней с одинаковыми основаниями их показатели складываются, то для расставленных по окружности чисел r_i должно выполняться условие: в любой тройке подряд стоящих чисел сумма каких-то двух равна по $\bmod 2$ третьему числу. Считая без нарушения общности $r_1 = 1$, получаем, что могут реализовываться только две возможности: либо 1) $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, либо 2) $r_2 = 0$, $r_3 = 1$. В каждом из этих случаев величины r_i при $i \geq 4$ определяются вследствие сформулированного выше условия однозначно: $r_{3k} = 0$, $r_{3k+1} = r_{3k+2} = 1$ в случае 1) и $r_{3k} = r_{3k+1} = 1$, $r_{3k+2} = 0$ в случае 2). Поэтому для $N \equiv 1 \pmod 3$ в случае 1) получаем $r_N = r_1 = r_2 = 1$, что невозможно, а в случае 2) — что $r_{N-1} = r_N = r_1 = 1$, что также невозможно. Следовательно, расстановки чисел, требуемой в условии задачи, не существует.

10.3. Пусть O — центр описанной окружности $\Delta\, AXB$. Согласно условию $\angle XAB + \angle XBA = \angle XBC + \angle XBA = \angle B$, так что $\angle AXB = 180^0 - \angle B = 90^0 + \angle A > 90^0$. Отсюда вытекает, что точки O и X расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB (см. рис.).



Далее, в описанной окружности $\Delta\, AXB$ угловая мера дуги $\smile AXB$ равна $\angle AOB$. Поэтому $90^0 + \angle A = \angle AXB = \frac{1}{2}(360^0 - \angle AOB)$, так что $\angle AOB = 180^0 - 2 \cdot \angle A$. Поскольку $\Delta\, AOB$ равнобедренный ($AO = BO$), мы получаем $\angle ABO = \frac{1}{2}(180^0 - \angle AOB) = \angle A$. (В частности, $AC \parallel BO$, $BO \perp BC$.) Далее имеем: $OX = OB = \frac{1}{2}\frac{AB}{\cos \angle A} =$

$= \dfrac{AB^2}{2AC}$. Теперь необходимое неравенство прямо получается из следующей цепочки:

$$OC = \sqrt{BC^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{4AC^2 \cdot BC^2 + AB^4}}{2AC} \le CX + OX = CX + \frac{AB^2}{2AC},$$

$$\sqrt{4AC^2 \cdot BC^2 + AB^4} \le 2AC \cdot CX + AB^2,$$

$$4AC^2 \cdot BC^2 + AB^4 \le 4AC^2 \cdot CX^2 + 4AC \cdot CX \cdot AB^2 + AB^4,$$

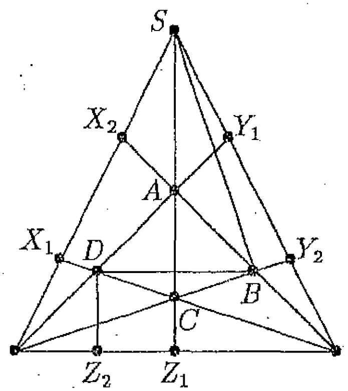
и (после приведения подобных и сокращения) окончательно

$$AC \cdot BC^2 \le AC \cdot CX^2 + CX \cdot AB^2.$$

Замечание. Равенство выполняется в случае $X \in [OC]$, что можно представить в равносильной форме (без использования точки O) следующим образом: $\operatorname{tg}\angle BCX = \dfrac{1}{\sin 2\angle A}$ (и, конечно, $\angle XAB = \angle XBC$).

10.4. Ответ : 13.

Рассмотрим некоторую задачу, скажем, задачу 1. В тех комплектах, в которых она содержится, есть ещё по три задачи. Рассмотрим все такие тройки. Ни в каких двух из этих троек не может быть одинаковых задач, иначе комплекты, состоящие из этих троек и задачи 1, будут иметь более одной общей задачи, что противоречит условию. Поскольку помимо задачи 1 у жюри имеется 12 других задач, то их можно разбить ровно на четыре непересекающиеся тройки. Следовательно, задача 1, а значит, и всякая другая задача, может входить не более, чем в четыре комплекта. Тогда во всех комплектах (считая каждую задачу столько раз, сколько раз она встречается в комплектах) не более $13 \cdot 4 = 52$ задач. А так как каждый комплект состоит из четырёх задач, то число комплектов не более $52 : 4 = 13$.



Покажем, что 13 комплектов из 13 задач составить можно. Чтобы облегчить перебор всевозможных вариантов, можно использовать, например, геометрические соображения. Будем изображать задачи в виде точек на плоскости и соединять их отрезками так, что если на отрезке лежат ровно 4 отмеченные точки, то они образуют комплект (см. рис.). Начнём с того, что отметим вершины некоторого равнобедренного треугольника. Из двух вершин проведём по два отрезка к точкам на противоположных сторонах треугольника. Отметим все точки пересечения и обозначим их так, как на рисунке. Третью вершину тре- угольника соединим отрезком, проходящим через A и C, с точкой Z_1 на противоположной стороне. На этой же стороне отметим ещё одну точку Z_2. В результате получим 13 отмеченных точек. Непараллельные отрезки не могут пересекаться более, чем в одной точке; тем самым, соответствующие им комплекты будут иметь не более одной общей задачи. На рисунке проведено 8 таких отрезков. Ломаная $SBDZ_2$ также обладает нужным свойством, поэтому её тоже будем называть „отрезком", и ей тоже соответствует (девятый) комплект. Глядя на рисунок, легко найти ещё 4 недостающие комплекта: $AX_1Y_2Z_2$, $BX_1Y_1Z_1$, $CX_2Y_1Z_2$, $DX_2Y_2Z_1$.

10.5. Ответ: 8.

Перепишем заданное выражение в виде

$$\frac{1-x_1}{1-x_1y_2}\cdot\frac{1-x_2}{1-x_2y_3}\cdot\frac{1-x_3}{1-x_3y_1} \qquad (*)$$

и докажем, что справедливо неравенство $\dfrac{1-x}{1-xy}\leq 2$, если $x\in[-1;1]$, $y\in[0;1)$. В самом деле, так как в указанной области $1-xy>0$, то в ней доказываемое неравенство равносильно неравенству $1-x\leq$ $\leq 2(1-xy)$, которое очевидно равносильно неравенству $x(2y-1)\leq 1$, но последнее неравенство верно в области $x\in[-1;1]$, $y\in[0;1)$, поскольку в ней $|x|\leq 1$ и $|2y-1|\leq 1$.

Теперь, применяя доказанное неравенство к каждому из трёх сомножителей в $(*)$, получаем, что заданное выражение не превосходит $2\cdot 2\cdot 2=8$. Эта оценка является в области x_1, x_2, $x_3\in[-1;1]$,

y_1, $y_2 \in [0;1)$ точной, поскольку заданное выражение равно 8 при $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ и $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Таким образом, наибольшее значение, принимаемое заданным выражением при x_1, x_2, $x_3 \in [-1;1]$, y_1, $y_2 \in [0;1)$, равно 8.

10.6. Ответ: нет, так расставить стрелки нельзя.

Допустим, что робот никогда не сможет выйти за пределы какого-либо квадрата. Так как в квадрате конечное число клеток, то в какой-то из них он должен побывать бесконечно много раз. Но если в какой-то из клеток робот побывает бесконечно много раз, то, как следует из условия, и в каждой соседней с ней клетке он побывает бесконечно много раз и т. д. Следовательно, рано или поздно робот выйдет за пределы квадрата.

10.7. Ответ: 2797.

Пусть число k хорошее, а N — такое k-значное число (существующее согласно определению хорошего числа), что последние k цифр числа $2N$ и первые k цифр числа $3N$ совпадают. Так как $2N < 3N < 10N$, то оба числа $2N$ и $3N$ имеют не более чем по $(k+1)$-ому знаку. Докажем, что они в точности $(k+1)$-значные. В самом деле, если бы число $2N$ было k-значным, т. е. оно совпадало бы с числом, образованным первыми k цифрами числа $3N$, то имели бы: $3N > \overline{(2N)0} = 10 \cdot 2N = 20N$, что неверно. Следовательно, $2N = \overline{a_0a_1\ldots a_k}$ и $3N = \overline{a_1\ldots a_ka_{k+1}}$, где $a_0, \ldots, a_{k+1}$ — цифры. Так как $\overline{a_0a_1\ldots a_k} = 2 \cdot N < 2 \cdot \underbrace{9\ldots9}_{k} = 1\underbrace{9\ldots9}_{k-1}8$, то $a_0 = 1$. Поэтому $2N = 10^k + \overline{a_1\ldots a_k}$ и, как легко видеть, $3N = 10 \cdot \overline{a_1\ldots a_k} + a_{k+1}$. Умножив первое из двух последних равенств на 10 и вычтя из полученного равенства второе, получаем:

$$17N + a_{k+1} = 10^{k+1}. \qquad (*)$$

Таким образом, мы доказали: *для того, чтобы число k являлось хорошим, необходимо, чтобы положительный остаток от деления числа 10^{k+1} на 17, был цифрой.*

Докажем, что сформулированное необходимое условие является и достаточным. Пусть натуральное число k таково, что имеет место равенство $(*)$, в котором N — какое-то натуральное число, а

a_{k+1} — цифра. Тогда число $N = \dfrac{10^{k+1} - a_{k+1}}{17}$ является k-значным. Действительно,

$$N \le \frac{10^{k+1}}{10} - 1 = 10^k - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{k} \text{ и } N > \frac{10^{k+1} - 10}{20} = \frac{10^k - 1}{2} = 4\underbrace{9\ldots9}_{k-1}.$$

Так как число N k-значное и $N \ge 5\underbrace{0\ldots0}_{k-1}$, то числа $2N$ и $3N$ являются $(k+1)$-значными. Обозначим поэтому $2N = \overline{a_0a_1\ldots a_k}$ и $3N = \overline{b_1\ldots b_kb_{k+1}}$, где a_i и b_j — цифры. Тогда $17N + a_{k+1} = 10\cdot 2N - 3N + a_{k+1} = \overline{a_0a_1\ldots a_k0} - \overline{b_1\ldots b_kb_{k+1}} + a_{k+1} = \overline{a_0a_1\ldots a_k0} - \overline{b_1\ldots b_k0} + (a_{k+1} - b_{k+1})$. Следовательно, поскольку мы предположили, что равенство $(*)$ выпонено, имеем

$$\overline{a_0a_1\ldots a_k0} - \overline{b_1\ldots b_k0} = 1\underbrace{0\ldots0}_{k+1} + (b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Из этого равенства вытекает, что $a_{k+1} = b_{k+1}$ и что $a_i = b_i$ при всех $i = 1,\ldots,k$. Последнее и означает, что число k хорошее. Таким образом, число k тогда и только тогда является хорошим, когда остаток от деления числа 10^{k+1} на 17 есть цифра.

Так как остатки от деления чисел 10^m, $m \in \mathbb{N}$, на 17 периодически повторяются с периодом, равным 16, то все хорошие k отыскать легко, найдя остатки от деления чисел 10^{k+1}, $k = 1,\ldots,16$, на 17 (см. таблицу).

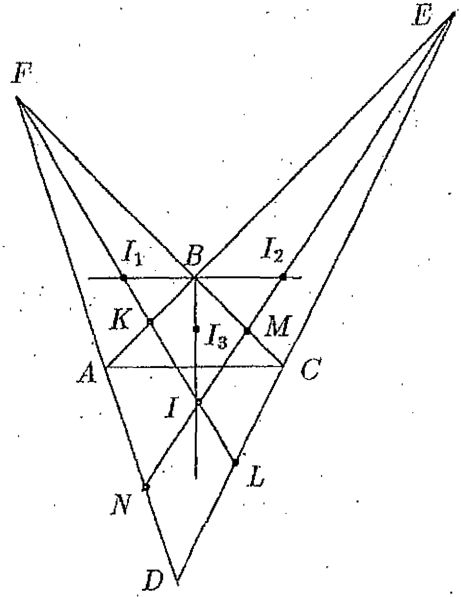
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
остаток 10^{k+1}	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12	1	10

Из таблицы следует, что хорошими являются только числа вида $16q + r$, где $q \in \mathbb{N}$, а $r \in \{3,4,5,6,8,9,10,13,15\}$. Так как $3+4+5+6+8+9+10+13+15 = 73$, то сумма всех 9 хороших чисел в пределах от 0 до 15 равна 73, в пределах от 16 до 31 — $73 + 16\cdot 9$, ..., в пределах от 80 до 95 — $75 + 16\cdot 6\cdot 9$. Кроме того, хорошими числами между 96 и 100 являютя числа 99 и 100. Таким образом, искомая сумма равна

$$73\cdot 6 + 16\cdot 9\cdot(1+2+3+4+5) + 99 + 100 = 2797.$$

10.8. Так как по условию в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то пусть I — её центр.

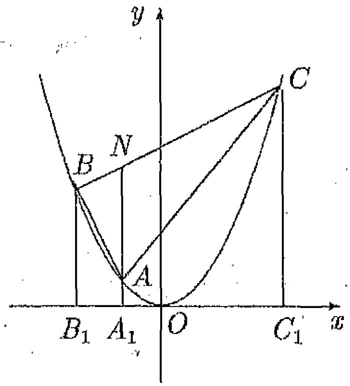
Так как BI_1 и BI_2 — биссектрисы вертикальных углов FBA и EBC соответственно, то точки I_1, I_2 и B лежат на одной прямой I_1I_2. Точки B, I_3 и I лежат на биссектрисе угла $\angle ABC$, смежного к углам FBA и EBC, а поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $I_1I_2 \perp II_3$, т. е. IB — высота $\triangle II_1I_2$.



Заметим теперь, что точки I_1 и I принадлежат биссектрисе угла $\angle DFC$, а точки I_2 и I — биссектрисе угла $\angle AED$. Равенство $EK = EL$ равносильно тому, что $\triangle EKL$ равнобедренный с основанием KL, а это, в свою очередь, равносильно тому, что биссектриса угла $\angle AED$ перпендикулярна KL, т. е., по-другому, $I_2I \perp I_1I_3$. Итак, равенство $EK = EL$ равносильно отношению $I_2I \perp I_1I_3$. Аналогично, $FM = FN \iff I_1I \perp I_2I_3$. Однако условия $I_2I \perp I_1I_3$ и $I_1I \perp I_2I_3$ равносильны, так как каждое из них равносильно тому, что I_3 — точка пересечения высот треугольника II_1I_2. Таким образом, $EK = EL \iff FM = FN$, что требовалось доказать.

11 класс

11.1. Обозначим координаты точек как $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$, $C(c,c^2)$.



Опустим из A, B, C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на ось Ox. Тогда B_1BCC_1 — прямоугольная трапеция с основаниями $BB_1 = b^2$, $CC_1 = c^2$, в которой проведён отрезок NA_1, параллельный основаниям и разбивающий боковую сторону B_1C_1 в отношении $C_1A_1 : A_1B_1 = (c-a) : (a-b)$. Поэтому

$$NA_1 = \frac{(c-a)BB_1 + (a-b)CC_1}{(c-a)+(a-b)} =$$

$$= \frac{(c-a)b^2 + (a-b)c^2}{(c-a)+(a-b)} = \frac{(c-b)(ac+ab-bc)}{c-b} = ac+ab-bc.$$

Тогда $NA = NA_1 - AA_1 = ac+ab-bc-a^2 = (c-a)(a-b)$. Далее, в треугольнике ABN высота, проведённая к стороне AN, равна $a-b$, так что $2S_1 = (a-b)AN$. Аналогично, $2S_2 = (c-a)AN$. Перемножив, получим $4S_1S_2 = (a-b)(c-a)AN^2 = AN^3$. Отсюда окончательно получаем $AN = \sqrt[3]{4S_1S_2}$.

11.2. При доказательстве мы используем известное неравенство Коши: если x_1, x_2, ..., x_n — произвольные n положительных чисел, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$. Поскольку

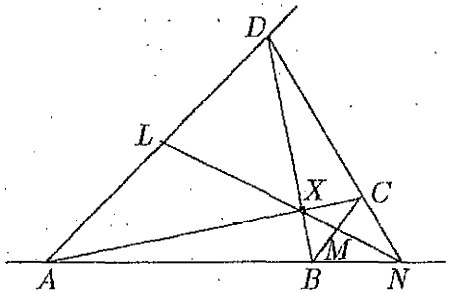
$$(a^n-1)^2 = (a-1)^2(a^{n-1}+\ldots+a+1)^2 \geq (a-1)^2(n\sqrt[n]{a^{n-1}\ldots a^2a^1\cdot 1})^2 =$$

$$= (a-1)^2(n\sqrt[n]{a^{(n-1)+\ldots+2+1+0}})^2 = n^2a^{n-1}(a-1)^2,$$

то $a^{2n} - 2a^n + 1 \geq n^2a^{n-1}(a^2-2a+1)$. Разделив теперь обе части на a^n, получим требуемое неравенство.

11.3. Ответ: полуокружность с выколотыми концевыми точками с центром Q на отрезке AN, таким, что $\dfrac{NQ}{NA} = \dfrac{NB}{NA+NB}$.

Доказательство начнём со следующего замечания. Пусть на плоскости зафиксированы точка T и некоторая окружность S. Пусть точка K лежит на окружности S с центром O, а точка F на отрезке TK такова, что отношение $\frac{TF}{TK}$ равно данному числу $\lambda > 0$. Тогда при движении точки K по окружности S и при неподвижной точке T точка F описывает окружность, гомотетичную S с центром O_1 на отрезке TO и коэффициентом λ, причём $\frac{TO_1}{TO} = \lambda$.



Заметим теперь, что по условию получающийся с помощью указанной процедуры четырёхугольник $ABCD$ — трапеция, а поскольку вокруг $ABCD$ можно описать окружность, то это равнобедренная трапеция, а треугольник AND равнобедренный, $NA = ND$. Пусть L — середина стороны AD, тогда точки N, X и L лежат на одной прямой. При этом отношение $\lambda = \frac{NX}{NL}$ не зависит от выбора трапеции, а зависит лишь от длин отрезков $NA = a$ и $NB = b$. Действительно, пусть M — середина стороны BC, тогда M лежит на прямой NL. Пользуясь подобием треугольников AND и BNC, а также AXD и CXB, получаем, что $\frac{NX}{NL} = \frac{NM + MX}{NL} = \frac{b}{a} + \frac{MX}{NL} =$
$= \frac{b}{a} + \frac{MX}{ML} \cdot \frac{ML}{NL} = \frac{b}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{2b}{a+b}$.

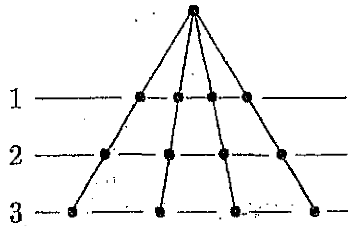
Обозначим $\beta = \angle AND$; заметим, что $\beta = \pi - 2\alpha$, так что β изменяется от 0 до π, когда α изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Получаем, что при изменении β в интервале $(0; \pi)$ точка D пробегает полуокружность радиуса $NA = a$ с центром в N с выколотыми концевыми точками, одна из них A. В силу сделанного замечания точка L тогда пробегает некоторую полуокружность вдвое меньшего радиуса $\frac{a}{2}$ с цетром в середине P отрезка AN с выколотыми концевыми точками. Опять же в силу этого замечания точка X тогда пробегает некоторую полуокружность с выброшенными концами радиуса $\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{a+b}$ с центром в некоторой точке Q отрезка NP, такой что $\frac{NQ}{NP} = \lambda = \frac{2b}{a+b}$, то есть $\frac{NQ}{NA} = \frac{b}{a+b}$.

11.4. Ответ : 13 задач.

Покажем, что 12 задач для составления 10 комплектов не достаточно. Рассмотрим некоторую задачу, скажем, задачу 1. В тех комплектах, в которых она содержится, есть ещё по три задачи. Рассмотрим все такие тройки. Ни в каких из этих троек не может быть одинаковых задач, иначе комплекты, состоящие из этих троек и задачи 1, будут иметь более одной общей задачи, что противоречит условию. Если у жюри всего 12 задач, то, исключая задачу 1, из оставшихся 11 можно составить не более трёх непересекающихся троек. Следовательно, задача 1, а значит и всякая другая задача, может входить не более, чем в три комплекта. Тогда во всех комплектах (считая каждую задачу столько раз, сколько она встречается в комплектах) не более $12 \cdot 3 = 36$ задач. А так как каждый комплект состоит из четырёх задач, то число комплектов будет не более $36 : 4 = 9$. Тем более невозможно составить 10 комплектов из меньшего 12-ти числа задач.

Покажем, что из 13 задач 10 комплектов составить можно. Чтобы облегчить перебор всевозможных вариантов, можно использовать, например, геометрические соображения. Будем изображать задачи в виде точек на плоскости. Отметим некоторую точку, проведём из нее 4 отрезка, отметив на каждом ещё по 3 точки. Всего получим 13 точек (каждой соответствует задача). Каждый из отрезков с соответствующим набором отмеченных на нём точек представляет отдельный комплект. Условие задачи для построенных четырёх комплектов очевидно выполняется. Для нахождения остальных шести комплектов отмеченные точки на отрезках распределим по уровням так, как показано на рисунке. Составить новые комплекты с соблюдением условия задачи можно, выбирая точки из каких-то уровней, но только по одной из каждого отрезка. Результат выбора можно представить в виде упорядоченной четвёрки чисел,



где первое число равно уровню выбранной точки из первого отрезка, второе — уровню точки из второго отрезка и т. д. Условие задачи будет выполняться, если подбираемые четвёрки не будут совпадать более, чем в одной позиции.

Такому условию удовлетворяет, например, следующий набор из 6 четвёрок: 1122, 2211, 3113, 1331, 2323, 3232.

Таким образом, минимальное число задач, необходимое для составления 10 комплектов, равно 13.

Замечание. В действительности, как показывает следующий пример, из 13 задач можно составить 13 комплектов, поскольку существует 9 упорядоченных четвёрок, удовлетворяющих нужным условиям: 1111, 1223, 1332, 2122, 2231, 2313 3133, 3212, 3321.

Ещё один способ построения нужного примера приведён в решении задачи **10.4**.

11.5. Ответ: б) не верно.

а) Если число a_k из последовательности забавное, то в силу того, что последовательность возрастающая, a_k можно представить в виде суммы каких-то (не обязательно различных) членов с меньшими номерами. Таким образом, нужно доказать, что найдётся такой номер n_0, что для каждого $n > n_0$ число a_n представимо в виде $a_n = l_1 \cdot a_1 + l_2 \cdot a_2 + \ldots + l_{n-1} \cdot a_{n-1}$, где $l_i, 1 \le i \le n-1$, — целые неотрицательные числа (свои для каждого n).

Для каждого целого $r \in \{0, 1, \ldots, a_1 - 1\}$ рассмотрим множество $M(r)$ тех номеров i, для которых $a_i \equiv r \pmod{a_1}$. Если $M(r) \neq \varnothing$, то обозначим $m_r = \min M(r)$, а если $M(r) = \varnothing$, то считаем $m_r = 0$. Докажем, что в качестве числа n_0 из условия задачи можно взять $n_0 = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_{a_1 - 1}\}$. В самом деле, для каждого $n > n_0$ согласно определению чисел m_i $(0 \le i \le a_1 - 1)$ и n_0 найдётся такое $k \le n_0$, что $a_n \equiv a_k \pmod{a_1}$. Другими словами это означает, что $a_n = a_k + l \cdot a_1$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Утверждение доказано.

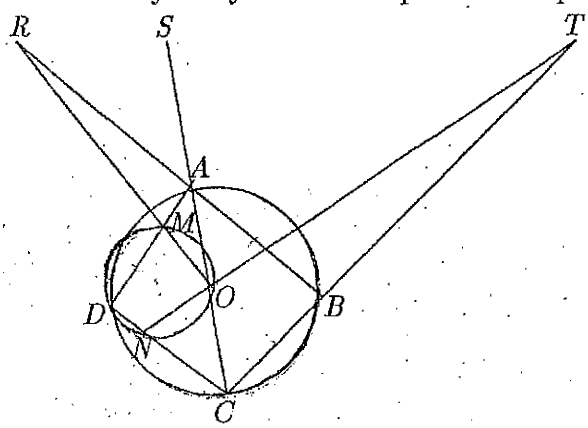
б) Рассмотрим возрастающую последовательность $a_n = n+10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, рациональных чисел. Допустим, что

$$a_n = l_1 \cdot a_1 + \ldots + l_{n-1} \cdot a_{n-1}$$

для некоторых $l_i \geq 0$. Но вследствие определения элементов последовательности, в десятичной записи суммы $l_1 \cdot a_1 + \ldots + l_{n-1} \cdot a_{n-1}$ число знаков после запятой не превосходит $n-1$, а число знаков после запятой в десятичной записи числа a_n равно n. Следовательно, записанное равенство невозможно ни при каком n.

11.6. Докажем утверждение по индукции. При $n = 1$ получаем квадрат из одной клетки, так что муха покидает его за $a_1 = 1$ ход, при этом $a_1 = 1 \leq 2^{3-1}(1-1)! - 3 = 1$. Предположим, что утверждение справедливо при $n = k$. Обозначим через a_k наибольшее возможное число ходов, за которые муха может покинуть квадрат $(2k-1)\times(2k-1)$. По предположению индукции $a_k \leq 2^{3k-1}(k-1)!-3$. Рассмотрим теперь квадрат $(2k+1)\times(2k+1)$. Легко видеть, что в центральном квадрате $(2k-1)\times(2k-1)$ могло быть сделано не более $(4(2k-1)+1)a_k$ ходов. Действительно, не более чем через a_k ходов муха выползет из него, а затем не более чем $4(2k-1)$ раз может возвратиться назад — не более чем по разу из каждой из $4(2k-1)$ клеток внешнего слоя (не считая угловых), окружающих центральный квадрат $(2k-1)\times(2k-1)$. Далее, в этом внешнем слое может быть сделано не более $3\cdot 4\cdot(2k-1)+2\cdot 4+1$ ходов — не более чем по 3 хода из каждой из $4\cdot(2k-1)$ неугловых клеток, не более чем по 2 хода из каждой угловой, и 1 ход на выползание из всего квадрата. Таким образом, наибольшее возможное число ходов a_{k+1}, за которые муха может покинуть квадрат $(2k+1)\times(2k+1)$, не превосходит $(4(2k-1)+1)a_k + 3\cdot 4\cdot(2k-1)+2\cdot 4+1 \leq (4(2k-1)+1)(2^{3k-1}(k-1)!-3)+3(4(2k-1)+1)+6 = (8k-3)2^{3k-1}(k-1)!+6 = 2^{3k+2}k!-3\cdot 2^{3k-1}(k-1)!+6 = 2^{3(k+1)-1}k!-3+9-3\cdot 2^{3k-1}(k-1)! \leq 2^{3(k+1)-1}k!-3$, так как $9 \leq 3\cdot 2^{3k-1}(k-1)!$ при $k \geq 1$. Поэтому утверждение справедливо при $n = k+1$. Тем самым утверждение полностью доказано.

11.7. Пусть Q — точка пересечения прямых MN и AD. Используя равенства вертикальных углов, а также равенства вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу окружности, получаем $\angle RMQ = \angle NMO = \angle NDO = \angle CDB = \angle CAB = \angle RAQ$. Аналогично, $\angle QNT = \angle MNO = \angle MDO = \angle ADB = \angle ACB = \angle QCT$. Из полученных равенств $\angle RMQ = \angle RAQ$ и $\angle QNT = \angle QCT$ следует, что четырёхугольники $RMAQ$ и $QNCT$ вписанные. Используя это, получаем цепочку равенств $\angle OTB = \angle NTC = \angle NQC = \angle MQA = \angle MRA = \angle ORB$. Полученное равенство $\angle OTB = \angle ORB$ и означает, что точки O, R, T и B лежат на одной окружности.



11.8. Ответ: б) $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ видов камней.

а) Поставим в соответствие каждой паре туземцев свой вид камня (различным парам — различные виды камней). Если в какой-либо паре туземцы дружат, то пусть каждый вденет в своё ожерелье по соответствующему камню, если же не дружат — пусть не вдевают.

б) Покажем сперва, что заведомо хватит $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ видов камней. Доказательство проведём по индукции. При $n = 1$ и $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно выполняется при $n = k$ и докажем, что оно справедливо при $n = k + 2$. Если все туземцы враждуют между собой, то камней вообще не понадобится. Иначе найдётся пара друзей A и B. По предположению индукции оставшимся k туземцам достаточно не более $\left[\dfrac{k^2}{4}\right]$ видов камней, чтобы для этих k туземцев удовлетворялось условие. Поскольку A и B дружат, понадобится ещё один вид камней для них. Пока набирается не более $\left[\frac{k^2}{4}\right]+1$ разновидностей камней. Далее, если какой-либо из остальных k туземцев дружит и с A, и с B, то новых видов камней не нужно, так как он может вдеть в своё ожерелье такой же камень, как у A и B. Если туземец C не дружит ни с A, ни с B, то тем более новых камней не понадобится. Если же туземец C дружит ровно с одним из A и B (допустим, с A), то понадобится ещё один вид камней для C и A. Таким образом, к имеющимся $\left[\frac{k^2}{4}\right]+1$ разновидностям камней добавляется ещё не более k разновидностей ,то есть, для k туземцев достаточно $\left[\frac{k^2}{4}\right]+1+k=\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=\left[\frac{(k+2)^2}{4}\right]$ видов камней, что и требовалось.

Покажем теперь, что меньшим числом камней обойтись, вообще говоря, нельзя. Если $n=2m$, то разделим туземцев на две группы по m туземцев в каждой. Пусть всякие два туземца дружат, если они из разных групп, и враждуют, если они из одной и той же группы. Тогда понадобится в точности $m^2=\frac{n^2}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$ разновидностей камней. Если же $n=2m+1$, то разделим туземцев на группы из $m+1$ и m туземцев. Понадобится в точности $m(m+1)=\frac{4m^2+4m}{4}=\left[\frac{4m^2+4m+1}{4}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$ видов камней.